
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01336894 9

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

Imprimerie de JOH. ENSCHEDÉ & FILS, Harlem.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME QUATORZIÈME

CALCUL DES PROBABILITES. TRAVAUX DE
MATHÉMATIQUES PURES
1655—1666



LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1920

CALCUL DES PROBABILITÉS. TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES PURES.

1655—1666.

VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK.

DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD.

1656–1657.



Avertiſſement.

Aperçu de la genèſe de l'ouvrage „De ratiociniis in ludo aleæ" et des recherches ſubſéquentes de Huygens ſur des queſtions de probabilité.

On ſait qu'en 1654 le Chevalier de Méré, joueur renommé et un peu mathématicien, propoſa à Paſcal quelques problèmes concernant les jeux de haſard [1]), qu'il en réſultait un échange de lettres [2]) entre Paſcal et Fermat et que ce fut là l'origine du calcul des probabilités. Or, l'année ſuivante, le jeune Huygens [3]), déja connu par quelques ouvrages de mathématiques [4]), ſe rendit à Paris en compagnie de ſon frère Louis et de ſon couſin Doublet [5]). Ce ſéjour, jugé alors néceſſaire pour compléter l'éducation de gentilshommes hollandais de leur condition [6]), ſe prolongea de la mi-juillet juſqu'à la fin de novembre. Huygens ne

[1]) Voir la p. 290 du T. II des „Œuvres de Fermat, publiées par les soins de M. M. Paul Tannery et Charles Henry", Paris, Gauthier—Villars, 1894.

[2]) On trouve ces lettres, pour autant qu'elles ont été conservées, aux p. 288—314 du T. II de l'édition citée dans la note précédente.

[3]) En juillet 1655, lorsqu'il arriva à Paris, Huygens avait l'âge de 26 ans.

[4]) Les „Theoremata de quadratura hyperboles, etc." (T. XI, p. 289), l'„Exetasis Cyclometriæ" (T. XI, p. 315), l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa" (T. XII, p. 121) et les „Illustrium quorundam problematum constructiones" (T. XII, p. 183).

[5]) Voir sur Lodewijk Huygens la note 1 de la p. 12 du T. I, et sur Philips Doublet la note 7 de la p. 294 du même Tome.

[6]) Consultez la p. 356 du T. I, où Christiaan se permet de railler un peu les effets extraordinaires que son père attribuait à un tel séjour.

rencontra à cette occaſion ni Fermat (qui demeurait à Toulouſe), ni Paſcal [1]), ni Carcavy [2]) qui avait ſervi d'intermédiaire lors de l'échange de lettres de ces deux ſavants ſur les problèmes de de Méré [3]); mais il fréquenta Claude Mylon, un des amis de Carcavy [4]), et Roberval à qui l'on s'était adreſſé, de même qu'à Paſcal, pour la ſolution des problèmes qui occupaient de Méré [5]). Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que Huygens fut informé de l'exiſtence de ces problèmes (dont l'un eſt reſté connu ſous le nom de „problème des partis" et dont nous appellerons les autres „les problèmes des dés") ſans avoir l'occaſion d'en connaître les ſolutions obtenues par Paſcal et Fermat, ou les méthodes ſuivies par eux.

De retour en Hollande, Huygens ne tarda pas à commencer la compoſition de ſon Traité du calcul dans les jeux de haſard, qui roule preſqu'entièrement ſur les problèmes prémentionnés. Déja en mars 1656, il put écrire au profeſſeur van Schooten qu'il lui enverrait ce qu'il préparait ſur les jeux de dés [6]); le 18 avril il fit ſavoir à Roberval [7]) qu'il avait „depuis quelques jours eſcrit les fondements du calcul es jeux de haſard à la priere de Monſieur Schooten qui le veut faire imprimer", et il lui poſa le problème qu'on trouve dans la XIVième Propoſition [8]) de ſon Traité, en ajoutant qu'il déſirait fort voir ſi lui (Roberval) en trouverait

---

[1]) En 1657 Huygens écrivit à Cl. Mylon „Si l'on ne m'eust asseuré lors que j'estois à Paris que ce dernier" [Pascal] „avoit entierement abandonné l'estude de mathematiques j'aurois tasché par touts moyens de faire connoissance avec luy"; voir la p. 7 du T. II.

[2]) Voir la lettre de Huygens à Carcavy du 1 juin 1656 (p. 427 du T. I), où on lit: „Monsieur Mylon m'ayant enseigné le lieu de vostre demeure j'ay esté fort marry de ne vous point rencontrer. Mais je ne vous ay pas cherché en vain puis que en revenche vous avez eu la bonté de me venir trouver chez moy en m'escrivant en des termes si obligeants, et me donnant des louanges dont peut estre vous m'eussiez trouvé indigne si vous m'aviez connu de plus prez" Ajoutons qu'après le retour de Huygens en Hollande Carcavy devint un de ses correspondants les plus assidus.

[3]) Voir les pp. 289 et 299 du T. II des Œuvres de Fermat.

[4]) D'ailleurs Claude Mylon lui-même s'intéressait aussi aux problèmes sur les jeux de hasard; voir la p. 426 du T. I de notre publication.

[5]) Voir la p. 290 du T. II des Œuvres de Fermat. Roberval avait même pris une certaine part à la discussion des problèmes en question; voir les pp. 302 et 310 du Tome cité.

[6]) Voir la p. 389 du T. I de notre publication, où on lit „De lusu aleæ brevi aliqua concinnavero quæ tibi mittam".

[7]) Voir la p. 404 du T. I.

[8]) Voir la p. 87 du présent Tome.

[9]) Voir la p. 73. L'absence de cette Proposition dans le manuscrit envoyé le 20 avril (voir la p. 404 du T. I) résulte de la comparaison de la Pièce N°. 289 du 6 mai, dont nous parlerons bientôt, avec le texte du Traité tel qu'il fut publié en 1657 en latin et en 1660 en hollandais.

la même folution. Enfin, le 20 avril, il envoya à van Schooten un manufcrit qui probablement ne différait du texte que nous publions que par l'abfence de la Prop. IX [9]) et des Exercices vers la fin du Traité, dont Huygens abandonne l'analyfe à fes lecteurs [10]).

Il fut donc convenu entre van Schooten et lui que le petit traité de Huygens ferait inféré dans l'ouvrage „Exercitationum mathematicarum Libri quinque [11])" dont van Schooten préparait la publication. Cet ouvrage paraîtrait en deux éditions, l'une latine, l'autre hollandaife [12]). L'édition latine devant être publiée la première, il était néceffaire de fe procurer d'abord une verfion latine du manufcrit de Huygens que celui-ci avait écrit en hollandais parce que les termes latins lui manquaient. Après avoir achevé fon ouvrage, il trouva cependant plufieurs de ces termes [13]). Par fuite il fe fit fort, fi c'était néceffaire, d'élaborer une traduction latine; mais avant de s'y confacrer il voulut favoir fi van Schooten approuvait la manière dont il avait traité fon fujet [14]). Celui-ci lui répondit qu'il ferait la traduction lui-même, mais le pria de lui envoyer tout ce qui pouvait faciliter cette tâche [15]). C'eft à cette circonftance que nous devons la Pièce N°. 289, p. 414—416 du T. I, qui nous fait connaître la difpofition

[10]) En effet, la plupart de ces Exercices doivent leur origine à la correspondance de Huygens avec Carcavy et Mylon, qui commença seulement après le 20 avril 1656; voir les notes 7 et 13 de la p. 7.

[11]) Voir aux p. 50 et 52, qui suivent, le titre général de cet ouvrage et celui du „Liber V" qui précède le traité de Huygens.

[12]) Voir, pour les titres de l'édition hollandaise, les p. 51 et 53.

[13]) Sur une feuille détachée qui date probablement de ces temps, Huygens annota les mots suivants: „alea. sors. fortuna. casus. lusiones. deponavit. certare. sibi sumere. qui ter superior fuerit. qui majorem numerum jecerit. senarium jacere. jactus. contendere".

[14]) „Ecce tibi quæ de aleæ ludo videre desiderabas, sed vernaculo sermone conscripta, quod necessariò mihi faciendum fuit, quum vocabulis latinis destituerer. Sed absoluto opusculo pleraque reperi, adeo ut si opus fuerit omnia nunc latine reddere me posse arbitror. Prius tamen hæc uti sunt tibi exhibenda credidi ut videas nunquid eo ordine quo hic digesta sunt totidemque verbis, an alia ratione, concinnata operi tuo accedere velis; et an omnia satis dilucidè sint explicata"; voir la lettre du 20 avril 1656, p. 404—405 du T. I.

[15]) „Quoniam autem opere absoluto plæraque à Te reperta dicis, quæ si opus exigeret nullo negotio eadem Latinè reddere possent, optarem, ut Latinè hæc mihi versuro, cui longè minus ista ex voto succedent atque multò futura sunt difficiliora, ea quæ idem opus facilitare ac promovere queant à Te suppeditarentur"; voir la p. 408 du T. I. Plus tard Huygens a renouvelé son offre de traduire lui-même son traité, ce que van Schooten accepta dans sa réponse du 13 juillet 1656 (p. 454 du T. I). Cela n'a pas empêché que finalement la traduction fut faite par van Schooten, comme il résulte de sa lettre du 18 mars 1657 (p. 19 du T. II) où on lit „Ecce tibi, Vir Clarissime, tractatum tuum de Ratiocinijs in aleæ ludo, à me Latinè versum".

générale du Manufcrit envoyé, le 20 avril, à van Schooten. Lorfqu'on compare les phrafes latines, fuggérées par Huygens dans cette Pièce, avec le texte latin, tel qu'il parut dans les „Exercitationes", on peut conftater que, dans fa traduction, van Schooten n'a fait qu'un ufage limité des indications de Huygens. Ajoutons que celui-ci n'était pas tout-à-fait fatisfait de cette traduction [1]); ce qui fut pour nous une raifon de plus de préférer pour notre texte la verfion hollandaife à la verfion latine, quoique cette dernière eût paru trois années plus tôt que l'autre.

En attendant la publication de fon Traité, qui n'eut lieu que l'année fuivante, Huygens devint de plus en plus anxieux de favoir fi fes folutions et fa méthode s'accordaient avec celles des mathématiciens français. Ne recevant aucune réponfe à fa lettre du 18 avril [2]) à Roberval, il s'adreffa à Mylon pour lui pofer le même problème ainfi que quelques autres plus fimples [3]). Les folutions, en partie fauffes [4]), que Mylon lui envoya ne peuvent avoir eu beaucoup d'intérêt pour lui; mais c'eft à cette occafion que, par l'intermédiaire de Mylon et de Carcavy, le problème principal parvint à la connaiffance de Fermat et de Pafcal [5]). En effet, le 22 juin 1656 [6]) Carcavy fit part à Huygens de la folution de Fermat de ce problème, laquelle fe trouvait être conforme à celle de Huygens. De plus, Fermat pofa à Huygens d'autres queftions plus difficiles [7]). Or, le même après-midi qu'il les reçoit, Huygens „trouve la folution de toutes, quant à la methode, non pas quant au calcul; qui eft fi long dans quelques unes d'elles qu'[il n'a] pas voulu s'amufer à le pourfuivre jufques au bout [8])".

---

[1]) Voir sa lettre à de Sluse du 27 juillet 1657 où on lit (p. 42 du T. II) „Schotenij librum recens editum quam primum potero tibi mittam . . . . . . Brevem quoque tractatum meum de Ratiociniis in ludo Aleæ, adjunctum videbis, sed non satis commode è lingua Belgica, qua fuerat à me conscriptus in latinam conversum". Il est vrai que Huygens avait eu en révision manuscrit de la traduction; voir la p. 8 qui suit.

[2]) Voir la p. 4.

[3]) Cette lettre de Huygens à Mylon nous manque, comme aussi la réponse de Mylon du 13 mai, mais la lettre de Huygens à Mylon du 1 juin 1656 (p. 426 du T. I) nous fait connaître suffisamment leur contenu. Il en résulte qu'outre le problème de la Prop. XIV (p. 87 du présent Tome) Huygens avait posé à Mylon des questions sur l'avantage de la primauté dans les cas où le jeu est gagné par celui qui réussit le premier à faire un coup déterminé.

[4]) Ses solutions ne sont justes que pour le cas où l'on joue avec un seul dé. Elles sont fausses pour le cas de deux dés à chances égales pour les deux joueurs, et pour le problème principal, où les chances des deux joueurs sont inégales, parce que l'un gagne quand 7 points et l'autre quand 6 points ont été amenés avec deux dés.

[5]) Voir les pp. 418 et 432—434 et quant à Pascal les pp. 439 et 492 du T. I.

[6]) Voir les p. 432—434 du T. I.

On trouvera le résultat des recherches de cet après-midi dans la lettre de Huygens à Carcavy du 6 juillet 1656 [9]), laquelle était destinée à être communiquée à Mylon, à Fermat et à Pascal [10]) afin de savoir si ce que ces deux derniers avaient trouvé était conforme à „ce qu'[il] en explique" dans cette lettre. Outre les solutions des problèmes prémentionnés, la lettre contient la Prop. III (p. 65), sur laquelle toutes ces solutions étaient fondées.

La réponse de Carcavy se fit longtemps et impatiemment [11]) attendre. Quand elle arriva, au commencement d'octobre [12]), elle apprit à Huygens que Pascal se servait de la même proposition [13]) que lui mais qu'il ne voyait pas de quelle manière celle-ci pourrait s'appliquer au problème des partis [14]) dont „le sieur Pascal n'a trouué la reigle que lors qu'un des joueurs a une partie à point, ou quand il en a deux à point". C'est sans doute par suite de cette remarque [15]) que Huygens reprit ses recherches sur ce dernier problème et qu'il écrivit, d'abord

7) C'est à ces questions que Huygens a emprunté le premier et le troisième des Exercices qu'il a joints à son ouvrage; voir les notes 2 et 4 des p. 88—89 du présent Tome.

8) Voir sa lettre à Mylon du 6 juillet 1656, p. 448 du T. I. Elle est la réponse à la lettre de Mylon du 23 juin (p. 438 du T. I), dans laquelle, sans doute, celle de Carcavy du jour précédent (p. 431 du même Tome) était incluse.

9) Voir les p. 442—446 du T. I.

10) Voir la p. 446 du T. I.

11) Voir la lettre du 27 juillet 1656 (p. 466 du T. I) à Roberval, où il prie celui-ci de s'informer pourquoi ni Mylon ni Carcavy ne lui ont répondu.

12) Voir la lettre de Carcavy du 28 septembre 1656, p. 492 du T. I.

13) Cette lettre contenait, en outre, un problème que Pascal avait posé à Fermat et que Huygens a placé parmi les Exercices à la fin de son ouvrage; voir la note 1 de la p. 90.

14) Il y avait là un malentendu. Les cas relativement simples du problème des partis, traités par Huygens, furent résolus par Pascal presqu'entièrement de la même façon que par Huygens (voir les pp. 290—292, 300 et 306—307 du T. II des Œuvres de Fermat, citées plus haut dans la note 1 de la p. 3), tandis que Fermat les résolut à l'aide de l'analyse combinatoire (voir les pp. 290, 300—305, 309 et 310—312 du même Tome). Le problème auquel Carcavy faisait allusion était bien plus difficile et plus général; il s'agissait de formuler „donné un tel nombre de parties qu'on voudra" une règle générale pour trouver ce que Pascal appelait: la valeur de la première partie, de la deuxième partie, etc.; c'est-à-dire la valeur de ce que le joueur qui avait perdu devrait payer à l'autre joueur après une telle partie dans le cas où l'on conviendrait de ne pas pousser plus loin le jeu. C'est ce problème que Pascal ne savait pas résoudre sans recourir à l'analyse combinatoire et alors seulement pour la première et la deuxième partie (voir encore les p. 292—295 du T. II des Œuvres de Fermat et consultez à propos du problème des partis les p. 21—25 du présent Avertissement).

15) Consultez encore la lettre de Huygens du 12 octobre 1656 à Carcavy (p. 505 du T. I), où on voit que Huygens avait, en effet, compris à tort que la remarque de Pascal se rapportait à tous les cas du problème des partis.

l'Appendice I (p. 92—95), destiné probablement à être communiqué à Pascal [1]), et ensuite la Prop. IX (p. 73—77) qu'il allait joindre au petit traité qu'il avait composé [2]).

Cependant on continua avec la lenteur habituelle de ces temps l'impression de l'ouvrage de van Schooten où le traité de Huygens est inséré. En mars 1657 van Schooten avertit Huygens que dans quelques semaines on en ferait à ce traité. Il lui envoia donc le manuscrit de la traduction latine pour y ajouter ce que bon lui semblerait [3]). Huygens le lui retourna [4]) avec quelques changements et quelques additions [5]), en y joignant la version latine de sa lettre à van Schooten [6]), datée du 27 avril 1657, qui précède son Traité en guise de préface.

Enfin, en août ou septembre 1657, l'impression de l'édition latine de l'ouvrage de van Schooten fut achevée [7]). L'édition hollandaise se fit attendre encore trois années, mais il nous semble inutile d'exposer ici les raisons de ce retard [8]).

Avant de passer à d'autres sujets nous voulons ajouter encore quelques mots sur l'historique du Traité „De ratiociniis in ludo aleæ" après sa publication en 1657.

Comme on le sait, plusieurs des œuvres les plus considérables de Huygens ne parurent que longtemps après leur première rédaction [9]); ce qui lui coûta la

---

[1]) Ce qui toutefois n'a pas eu lieu.

[2]) La correspondance avec les savants français sur les problèmes du jeu se continua encore pendant quelques mois par les lettres échangées entre Mylon et Huygens le 8 déc. 1656 (p. 524 du T. I), le 5 janvier 1657 (p. 1 du T. II), le 1 févr. 1657 (p. 7 du T. II) et le 7 mars 1657 (p. 8 du T. II).

[3]) Voir la lettre de van Schooten du 18 mars 1657, p. 19 du T. II.

[4]) Voir la lettre du 21 avril 1657, p. 27 du T. II.

[5]) C'est-à-dire la Prop. IX, p. 73—77 du présent Tome, et les Exercices, p. 89—91; voir les notes 9 et 10 des p. 4—5.

[6]) Cette version latine est donc la version primitive. On la trouve aux p. 59—60 du T. II. La version hollandaise de la même lettre (pp. 57—59 du présent Tome) ne fut envoyée à van Schooten que le 28 septembre 1657 (voir la p. 57 du T. II).

[7]) Voir p. e. la lettre de de Sluse du 4 septembre 1657 (p. 51 du T. II) d'où il s'ensuit que de Sluse venait de recevoir alors cette édition.

[8]) Consultez à ce propos la lettre de van Schooten du 1 octobre 1657, p. 62 du T. II.

[9]) Le Traité „De iis quæ liquido supernatant", qui contient tant de recherches intéressantes, était entièrement inédit lorsque nous l'avons reproduit au T. XI (p. 81—194) de notre publication; la „Dioptrique", rédigée en grande partie en 1653 et en 1666, ne parut, avec plusieurs autres ouvrages, qu'en 1703 comme œuvre posthume; le „Traité de la lumiere" et le „Discours de la cause de la pesanteur", publiés en 1690, existaient en manuscrit, à l'exception de quelques parties, respectivement dès 1678 et dès 1669.

priorité fur bien des points importants. Grâce à van Schooten — on doit le reconnaître — la publication du petit traité fur les probabilités ne fut pas différée. L'ouvrage fut accueilli favorablement par les contemporains [10]). Pendant plus d'un demi-fiècle (c'eft-à-dire jufqu'à la publication des ouvrages de de Monmort [11]), de de Moivre [12]), de Jacques Bernoulli[13]) et de Nicolaas Struyck [14]), il forma l'unique introduction exiftant à la théorie des probabilités. Dans cet intervalle, ou peu après, deux traductions anglaifes en parurent [15]). Enfin, Jacques

---

[10]) Carcavy, qui trouvait la méthode de Huygens „admirable", écrivit à Mylon que „Monsieur Pascal en auoit jugé comme luy" (voir la p. 1 du T. II); de Sluse appela cette œuvre de Huygens „docta, acuta, Te digna" (p. 51 du T. II); Wallis la loua dans une lettre à Van Schooten (voir la réponse de Van Schooten à la p. 833 de l'ouvrage de Wallis „De Algebra Tractatus cum variis Appendicibus. Operum mathematicorum Volumen alterum, Oxoniæ, 1693), Leibniz en parla dans ses „Meditationes" comme suit: „Christiani Hugenii ratiocinia de lusu aleæ... sunt elegans specimen ratiocinationis de gradibus probabilitatis" (Opera omnia, publiés par Dutens, vol. VI, part. I, p. 318).

[11]) „Essay d'analyse sur les jeux de hazard, seconde édition Revûe & augmentée de plusieurs Lettres. Paris, Jacques Quillau, 1713". Une première édition parut en 1708; voir l'ouvrage de Todhunter, „History of the theory of probability, Cambridge and London, Macmillan, 1865", p. 79.

[12]) „The Doctrine of Chances: or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. The second edition, Fuller, Clearer, and more Correct than the First. By A. De Moivre, fellow of the Royal Society and Member of the Royal Academy of Sciences of Berlin, London, H. Woodfall, 1738". Une première édition parut en 1718. Elle fut précédée en 1711 par un Mémoire dans les „Philosophical Transactions", p. 213—264 du T. XXVII, intitulé „De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus".

[13]) „Jacobi Bernoulli, Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal. Mathematici Celeberrimi, Ars conjectandi, Opus posthumum. Accedit Tractatus de Seriebus infinitis, Et Epistola Gallicè scripta de Ludo Pilæ reticularis. Basiliæ, Impensis Thurnisiorum, Fratrum. 1713".

[14]) „Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest, door N. S., Amsterdam, weduwe Paul Marret, 1716". Une traduction française fut récemment publiée par la Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères, établie à Amsterdam, dans l'ouvrage: „Les Œuvres de Nicolas Struyck (1687—1769) qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères, tirées des œuvres complètes et traduites du hollandais par J. A. Vollgraff, Amsterdam, 1912" (p. 1—118).

Nicolaas Struyck naquit à Amsterdam le 19 mai 1687 et y mourut le 15 mai 1769. L'ouvrage cité, trop peu connu, mérite d'être mentionné avec ceux de de Monmort, de de Moivre et de Bernoulli. Struyck en écrivit plusieurs autres sur la géographie, l'astronomie, la comptabilité et le calcul des rentes viagères. Pendant sa vie il jouit d'une grande réputation et correspondit avec beaucoup de savants étrangers. Il fut nommé, en 1749, membre de la Société Royale de Londres et, en 1755, correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.

[15]) La première, en 1692, dans l'ouvrage anonyme „Of the laws of chance", etc., attribué

Bernoulli, en compofant fon „Ars conjectandi", y inféra en entier le Traité de Huygens comme „Pars prima, complectens Tractatum Hugenii de Ratiociniis in Ludo Aleæ, cum Annotationibus Jacobi Bernoulli" [1]).

En 1665, à l'occafion d'une lettre de fon ami Johan Hudde, le futur bourgmeftre d'Amfterdam [2]), l'attention de Huygens fut dirigée à nouveau fur les problèmes concernant les jeux de hafard. Dans cette lettre [3]) Hudde lui communiqua fes folutions des Exercices II et IV, propofés par Huygens vers la fin de fon Traité [4]). En cherchant lui-même leurs folutions [5]), Huygens en trouva qui différaient de celles de Hudde; ce qu'il lui fit favoir dans fa réponfe du 4 avril 1665 [6]). En même temps, il lui pofa une nouvelle queftion, favoir: de déterminer le défavantage du joueur qui fait le premier coup quand deux joueurs jettent à tour de rôle croix ou pile à condition que celui qui amène pile doit mettre chaque fois un ducat et que celui qui jette croix prendra tout ce qui eft mis.

---

par Todhunter (History of the theory of probability, p. 48—49) à John Arbuthnot. La seconde, publiée en 1714 par W. Browne, est intitulée „Christiani Hugenii Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleæ. Or the value of all chances in games of fortune; cards, dice, wagers, lotteries, &c. mathematically demonstrated. London, S. Keimer, 1714" (Todhunter, p. 199).

[1]) Ajoutons qu'en juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire du décès de Huygens, la Direction de la Société d'assurances, mentionnée dans la note 14 de la p. 9, publia, comme N°. 690 de ses Communications (Mededeelingen van de Directie), une reproduction du Traité de Huygens dont l'exécution typographique ressemble à celle de l'édition hollandaise primitive. De plus, elle donna une traduction française de ce Traité, due à M. K. R. Gallas, aux p. 43—56 de l'ouvrage „Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas, 1898". Cette traduction nous était inconnue lorsque nous avons préparé la nôtre.

[2]) Voir sur Hudde la note 2, p. 514 du T. I; mais on doit corriger l'année de sa naissance. En effet, il naquit en avril 1628, comme cela résulte de l'article de M. D. J. Korteweg „Das Geburtsjahr von Johannes Hudde", Zeitschrift für Mathematik und Physik, T. 41, 1896, p. 22. Hudde n'avait donc qu'une année de plus que Huygens. Probablement il avait étudié les mathématiques, comme Huygens, sous la direction du professeur van Schooten.

[3]) Nous ne possédons pas cette lettre, mais la réponse que nous mentionnons quelques lignes plus bas nous en fait connaître le contenu.

[4]) Voir les p. 89—91 du présent Tome.

[5]) Voir les §§ 1—3 de l'Appendice II, p. 96—99.

[6]) Voir la p. 304 du T. V.

Cette queftion fit naître toute une férie de problèmes touchant l'avantage ou défavantage de la primauté fous des conditions variées. Plus bas nous traitons ces problèmes avec quelque détail [7]).

Quant à la divergence des folutions des Exercices II et IV, elle parut être due aux interprétations différentes données par Hudde et Huygens à ces Excercices. Comme nous le montrons dans la note 3 de la p. 88, l'Exercice II n'admet pas moins de trois interprétations, dont la première fut adoptée par Huygens [8]) et la deuxième par Hudde [9]). De même l'Exercice IV donne lieu à deux conceptions dont l'une, conduifant au réfultat des §§ 2 et 3 de l'Appendice II [10]), fut choifie par Huygens, et l'autre, aboutiffant au réfultat du § 4 du même Appendice [11]), fut admife par Hudde [12]).

En effet, les folutions de Hudde de ces problèmes étaient correctes (à part une légère erreur de calcul), et il en eft de même de fes folutions d'autres problèmes qu'on rencontre dans fa correfpondance avec Huygens [13]). Plus on étudie fes longues lettres, par trop prolixes et difficiles à comprendre à caufe des malentendus continuels qui s'élèvent entre lui et Huygens, plus on s'aperçoit de la perfpicacité de leur auteur. Quant aux méthodes dont il fe fert, il ne les expofe qu'exceptionnellement et encore en partie feulement [14]), mais les indications qu'il donne fuffifent pour conclure qu'elles ne différaient pas beaucoup de celles de Huygens [15]).

---

7) Voir les p. 31—48 de cet Avertissement.
8) Voir la p. 96 du présent Tome.
9) Voir la p. 306 du T. V. En effet, après la correction apportée par Hudde dans sa lettre du 29 juin 1665 (p. 383 du T. V), sa solution correspond entièrement à celle obtenue dans les mêmes hypothèses par Jacques Bernoulli p. 60 de son „Ars conjectandi" et par de Monmort, p. 220 de son „Essay d'analyse sur les jeux de hazard".
10) Voir les p. 97—99.
11) Voir les p. 100—101.
12) Voir la p. 307 du T. V.
13) Comparez le dernier alinéa de la p. 37.
14) Voir p. e. les pp. 413—416, 446—448, 463—471 du T. V.
15) Outre les solutions des Exercices II et IV du Traité de Huygens, et des problèmes concernant la primauté sur lesquels nous reviendrons, nous connaissons encore la solution que Hudde donna à un autre problème. On trouve cette solution aux p. 470—471 du T. V. Le problème présente une grande ressemblance avec le dernier des Exercices de Huygens (p. 91 du présent Tome), seulement, le nombre des jetons de chaque joueur est réduit de 12 à 3 et leurs chances à chaque coup sont représentées respectivement par $\frac{b}{b+c}$ et $\frac{c}{b+c}$. Comme

Nous avons à parler enſuite, en ſuivant l'ordre chronologique, de quelques applications de la théorie de la probabilité à des problèmes concernant la durée de la vie. Déjà en 1662, Moray avait fait parvenir à Huygens [1]) l'ouvrage de John Graunt „Natural and political obſervations.., made upon the Bills of Mortality" [2]), qui venait de paraître. Huygens avait beaucoup apprécié cet ouvrage, mais il ne s'occupa activement des matières qu'on y trouve traitées qu'au moment où il reçut, de ſon frère puîné Lodewijk, une lettre, datée du 22 août 1669, dans laquelle celui-ci l'informait [3]) de ce qu'il avait „fait une Table ces jours paſſez du temps qu'il reſte à vivre à des perſonnes de toute ſorte d'aage. C'eſt une conſequence" dit-il „que j'aij tiré de cette table du livre Anglois of the Bils of mortalitij, de la quelle je vous envoije icij une copie, afin que vous preniez la peine de faire un peu les meſmes ſupputations, et que nous puiſſions voir comme nos calculs s'accorderont". Or, cette copie, qu'on trouve à la p. 519 du T. VI, donne pour chaque centaine de nouveaux-nés le nombre des ſurvivants à l'âge de 6, 16, 26 ans, et ainſi de ſuite, avec des intervalles de dix années.

Dans ſa réponſe à Lodewijk, Chriſtiaan lui fait remarquer [4]) „qu'a fin que ce calcul fuſt exact il faudroit avoir une table qui marquaſt d'année en année combien il meurt des perſonnes de 100 qu'on ſuppoſe, et" pourſuit-il „il faut que vous l'ayez ſupléée par quelque moyen comme j'en ſcay pour cela [5]), ou autrement vous ne ſcauriez determiner au vray, combien doibt vivre une perſonne de 6, 16 ou 26 ans &c., et encore moins de quelque aage moyen entre ceux la. comme vous l'avez entrepris de vous et de moy. Je crois donc que vous n'en decidez qu'a peu pres" et il ajoute encore „j'ay envie de ſuppleer la table comme

---

dans cet Exercice, le jeu ne finit pas avant que tous les jetons aient passé dans une même main. Hudde trouve les espérances des joueurs respectivement égales à $\frac{b^3}{b^3+c^3}a$ et à $\frac{c^3}{b^3+c^3}a$, où a représente l'enjeu. Cette solution est correcte. Elle correspond à celle donnée par Jacques Bernoulli, p. 68—69 de son „Ars conjectandi". Comparez encore l'Appendice VI aux p. 151—155 du présent Tome.

[1]) Voir les pp. 94, 95, 130 et 149 du T. IV.

[2]) Voir, pour le titre complet, la note 7 de la p. 94 du T. IV.

[3]) Voir la p. 483 du T. VI.

[4]) Voir la p. 484 du T. VI.

[5]) Huygens fait allusion ici à la méthode graphique qu'il expose dans la pièce N°. 1778, p. 531 du T. VI. En effet, la courbe de la mortalité (ou „courbe de vie" comme il l'appelle), qu'on y trouve construite avec beaucoup de soin à l'aide des données de la petite table de Graunt, est bien la première représentation graphique de la mortalité qui ait été faite.

j'ay dit et refoudre les problemes qu'on peut propofer en cette matiere qui eft affez fubtile. Voftre methode ne fcauroit eftre la mefme que la mienne, et je feray bien aife de la voir".

Une lettre du 30 octobre 1669 [6]) nous fait connaître la méthode fuivie par Lodewijk. Il a fuppléé aux lacunes de la table de Graunt en fuppofant la mortalité conftante dans chaque intervalle de dix années. Partant de cette fuppofition il a calculé d'une manière parfaitement exacte ce qu'on appelle aujourd'hui la „vie moyenne" des perfonnes qui ont atteint l'âge donné. Toutefois, comme cela réfulte de la même lettre, Lodewijk ne s'était pas fuffifamment rendu compte de la différence qui exifte entre la vie moyenne et la vie probable; différence que Chriftiaan lui expliqua dans fa lettre du 21 novembre [7]). En même temps il promit de lui envoyer une autre fois „la ligne de vie [8]) avec la pratique d'icelle et mefme une table des vies a chafque aage d'année en année, qui ne me couftera guere" [9]).

C'eft à propos de la même lettre de Lodewijk du 30 octobre que Chriftiaan compofa la Pièce importante (p. 526—531 du T. VI) qu'il a intitulée: „En examinant le calcul de mon frere Louis." Il y met par écrit, au courant de la plume, les idées qui lui viennent pendant et après cet examen. Entre autres, il s'y pofe les problèmes fuivants (dans lefquels il s'agit toujours de la durée moyenne des temps mentionnés): „Un homme de 56 ans efpoufe une femme de 16 ans, combien peuvent ils faire eftat de vivre enfemble fans que l'un ni l'autre meure. Ou bien fi on m'avoit promis 100 francs au bout de chafque an qu'ils vivront enfemble, pour combien feroit il jufte qu'on rachetaft cette obligation [10]). Item dans combien de temps doivent ils mourir tous deux. En combien de temps

[6]) Voir les p. 515—517 du T. VI.

[7]) Voir la p. 525 du T. VI.

[8]) Voir la note 5 qui précède.

[9]) Christiaan a rempli cette promesse dans sa lettre du 28 novembre 1669 (p. 538—539 du T. VI). Cependant, au lieu de la ligne en question „qui ne sert que pour les gageures" il envoya une autre représentation graphique qui donne directement les „restes de vie de chaqu'aage".

[10]) On ne doit pas supposer toutefois que Huygens ait pensé, en posant ce problème, à la réduction des sommes à payer à leur valeur comptante. Il néglige cette même réduction quand il écrit dans sa lettre du 28 novembre: „Ce sont donc deux choses differentes que l'esperance ou la valeur de l'aage futur d'une personne, et l'aage auquel il y a egale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour regler les rentes a vie, et l'autre pour les gageures".

mourront 40 hommes de 46 ans chacun? Combien vivra le dernier de 2 personnes de 16 ans. Dans combien de temps mourra un de 2 perſonnes de 16 ans".

De ces problèmes aſſez compliqués Huygens ne réſout que l'avant-dernier [1]), le manuſcrit s'arrêtant au milieu du calcul qui doit ſervir à la ſolution du dernier. Toutefois, il eſt clair que la méthode ingénieuſe qu'il applique à ces deux problèmes aurait pu conduire, après quelques modifications évidentes, à la ſolution des autres [2]).

Il eſt vrai que Huygens a été conſulté par Hudde, en 1671, ſur la méthode ſuivie par le célèbre Penſionnaire de Hollande et de Weſt-Friſe, Johan de Witt, dans ſes calculs ſur la valeur des rentes viagères que les États de Hollande ſe propoſaient de négocier [3]). Cependant, la Correſpondance de Huygens de cette année nous apprend qu'il n'a pas pris une part active dans cette entre-

---

[1]) Dans cette solution Huygens n'emploie pas la représentation graphique qu'on trouve en regard de la p. 531 du T. VI. Il y suppose, comme Lodewijk l'avait fait, que la mortalité est constante dans les intervalles de dix ans. En admettant cette hypothèse, la solution est exacte, mais il y a dans la Pièce, où elle est reproduite, une erreur du copiste bien regrettable. En effet, on doit lire comme suit la phrase qui commence à la ligne 17 d'en bas de la p. 529 du T. VI: „Et encore 25 chances qui valent a un homme de 16 ans 29,40 ans". Voici le calcul (qu'on ne trouve pas dans la Pièce) qui explique ces 29,40 ans:

9	chances	à	15	ans	font	135
6	„	„	25	„	„	150
4	„	„	35	„	„	140
3	„	„	45	„	„	135
2	„	„	55	„	„	110
1	„	„	65	„	„	65
25						$\frac{735}{25}$ fait 29,40.

[2]) Comparez encore sa lettre du 28 novembre 1669 à Lodewijk, où on lit (p. 538—539 du T. VI), à propos des deux derniers problèmes, qu'il n'en a pas encore calculé la solution, mais qu'il voit le moyen de le faire; après quoi il ajoute: „Les aages des 2 personnes estant posez differents comme l'une de 16 ans et l'autre de 56, cela apporteroit encore quelque changement mais il n'y auroit pas grande difficultè apres qu'on auroit trouvè la solution dans les aages egaux".

[3]) Voir l'ouvrage cité dans la note 6 qui commence à la p. 59 du T. VII.

[4]) Cette Correspondance (voir les pp. 59, 95—96, 103—104 du T. VII et la p. 728 du T. X) est d'ailleurs d'un certain intérêt pour la connaissance de l'histoire des travaux de Hudde et de Johan de Witt sur les rentes viagères. C'est ce qui a été compris par la Direction de la

prise [4]). Dans sa lettre du 3 octobre [5]), datée de Paris, il s'excuse auprès de Hudde de n'avoir pu trouver plus tôt le loisir de réfléchir aux calculs des rentes viagères à cause des affaires qu'il a sur les bras, et de ne pouvoir répondre à toutes les questions qu'il lui a posées. Il se borne donc à approuver d'une façon générale les méthodes suivies par le Pensionnaire, en y comprenant notamment celle qui concerne le calcul sur 2, 3 ou plus de vies [6]).

En 1676, Huygens fut ramené à la considération de quelques problèmes du jeu par une communication de son ami Dierkens [7]). Il paraît que celui-ci s'était occupé à chercher la solution de l'un des Exercices proposés par Huygens vers la fin de son Traité [8]) et qu'il n'y avait pas réussi entièrement [9]).

C'est probablement à cette même occasion que Huygens composa l'Appendice VI (p. 151—155), daté d'août 1676, où il reprend et généralise la solution du dernier de ces Exercices; solution qu'il ajouta à l'énoncé du problème sans

---

Société néerlandaise des assurances sur la vie. Dans ses „Communications" (voir la note 1 de la p. 10) elle a reproduit, en 1896, aux N°s. 734 et 754, les passages de cette Correspondance qui concernent le calcul des rentes viagères; à l'exception toutefois du contenu de la lettre du 2 octobre 1671 qui ne fut découverte que vers 1905 dans une collection privée (voir la note 1 de la p. 725 du T. X). Dans ses „Mémoires" datant de 1898 (voir la note 1 de la p. 10) elle a publié aux p. 76—83 des traductions françaises des passages qui lui étaient connus alors.

5) Voir les p. 728—729 du T. X.

6) Avant 1896 on savait que Hudde et de Witt avaient fait des calculs sur les rentes viagères en partant des hypothèses assez arbitraires exposées par de Witt dans son „Waerdye van Lijfrenten naer proportie van Los-renten", mais on ne savait pas qu'ils avaient fait encore d'autres calculs fondés sur les données d'une vraie table de mortalité; à savoir sur celle qu'on trouve en regard de la p. 96 du T. VII. De même on ignorait qu'ils s'étaient occupés du calcul de rentes viagères sur plus d'une seule tête. Depuis, les „Communications" de la Société néerlandaise des assurances sur la vie ont répandu plus de lumière sur ce sujet; voir, outre celles mentionnées dans la note 4, la „Communication" N°. 794 de 1897 qui contient 5 lettres inédites de de Witt à Hudde dont on trouve la traduction française aux p. 20—33 des „Mémoires".

7) Voir sur Dierkens la note 1 de la p. 13 du T. VIII et sur ses relations avec Huygens la p. 415 du même Tome, la note 1 de la p. 379 du T. IX, la p. 568 et la note 4 de la p. 722 du T. X.

8) Voir les p. 89—91 du présent Tome. S'il s'agissait du dernier de ces Exercices, cela expliquerait d'autant mieux l'origine de l'Appendice VI dont nous allons parler; mais nous n'en sommes pas sûrs.

9) Voir la p. 13 du T. VIII.

faire connaître l'analyfe qui l'avait amenée. Pendant la même année, il examina la folution que Dierkens lui avait envoyée d'un problème concernant le jeu de quinquenove [1]). De plus Huygens élabora pour Dierkens les folutions, à l'aide des logarithmes, de quelques „problèmes des dés" [2]). Si dans la Prop. XI [3]) de fon Traité il s'eft borné à déterminer en combien de fois on peut accepter avec avantage de jeter deux fix avec deux dés, l'emploi des logarithmes lui permet maintenant d'étendre fes recherches aux problèmes analogues pour trois et quatre dés [4]).

Pendant fon dernier féjour à Paris, de 1678—1681, l'attention de Huygens fut attirée fur le calcul des chances dans le jeu de la Baffette [5]) alors très en vogue dans cette ville [6]). En négligeant une des complications de ce jeu [7]), il calcula dans

---

[1]) Voir les p. 14—15 du T. VIII. La solution de Dierkens est exacte, et Huygens n'a donc eu qu'à l'approuver. Pour expliquer complètement cette solution, il suffira de faire remarquer en premier lieu que le nombre 1001 pour l'enjeu a été choisi par Dierkens parce qu'il est divisible par 7, par 13 et par 11. Voici ensuite comment les coefficients $\frac{3}{7}, \frac{5}{13}, \frac{3}{11}$ ont été obtenus: prenons par exemple le premier de ces coefficients, et posons x pour l'espérance mathématique du joueur qui tient les dés et qui est supposé avoir jeté 7 points au premier coup. On a alors $x = \frac{6}{36}a + \frac{8}{36} \times 0 + \frac{22}{36}x$, puisqu'il y a 6 chances de jeter de nouveau 7 points, auquel cas le joueur gagne, 8 de jeter 5 ou 9 (ce qui le fait perdre) et 22 chances de jeter l'un des autres nombres de points après quoi le jeu continue aux mêmes conditions.

On retrouve le même problème sur le jeu de quinquenove chez de Monmort, p. 173—177 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9, et de même chez Bernoulli, p. 167—169 de son „Ars conjectandi" (voir la note 13 de la p. 9). Chez de Monmort les conditions du jeu sont un peu différentes de celles indiquées par Dierkens; la solution de Jacques Bernoulli est identique à celle de Dierkens.

[2]) Voir la Pièce N°. 2096, p. 16—18 du T. VIII et aussi l'Appendice VII, p. 156—163 du présent Tome. Cet Appendice contient les recherches de Huygens qui ont abouti à la solution qu'il communique à Dierkens dans la Pièce N°. 2096.

[3]) Voir la p. 81 du présent Tome.

[4]) Consultez encore, sur les problèmes des dés, les p. 26—28 du présent Avertissement.

[5]) Voir, pour les règles du jeu, pour autant qu'on doit les connaître afin de comprendre les calculs de Huygens, la note 3 de la p. 165.

[6]) Voici un passage que nous empruntons au Journal des Sçavans du 13 février 1679, p. 43: „Le jeu de la Bassette a fait tant de bruit cet Hyver par l'attachement avec lequel on l'a joüé à la Cour, qu'il y a peu de gens qui ne sçachent présentement ce que c'est". Le jeu paraît avoir été inventé à Venise. Il fut introduit en France vers 1675 par Justiani, ambassadeur de la République de Venise à Paris.

[7]) Celle de la „face", voir le troisième alinéa de la note 1 de la p. 168.

l'Appendice VIII [8]) l'avantage du banquier ſur les autres joueurs dans les différents cas qui peuvent ſe préſenter pendant le jeu.

Une ſolution plus complète fut donnée, ſans analyse ni démonſtration, par Sauveur [9]) dans le Journal des Sçavans du 13 février 1679 [10]). Pour les cas traités par Huygens les deux ſolutions ſont identiques entre elles et à celle publiée plus tard, en 1713, dans l'„Ars conjectandi" de Jacques Bernoulli [11]), mais il paraît que Huygens ne connaiſſait pas l'article de Sauveur lorſqu'il fit ſes calculs [12]).

En outre, de Monmort [13]), Jean Bernoulli [14]), frère de Jacques, et leur neveu Nicolas Bernoulli [15]), de Moivre [16]) et Struyck [17]) ſe ſont occupés des chances du banquier dans ce même jeu de la Baſſette, mais les cas qu'ils ont traités ſont différents de ceux ſuppoſés par Huygens.

Enfin, en 1688, nous ignorons à quelle occaſion, Huygens s'occupa pour la dernière fois de quelques problèmes de jeu.

On en trouve les énoncés aux pp. 169, 172, 173 et 178 de l'Appendice IX. Dans les deux premiers paragraphes (p. 169—173) de cet Appendice on voit échouer ſes premières tentatives de réſoudre le problème qu'il s'y poſe. Au § 3, p. 173—175, il ſimplifie le problème et il réuſſit facilement à le réſoudre ſous cette nouvelle forme. Au § 4 (p. 176) il reprend le problème principal, qu'il réduit à

8) Voir les p. 164—168 du présent Tome.

9) Joseph Sauveur naquit à la Flèche en 1653 et mourut à Paris en 1716. Il était membre de l'Académie des Sciences; il est surtout connu par ses travaux sur la théorie des sons harmoniques.

10) Voir les p. 44—52 du T. 7 de ce Journal.

11) Voir la première des „Tabellæ" de la p. 195 de l'„Ars conjectandi". Afin de comparer les résultats de Huygens à ceux de Sauveur et de Jacques Bernoulli, on doit poser dans les formules de Huygens $r = 2n$.

12) Voir la note 1 de la p. 168 du présent Tome.

13) Voir les p. 144—156 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9.

14) Voir, à la p. 287 de l'ouvrage de de Monmort, la lettre du 17 mars 1710 de Jean Bernoulli à de Monmort.

15) Voir, aux p. 302—303 de l'ouvrage de de Monmort, les dernières remarques de Nicolas Bernoulli.

16) Voir les p. 57—65 de l'ouvrage cité dans la note 12 de la p. 9.

17) Voir la p. 107 de l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9.

la fommation d'une fuite infinie. Cette fuite eft de la même nature que celles dont Huygens avait trouvé les fommes en 1665 lors de fa Correfpondance avec Hudde [1]). Cependant il n'a pas achevé la folution du problème, du moins dans les manufcrits que nous connaiffons, mais il eft facile d'arriver à fa folution exacte par la voie fuivie par Huygens en effectuant, après y avoir appliqué quelques corrections indiquées par lui-même, la fommation de la fuite à laquelle il s'eft arrêté [2]). Enfin dans le dernier paragraphe de l'Appendice la folution d'un problème analogue eft interrompue également après avoir été réduite à la fommation d'une fuite infinie du même genre [3]).

Ajoutons que dans le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 179 nous avons donné une folution générale qui s'applique à tous les problèmes dont il eft queftion dans l'Appendice IX.

Point de départ de Huygens. Son théorème fondamental. Sa méthode de réfolution des problèmes du calcul des probabilités, fuivie exclufivement jufque dans fes dernières recherches.

Le calcul des probabilités eft une fcience de mathématiques appliquées. Afin de pouvoir traiter une telle fcience fous la forme que Huygens choiffiffait de préférence dans fes premiers ouvrages, il fallait donc commencer, à l'exemple d'Archimède [4]), par formuler, comme fupplément aux poftulats purement mathématiques, une on plufieurs hypothèfes pouvant fervir de point de départ à la démonftration des théorèmes dont on avait befoin.

---

[1]) Voir les pp. 106, 113—114, 121—122 et 131.

[2]) Voir la note 5 de la p. 177.

[3]) Voir la p. 178 et le premier alinéa de la note 2 de la p. 179, où la sommation de la suite est effectuée.

[4]) Voir, aux p. 143—145 du Tome II de l'édition de Heiberg (citée dans la note 2 de la p. 50 du T. XI) des œuvres d'Archimède, les sept hypothèses au début du traité „De planorum æquilibriis sive de centris gravitatis planorum" et de même aux pp. 359 et 371 du Tome prémentionné les deux suppositions de l'ouvrage: „De iis, quæ in humido vehuntur"; voir aussi aux p. 93—94 de notre T. XI les trois hypothèses par lesquelles Huygens commence son traité „De iis quæ liquido supernatant".

Ce point de départ, Huygens devait le chercher lui-même; bien qu'il ne fût pas l'inventeur du calcul qu'il allait exposer. En effet, les „savants français" qui l'avaient précédé sur ce terrain „quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre" avaient „cependant caché leurs méthodes" [5]).

L'hypothèse à laquelle il s'arrêta est, en effet, un modèle de clarté et d'évidence. Il l'exprime ainsi: „dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable" [6]).

À l'aide de cette hypothèse, il démontre par un raisonnement ingénieux les Propositions I, II et III [7]) qui sont des cas particuliers du Théorème: Avoir p_1 chances d'obtenir a_1, p_2 d'obtenir a_2, etc. vaut $\frac{\Sigma pa}{\Sigma p}$ [8]).

Après avoir formulé ces Propositions, il passe immédiatement au problème des partis et aux autres problèmes qu'il se propose de résoudre. En effet, la seule méthode suivie par Huygens non seulement dans son Traité de 1657, mais aussi dans ses recherches ultérieures sur le calcul des probabilités, consiste dans une application continuelle, répétée autant de fois que le problème l'exige, de ces Propositions. Il emploie partout cette méthode, à l'exclusion de celle qui apprend à dresser, dès l'abord, à l'aide de l'analyse combinatoire, le bilan des cas favorables et défavorables à l'évènement en question. Il l'applique même dans les cas où cette derniere méthode mènerait bien plus facilement au but.

---

5) Comparez la p. 59 du présent Tome.

6) Voir la p. 61. De l'exemple qu'il fait suivre il résulte que Huygens entend par un jeu équitable: un jeu où les chances des deux joueurs sont égales. Or, il nous semble que l'expression „un jeu équitable" (dans l'édition hollandaise „rechtmatigh spel", dans l'édition latine „æquâ conditione certans") n'admettrait pas d'autre sens même si toute explication ultérieure avait manqué. Nous croyons donc que Jacques Bernoulli a tort lorsque, à la p. 5 de son „Ars conjectandi", il prétend avoir remplacé l'axiome de Huygens par un autre d'un usage plus simple et plus à la portée de tous, qu'il énonce, en italiques, comme suit: „que chacun doit attendre, ou doit être censé d'attendre, ce qu'il obtiendra infailliblement" („quod unusquisque tantundem expectet, vel expectare dicendus sit, quantum infallibiliter obtinebit"). Or, cet axiome nous semble bien moins évident que celui de Huygens. On peut même dire qu'il ne devient intelligible que par les applications que Bernoulli en a faites.

7) Voir les p. 63—67.

8) Si Huygens n'énonce pas expressément ce théorème plus général, c'est parce que les Prop. I, II, III suffisent pour la solution des problèmes dont il s'occupe dans son Traité.

Prenons, par exemple, le quatrième des Exercices du Traité de Huygens (p. 89). Le nombre total des permutations des 12 jetons du problème, dont 4 blancs et 8 noirs, eſt égal à $\frac{12!}{4!\,8!} = 5 \times 9 \times 11$. Suppoſons que A, le premier des deux joueurs, en prenne toujours les ſept premiers; le nombre des permutations qui lui ſont favorables eſt alors évidemment égal à $\frac{7!}{3!\,4!} \times \frac{5!}{1!\,4!} =$ $= 5 \times 5 \times 7$, ſa chance eſt donc répréſentée par $\frac{35}{99}$ et celle de l'autre joueur B par $\frac{64}{99}$.

Que l'on compare cette ſolution à celles du même problème que Huygens a données en 1665, telles qu'on les trouve aux § 2—4 de l'Appendice II, p. 97—99 du préſent Tome. Évidemment il était facile à ſes ſucceſſeurs immédiats: de Monmort, de Moivre, Bernoulli et Struyck [1]) de dépaſſer ſur pluſieurs points importants l'œuvre de Huygens, au moyen de l'application de l'analyſe combinatoire. Et il faut ajouter que ſes prédéceſſeurs, Fermat et Paſcal, ſe ſervaient de même avec avantage (mais comme nous le ſavons à l'inſu de Huygens) de cette analyſe pour la réſolution de quelques problèmes de jeu [2]).

Pour autant que nous le ſachions, Huygens ne s'eſt occupé qu'une ſeule fois, en 1668, de cette branche nouvelle des mathématiques, qui ſe développait pendant ſa vie par les travaux de Paſcal [3]) et de Wallis [4]). Nous reproduirons en lieu propre ces recherches de Huygens intitulées: „De combinationum mirandis".

Une autre particularité de la méthode pratiquée par Huygens, c'eſt qu'elle amène ſouvent la ſolution déſirée ſous la forme d'une ſuite infinie [5]) dans des cas où l'on peut éviter l'uſage d'une telle ſuite en utiliſant une voie différente [6]).

C'eſt à l'une de ces occaſions que Huygens apprit à ſommer la ſuite formée par

---

[1]) Voir la p. 9 du présent Tome.

[2]) Comparez la note 14 de la p. 7.

[3]) Dans son „Traité du triangle arithmétique", publié en 1665. Voir, plus loin, les notes 2 et 3 de la p. 22.

[4]) Dans son „Discourse of combinations, alternations, and aliquot parts" qu'il joignit à l'édition anglaise de 1685 de son „Algebra". On le trouve aux p. 485—529 du „Volumen alterum" de l'édition latine, citée dans la note 10 de la p. 9.

[5]) Comparez les pp. 105, 111, 119, 131, 135, 140, 176 et 178.

[6]) Voir les pp. 31—42 de cet Avertissement et les notes 2 de la p. 142 et de la p. 179.

les fractions qu'on obtient en divisant l'unité par les nombres triangulaires successifs [7]). Dans tous les autres cas il s'agit de suites de la forme $a + 2ar + 3ar^2 + + 4ar^3 + \ldots$ (où a et r sont des fractions données), dont la sommation lui réussit également [8]).

Le Problème des partis.

Le problème des partis remonte jusqu'au quinzième siècle [9]) et les savants s'en sont encore occupés de notre temps.

Laissant de côté les extensions qu'on lui a données plus tard, on peut le formuler comme suit:

Les joueurs A, B, C... jouent à qui aura gagné le premier n parties, leurs chances à chaque partie étant égales. Ils veulent cesser le jeu au moment où il leur manque respectivement $a, b, c\ldots$ parties. Dans quel rapport doivent-ils se partager l'enjeu e?

Parlons d'abord du cas de deux joueurs, A et B, et désignons par $\varphi(a,b)e$ la part de l'enjeu qui revient au joueur A et de même par $\varphi(b,a)e$ celle qui est due à B. Alors la solution du problème peut être exprimée à volonté par l'une ou l'autre des deux suites: [10])

$$(1)\quad \varphi(a,b)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b-1}\left[1+\frac{a+b-1}{1}+\frac{(a+b-1)(a+b-2)}{1.2}+ + \ldots.\frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)}\right],$$

---

7) Voir les p. 144—150.

8) Voir les pp. 106, 113—114 et 121. Comme nous l'avons indiqué aux p. 17—18, les derniers problèmes, traités par Huygens en 1688, conduisent également à des suites de cette forme sans que Huygens en achève la sommation.

9) Voir les pp. 327, 501—502, 520—521 du T. II des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" de M. Cantor (édition de 1900).

10) On trouve une démonstration de l'identité de ces deux suites à la p. 98 de l'ouvrage de Todhunter, cité dans la note 11 de la p. 9.

$$(2)\qquad \varphi(a,b)=\left(\frac{1}{2}\right)^a\left[1+a\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{a(a+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1\,.\,2\ldots(b-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}\right].$$

Après les ſolutions fauſſes de Paciuolo (1494), de Cardano (1539) et de Tartaglia (1556) [1]), les premières ſolutions exactes ne furent obtenues qu'après un intervalle de plus d'un ſiècle par Paſcal (1654), Fermat (1654) et Huygens (1656).

Parmi ces derniers ce fut Paſcal qui, en cette matière, devança de loin ſes deux rivaux. Sa ſolution, telle qu'elle parut dans ſon „Traité du triangle arithmétique" [2]), ſous l'en-tête „Uſage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en pluſieurs parties", ne diffère pas eſſentiellement de celle repréſentée par la formule (1). En effet, les termes qui ſe trouvent entre crochets dans cette formule, et qui ſont des coefficients binomiaux, correſpondent un à un aux „cellules du triangle", dont la ſomme eſt le dénominateur de la fraction qui détermine chez Paſcal la portion revenant au premier joueur.

De plus, Paſcal a donné des ſolutions plus ſimples et très intéreſſantes pour les cas $(n-1, n)$ et $(n-2, n)$. On retrouve facilement la première de ces ſolutions en remarquant que la ſuite (1) nous donne:

$$(3)\qquad \varphi(n-1,n)-\varphi(n,n-1)=\frac{1}{2^{2n-2}}\,\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots n}{1\,.\,2\ldots(n-1)}=$$
$$=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}=\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}$$

[1]) Paciuolo divise l'enjeu dans le rapport de $(n-a)$ à $(n-b)$; Cardano dans celui de $(1+2\ldots+b)$ à $(1+2+\ldots+a)$; enfin Tartaglia dans celui de $(n+b-a)$ à $(n+a-b)$; voir les pages des „Vorlesungen" citées dans la note 9 de la p. 21. Il est curieux de remarquer que, de ces trois savants, Cardano soit le seul qui ait compris, avec Pascal, Fermat et Huygens, que le nombre n des parties à gagner, dont on est convenu au commencement du jeu, doit être sans influence sur le partage à faire quand on connaît les nombres des parties qui manquent.

[2]) Ce traité ne fut publié qu'en 1665 comme œuvre posthume, mais il avait déjà été imprimé du vivant de Pascal et on sait que celui-ci l'avait envoyé à Fermat en 1654; voir à la p. 308 du T. II des „Œuvres de Fermat" la lettre du 29 août 1654 de Fermat à Pascal, où il lui parle de „Vos derniers Traités du Triangle arithmétique et de son application".

[3]) Comparez la Proposition III du Traité de Pascal, p. 265 du T. III de l'édition de Hachette des „Œuvres complètes de Blaise Pascal", Paris, 1872.

et qu'on a évidemment:

$$(4) \qquad \varphi(n-1, n) + \varphi(n, n-1) = 1 \text{ [3]}.$$

Enfuite la folution du deuxième cas fe déduit immédiatement de celle du premier cas par l'emploi de la relation:

$$(5) \qquad \varphi(n-1, n) = \frac{1}{2}\varphi(n-2, n) + \frac{1}{2}\varphi(n-1, n-1),$$

où évidemment $\varphi(n-1, n-1) = \frac{1}{2}$ [4]).

C'eft à l'aide des formules (3)—(5) qu'on arrive aifément aux réfultats qui furent communiqués à Huygens par l'intermédiaire de Carcavy dans la lettre du 28 feptembre 1656 [5]); réfultats que Pafcal avait déjà obtenu en 1654, comme le prouve fa lettre à Fermat du 29 juillet de cette année [6]).

D'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit dans la note 14 de la p. 7, Pafcal favait réfoudre de la même façon que Huygens les cas fimples du problème des partis, tandis que Fermat y appliquait l'analyfe combinatoire [7]).

Huygens, dans fon Traité, fe contente de fon côté de réfoudre quelques uns de ces cas fimples, où *a* et *b* font des nombres relativement petits [8]), et de mon trer comment on peut paffer de là à des cas de plus en plus compliqués [9]).

Parmi les premiers fucceffeurs de Huygens fur le terrain du calcul des probabilités, Struyck ne s'eft pas occupé du problème des partis; de Monmort, dans la

---

4) Comparez la Proposition IV, p. 266 de l'ouvrage cité dans la note précédente.

5) Voir la p. 493 de notre T. I. Posons $(2n-3)\,2n-5)\ldots 1 = \alpha$; $(2n-2)(2n-4)\ldots 2 = \beta$ et soit l'enjeu égal à 2β. On trouve alors $\varphi(n-1, n)e = \beta + \alpha$; $\varphi(n-2, n)e = \beta + 2\alpha$. Il faut donc quand on se sépare après la première partie que le gagnant reçoive outre sa mise une somme égale à α, et une somme 2α quand on le fait après la seconde. C'est le résultat exprimé dans la lettre de Carcavy.

6) Voir les pp. 292 et 294 du T. II des „Œuvres de Fermat".

7) Consultez encore sur les solutious de Fermat la note 3 de la p. 28.

8) Voir les Prop. V—VII (p. 69—73).

9) Voir le dernier alinéa (p. 75—76) de la Prop. IX.

première édition de 1708 de fon „Effay" [1]) et Jacques Bernoulli dans fon „Ars conjectandi" [2]) ont donné la formule (1); de Moivre a, le premier, étendu la folution au cas où les chances p et q ($p+q=1$) des joueurs A et B de gagner une partie font inégales [3]). Dans ce cas les formules (1) et (2) doivent être remplacées par les fuivantes:

$$(1_a) \qquad \varphi(a,b) = p^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1} p^{a+b-2} q + \ldots\ldots + \frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)} p^a q^{b-1}$$

$$(2_a) \qquad \varphi(a,b) = p^a \left[1 + aq + \frac{a(a+1)}{1.2} q^2 + \ldots. + \frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(b-1)} q^{b-1}\right].$$

De ces formules (1_a) et (2_a) de Moivre a donné la première dans le Mémoire de 1711, cité dans la note 3 de cette page; de Monmort y a ajouté la feconde dans l'édition de 1713 de fon „Effay" [4]).

Parmi les mathématiciens plus modernes qui fe font occupés du problème des partis nous citerons Laplace, qui a trouvé la fonction génératrice [5]) dont le développement fuivant les puiffances de fes deux variables fait connaître les valeurs de $\varphi(a, b)$, parce que ces valeurs font égales aux coefficients des termes du développement, et Meyer qui a réuffi à repréfenter $\varphi(a, b)$ à l'aide d'une intégrale définie très fimple [6]).

Dans le cas de n joueurs A_1, A_2, ... A_n, auxquels il manque refpectivement $a_1, a_2, .. a_n$ parties, on a:

---

[1]) Voir la p. 97 (Art. 173) de l'ouvrage de Todhunter.

[2]) Voir la p. 109 de l'ouvrage cité dans la note 13 de la p. 9.

[3]) Voir la p. 217 du Mémoire de 1711, cité dans la note 12 de la p. 9.

[4]) Voir la p. 245 de cette édition.

[5]) Elle prend la forme: $\frac{t_2(1-qt_2)}{(1-t_2)(1-pt_1-qt_2)}$, $\varphi(a,b)$ étant égal au coefficient du terme contenant $t_1{}^a t_2{}^b$; voir la p. 625 du T. VII des „Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1886".

$$(6)\quad \varphi(a_1, a_2 \ldots a_n) = \sum \frac{\Gamma(a_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)}{\Gamma(u_2 + 1)\Gamma(u_3 + 1)\ldots\Gamma(u_n + 1)} p_1^{a_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ repréſentent les probabilités que les joueurs ont de gagner une partie et où la ſommation doit être étendue à toutes les valeurs entières de u_2, $u_3, \ldots, u_n$ pour leſquelles $0 \leqq u_m \leqq a_m - 1$ [7]).

Déja Paciuolo (1494) s'était occupé du cas de trois joueurs [8]). Paſcal, Fermat et Huygens ſavaient calculer (en ſuppoſant $p_1 = p_2 = p_3$) pour chaque cas particulier les eſpérances mathématiques des joueurs; Paſcal et Huygens en réduiſant la ſolution du cas donné à celle de cas plus ſimples [9]); Fermat en appliquant l'analyſe combinatoire [10]). C'eſt en ſe ſervant de cette dernière méthode que de Moivre découvrit le premier une règle générale dont l'application ne diffère point de l'emploi de la formule (6) [11]).

Ajoutons enfin que Laplace [12]) et Meyer [13]) ont ſu généraliſer leurs ſolutions que nous venons de mentionner, de ſorte qu'elles deviennent applicables au cas de n joueurs.

---

[6]) Voir la p. 69 de l'ouvrage: „Cours de calcul des probabilités fait à l'Université de Liège de 1849 à 1857 par A. Meyer, publié sur les manuscrits de l'auteur par F. Folie. Bruxelles, F. Hayez, 1874". On a $\varphi(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^p x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$.

[7]) Ainsi p. e. dans le cas $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3$ on doit sommer les six termes qu'on obtient en posant successivement $u_2 = 0$, $u_3 = 0$; $u_2 = 0$, $u_3 = 1$; $u_2 = 0$, $u_3 = 2$; $u_2 = 1$, $u_3 = 0$; $u_2 = 1, u_3 = 1$; $u_2 = 1, u_3 = 2$. On sait qu'on a $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 1$ pour n entier et plus grand que l'unité.

[8]) Paciuolo se contenta de généraliser sa solution inexacte du cas de deux joueurs; comparez la note 1 de la p. 22.

[9]) Voir, quant à Pascal les pp. 300—301, 306 et 307 du Tome II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3, et quant à Huygens les p. 73—77 du présent Tome.

[10]) Voir au T. II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3 les pp. 302—306 et 310—312.

[11]) Voir les p. 191—192 (Problem LXIX) de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 12 de la p. 9.

[12]) Voici, dans notre notation, la fonction génératrice généralisée telle qu'on la trouve à la p. 642 du T. VII de l'ouvrage cité dans la note 5 de la p. 24:

$$\frac{t_2}{1-t_2} \cdot \frac{t_3}{1-t_3} \cdots \frac{t_n}{1-t_n} \cdot \frac{1 - p_2 t_2 - p_3 t_3 \ldots - p_n t_n}{1 - p_1 t_1 - p_2 t_2 \ldots\ldots - p_n t_n},$$

$\varphi(a_1, a_2 \ldots a_n)$ étant égal au coefficient du terme $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \ldots t_n^{a_n}$.

[13]) Dans nos notations le résultat obtenu par Meyer s'écrit:

Les Problèmes des dés.

Le 29 juillet 1654 Pafcal écrivit à Fermat [1]: „J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plufieurs perfonnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui eft celui qui m'a propofé ces queftions, et auffi M. de Roberval; mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la jufte valeur des parties [2]) ni de biais pour y arriver, de forte que je me trouvais feul qui euffe connu cette proportion."

Pafcal avait en vue le problème des dés tel qu'il fut formulé par de Méré. Pour celui-ci il s'agiffait de favoir en combien de coups on peut entreprendre avec avantage de jeter deux fix avec deux dés, mais l'extenfion au cas de n dés, et le problème plus général de déterminer en combien de coups on peut gager d'amener un événement quelconque dont la probabilité à chaque coup eft égal à p, ne préfentent non plus aucune difficulté, pourvu qu'on y emploie le calcul des logarithmes.

Huygens l'a montré lui-même dans la Pièce de 1676, deftinée à Dierkens [3]), où

$$\varphi(a_1, a_2 \ldots a_n) = \frac{p_1^{a_1}\,\Gamma(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{\Gamma(a_1).\,\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_n)}\int_0^\infty \ldots$$

$$\ldots\int_0^\infty \frac{(x_2+p_2)^{a_2-1}(x_3+p_3)^{a_3-1}\ldots(x_n+p_n)^{a_n-1}}{(1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^{a_1+a_2+\ldots a_n}}\,dx_2\,dx_3\ldots dx_n.$$

Après avoir développé suivant les puissances de $p_2 \ldots p_n$ le numérateur de la fraction qui se trouve sous le signe d'intégration, on calcule facilement les termes qu'on obtient à l'aide de la formule:

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{x_2^{\nu_2}\,x_3^{\nu_3}\ldots x_n^{\nu_n}}{(1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^{\mu}}\,dx_2\,dx_3\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu_2+1)\,\Gamma(\nu_3+1)\ldots\Gamma(\nu_n+1)\,\Gamma(\mu-\nu_2-\nu_3\ldots-\nu_n-n+1)}{\Gamma(\mu)},$$

où $\nu_2, \nu_3 \ldots\ldots \nu_n$ et $\nu_2 - \nu_3 \ldots - \nu_n - n$ doivent être des nombres entiers $\leqq 0$; voir les p. 72 et 73 de l'ouvrage cité dans la note 6 de la p. 25.

[1]) Voir la p. 290 du Tome II des „Œuvres de Fermat", citées dans la note 1 de la p. 3.

[2]) Il s'agit du problème des partis.

[3]) Voir, sur cette Pièce, la p. 16 de cet Avertissement.

il obtient par un raifonnement très fimple une folution qui, appliquée au probleme général, confifte dans la détermination du plus petit nombre entier excédant le quotient de log 2 par log $(1-p)$ [4]). Pourquoi donc Huygens s'eft-il borné dans fon Traité de 1657 aux cas d'un feul et de deux dés [5]) et n'y a-t-il fu réfoudre le problème dans ce dernier cas que par des calculs qui doivent avoir été affez pénibles?

Il eft vrai que le calcul des logarithmes ne femble pas avoir fait partie du cours profeffé par van Schooten [6]) et qu'on n'en rencontre dans les manufcrits de Huygens aucune trace avant 1661, tandis qu'alors ce calcul eft approché par lui du côté géométrique en connection avec la quadrature de l'hyperbole [7]). Toutefois il femble inadmiffible que Huygens n'ait pas pris connaiffance avant 1657 d'une branche fi importante des mathématiques, fans doute bien connue en Hollande par les travaux de Vlack [8]). En effet, la réponfe à la queftion que nous avons pofée eft à la fois plus fimple et plus curieufe. C'eft que Huygens avait attaqué en 1656 le problème du côté le moins acceffible. Au lieu de confidérer dès l'abord l'efpérance mathématique de celui qui donne à jeter, il avait commencé par s'occuper des chances plus compliquées de celui qui jette les dés, de forte qu'il ne s'était pas aperçu que l'efpérance du premier peut être repréfentée par l'expreffion $\left(\frac{6^n-1}{6^n}\right)^m a$, où a eft l'enjeu, n le nombre des dés avec lefquels on doit jeter n fix, et m le nombre des coups dont on eft convenu.

L'exactitude de cette explication eft prouvée indubitablement par l'Appendice VII de 1676, p. 156—163 du préfent Tome. On y voit dans quelles circonftances Huygens découvrit enfin la fimplification qu'on obtient en s'occupant en premier lieu des chances du „contra certans", comme Huygens l'appelle [9]).

---

4) On trouve cette même solution à la p. 231 de l'ouvrage de de Monmort cité dans la note 11 de la p. 9, à la p. 219 du Mémoire de de Moivre cité dans la note 12 de la p. 9 et à la p. 32 de l'„Ars conjectandi" de Jacques Bernoulli.

5) Voir les Prop. X et XI, p. 79—83 du présent Tome.

6) Voir sur ce cours les p. 7—20 du T. XI.

7) Voir la Pièce d'août 1661, intitulée „Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos", qui se trouve aux p. 18—19 du Manuscrit B et que nous reproduirons en lieu propre.

8) Sa „Trigonometria Artificialis, sive Magnus Canon Triangulorum Logarithmus" parut en 1633, chez Rammazeyn à Gouda.

9) Voir la note 5 de la p. 161.

D'ailleurs la Pièce deſtinée à Dierkens, dont nous avons déjà parlé [1]), nous apprend comment Huygens a profité auſſitôt de cette découverte.

Un autre problème des dés, traité par Huygens dans la Prop. XII [2]), à ſavoir „Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 ſix du premier coup", n'admet pas de ſolution auſſi ſimple que celui que nous venons de conſidérer. Comme Huygens l'a remarqué il eſt équivalent „à la queſtion de ſavoir en combien de coups d'un ſeul dé l'on peut compter jeter deux fois un 6".

Suppoſons plus généralement qu'il s'agiſſe d'un événement dont la probabilité à chaque coup eſt égale à p et qu'on veuille connaître la probabilité qu'il ſe produiſe au moins m fois en n coups.

Cette probabilité eſt repréſentée par la ſomme des $(n-m+1)$ premiers termes du développement de $(p+q)^n$, où $q = 1-p$; la probabilité complémentaire eſt donnée par les m derniers termes du même développement [3]). Pour réſoudre le problème poſé par Huygens il faut donc chercher le plus petit nombre entier pour lequel:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{5}{6} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3}{1.2\ldots(n-2)}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} > \frac{1}{2}$$

ou bien déduire ce même nombre à l'aide de la relation:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

Il eſt évident que c'eſt la ſeconde formule qui mène le plus facilement au but déſiré. Or, le calcul effectué par Huygens correſpond à l'emploi de la première.

---

[1]) Voir la p. 16.

[2]) Voir les p. 83—85.

[3]) C'est la solution obtenue par Bernoulli, p. 38—43 de son „Ars conjectandi". Évidemment elle peut s'écrire sous la forme de la formule (1_a) de la p. 24. Or, de Moivre donne à la p. 13 de sa „Doctrine of chances" (voir la note 12 de la p. 9) une solution qui correspond à la formule (2_a) de la même p. 24. En effet, le probléme que nous traitons ici, ne diffère pas essentiellement du problème des partis auquel se rapportent ces deux formules. Afin de le montrer, soient m et $n—m$ les nombres des parties qui manquent encore aux joueurs A et B

Les Exercices propofés aux lecteurs du Traité de 1657.

Les Exercices qu'on trouve vers la fin du Traité de 1657 [4]) n'ont pas manqué le but „de laiffer quelque chofe à chercher" aux „lecteurs, afin que cela leur fervît d'exercice et de paffe-temps" [5]). En effet, parmi les favants qui fe font occupés à les réfoudre: Hudde [6]), Spinoza [7]), de Mon-

---

p la probabilité à chaque partie qu'elle sera gagnée par A, q la probabilité complémentaire, c'est-à-dire celle que B la gagne. Supposons de plus, comme Fermat l'avait déjà fait pour obtenir sa solution du problème des partis (voir les pp. 301—307 et 310—311 du T. II des Œuvres de Fermat), qu'on convienne de jouer en tout cas $n-1$ parties, même si le jeu était décidé plus tôt, c'est-à-dire même si l'un des joueurs avait gagné avant la $n-1^{\text{ième}}$ partie celles qui lui manquent. Lorsque m, ou plus que m, de ces $n-1$ parties ont fini à l'avantage de A, il est évident qu'il a gagné le jeu puisqu'il a pu compléter le nombre de ses parties gagnées, sans que B dans les $n-m-1$ parties restantes ait pu gagner celles qui lui manquaient. Lorsque, au contraire, A a gagné moins que m parties, B a gagné le jeu. La probabilité que le jeu soit gagné par A est donc la même que celle qu'un événement de la probabilité p arrive m, ou plus que m fois, en $n-1$ épreuves.

4) Voir les p. 89—81.

5) Comparez la p. 59.

6) Voir pour le deuxième Exercice les p. 304—307 et 382—383 du T. V et la note 3 de la p. 88; pour le quatrième les pp. 304 et 307 du T. V et les notes 1 et 4 de la p. 100; et enfin pour le cinquième les p. 470—471 du T. V.

7) On trouve la solution de Spinoza du premier Exercice dans le traité „Reeckening van kanssen" [Calcul des chances], qui probablement fut publié en combinaison avec sa „Stelkonstige reeckening van den regenboog" [Calcul algébrique de l'arc-en-ciel]. Ces deux petits traités étant devenus très rares, Bierens de Haan en fit une réimpression (Leiden, Muré frères, 1884). Le premier traité fut reproduit de même aux p. 521—524 de l'ouvrage „Benedicti de Spinoza Opera quotquot reperta sunt. Recognoverunt J. van Vloten et J. P. N. Land. Volumen posterius. Hagæ Comitum apud Martinum Nyhoff. 1883.

Puisque la solution de Spinoza n'a paru jusqu'ici, pour autant que nous le sachions, qu'en hollandais nous en donnons ci-après une traduction française:

„Premier Problème.

A et B jouent l'un contre l'autre avec 2 dés à la condition suivante: A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un seul coup; ensuite B 2 coups l'un après l'autre; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ait gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B. Réponse: comme 10355 *est à* 12276.

Afin de répondre à cette question, je la divise, d'après la seconde règle de l'Art de penser du Sieur Descartes" [voir le „Discours de la methode", p. 18 du T. VI des Œuvres de

mort [1]), de Moivre [2]), Jacques Bernoulli [3]) et Struyck [4]), on rencontre quelques noms des plus illuſtres. Si donc ces problèmes, avec les généralisations auxquelles ils conduiſent naturellement, ont exercé une influence inconteſtable ſur le développement du calcul des probabilités, Huygens en doit partager l'honneur avec Fermat et Paſcal qui lui avaient propoſé reſpectivement, Fermat le premier et le troiſième, Paſcal le dernier des cinq Exercices [5]).

Pour des informations plus détaillées ſur chaque Exercice en particulier nous préférons renvoyer le lecteur aux notes des p. 88—91.

Descartes, publiées par Charles Adam & Paul Tannery, 1902] „en ces deux Propositions.

PREMIÈRE PROPOSITION.

B et A jouent l'un contre l'autre avec 2 dés à cette condition, que B gagnera s'il jette 7 points et A s'il en jette 6, pourvu que chacun fasse deux coups consécutifs, et que B jette le premier. Leurs chances sont B $\frac{14256}{22631}$, *A* $\frac{8375}{22631}$.

ANALYSE ET DÉMONSTRATION.

Soit x la valeur de la chance de A, et que ce qu'on a mis, ou l'enjeu, soit appelé a, alors la chance de B vaut donc $a - x$. Il paraît de même que, dans cette supposition, chaque fois que le tour de B revient la chance de A sera de nouveau x, mais toutes les fois qu'il est le tour de A de jeter, sa chance doit être plus grande. Désignons par y ce que cette chance vaut alors. Puisque donc B doit jeter le premier et que 6 coups de 2 dés, parmi les 36 qu'il y a en tout, lui peuvent donner 7 points, on a trouvé que sur les deux fois où il lui est permis de jeter il a (après réduction du rapport) 11 chances à a, ou de gagner, et 25 qui lui font manquer, à savoir, qui font revenir le tour de A" [on trouve en effet 11 : 25 pour le rapport des chances en remarquant que B a 6×36 chances de gagner au premier coup et 30×6 de gagner au second coup, le nombre total des chances étant 36×36]. „Par conséquent A, lorsque B commence à jeter, a 11 chances à o, ou de perdre, et 25 chances d'avoir y, c'est-à-dire que ce sera son tour de jeter. Cela vaut donc à A $\frac{25y}{36}$, mais puisqu'on a supposé que la chance de A vaut x au commencement, on a donc $\frac{25y}{36} \infty x$, et par suite $y \infty \frac{36x}{25}$. Afin de trouver la valeur de y encore d'une autre façon, il est sûr que lorsque A devra jeter il a 5 chances à a, ou de gagner, parce qu'il y a 5 chances des 36 qui lui peuvent donner 6 points; tout bien compté on a constaté que, dans deux coups, A a 335 chances à a, et 961 qui font revenir le tour de B, c'est-à-dire qui lui donnent x. Cela vaut $\frac{335a + 961x}{1296}$. Comme cela doit être $\infty\, y$ et qu'on a trouvé plus haut $\frac{36x}{25} \infty y$, il faut donc que $\frac{335a + 961x}{1296}$ soit égal à $\frac{36x}{25}$, d'où l'on déduit $x \infty \frac{8375a}{22631}$, ce qui est la chance de A, et par

Problèmes échangés entre Huygens et Hudde ſur l'avantage ou le déſavantage de la primauté.

Cas où l'enjeu, quelle qu'en ſoit la grandeur, peut être gagné d'un ſeul coup.

Afin de découvrir le fil qui nous conduira à travers le dédale des problèmes que Huygens et Hudde ſe ſont propoſés en 1665, et des malentendus qui en ſont réſultés, nous commencerons par réſoudre le problème qui ſuit:

A et B jettent à tour de rôle. Lorſque le coup leur eſt favorable ils prennent tout ce qui ſe trouve à l'enjeu et la partie eſt finie; s'il leur eſt défavorable ils ajoutent

suite la chance de B vaudra $\frac{14256}{22631}a$. La chance de A est donc à celle de B comme 8375 à 14256 et réciproquement celle de B à A comme 14256 à 8375. Ce qu'il fallait démontrer.

DEUXIÈME PROPOSITION.

A joue contre B comme il est décrit dans le problème. Leurs chances sont $A\,\frac{10355}{22631}$, $B\,\frac{12276}{22631}$.

ANALYSE ET DÉMONSTRATION.

Puisque A a 5 chances à a, ou bien de gagner, et 31 chances de manquer, c'est-à-dire de se trouver dans le cas de la première proposition, ce que lui vaut $\frac{8375}{22631}a$: il a donc 5 chances à $\frac{22631}{22631}a$ (afin que je réduise tout au même dénominateur), et 31 chances à $\frac{8375}{22631}a$. Il vient" [nous supprimons quelques calculs très simples] „10355 pour la chance de A. 12276 pour la chance de B. Ce qu'il fallait démontrer."

[1]) Voir dans l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9, les p. 216—223 de la „Quatrième Partie. Où l'on donne la solution de divers Problêmes sur le hazard, & en particulier des cinq Problêmes proposés en l'année 1657 par Monsieur Huygens".

[2]) De Moivre a donné des solutions du deuxième, du quatrième et du cinquième Exercice; voir, dans les ouvrages cités dans la note 12 de la p. 9, pour le deuxième Exercice les p. 229—232 de son Mémoire de 1711 et les pp. 49—51 et 55—56 de son Traité (édition de 1738), pour le quatrième les p. 235—236 du Mémoire, pour le cinquième la p. 227 du Mémoire, et les p. 44—47 du Traité.

[3]) Voir les p. 49—71 de la „Pars prima" de son „Ars conjectandi" et encore pour le troisième et le quatrième Exercice les p. 144—146.

[4]) Voir, dans l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9, les p. 32—45 où l'on trouve les solutions des cinq Exercices, et encore sur le premier Exercice la p. 62, sur le deuxième les p. 91—92 et sur le cinquième la p. 110.

[5]) Comparez les notes 7 et 13 de la p. 7.

un ducat à l'enjeu. Soit α la probabilité, quand c'eſt le tour de A de jeter, que le coup lui ſoit favorable et α' la probabilité complémentaire $(\alpha+\alpha'=1)$; ſoient β et β' les probabilités correſpondantes dans le cas de B. Suppoſons que les joueurs ſe ſéparent à un inſtant où l'enjeu eſt monté à n ducats, comment doivent-ils ſe partager cet enjeu, 1°. dans le cas où c'eſt le tour de A de jeter 2°. dans le cas où c'eſt le tour de B?

Repréſentons par $\varphi(n)$ la part qui revient à A dans le premier cas, par $\psi(n)$ celle qui eſt due à B dans le ſecond cas.

On a alors ſuivant les règles du jeu:

$$\varphi(n)=\alpha n+\alpha'(n-\psi(n+1))\ ^{1)}, \tag{3}$$

$$\psi(n)=\beta n+\beta'(n-\varphi(n+1)). \tag{4}$$

Or, on peut conſidérer la part de A comme la ſomme de deux parties dont l'une ſe rapporte à ſa chance, au cas où le jeu eût été continué, d'obtenir l'enjeu actuel, et l'autre à ſes chances de gagner dans ce cas, outre l'enjeu actuel, les ducats ajoutés par ſon adverſaire pendant la continuation du jeu ou bien de perdre ceux qu'il y aurait dû ajouter lui-même.

Évidemment la première de ces parties eſt proportionnelle à l'enjeu n, tandis que l'autre eſt une quantité conſtante puiſque la chance que le jeu finira ou ne finira pas par un coup donné eſt indépendante de la grandeur de l'enjeu.

On peut donc poſer:

$$\varphi(n)=a_1 n+a_2, \tag{5}$$

et de même:

$$\psi(n)=b_1 n+b_2. \tag{6}$$

Or, la ſubſtitution de ſes expreſſions dans les équations (3) et (4) nous fournit, puiſque a_1, a_2, b_1 et b_2 ſont indépendants de n:

$$a_1=1-\alpha' b_1;\ b_1=1-\beta' a_1;\ a_2=-\alpha'(b_1+b_2);\ b_2=-\beta'(a_1+a_2);$$

d'où il s'enſuit:

$$a_1=\frac{\alpha}{1-\alpha'\beta'};\ b_1=\frac{\beta}{1-\alpha'\beta'};\ a_2=\frac{\alpha'(\alpha\beta'-\beta)}{(1-\alpha'\beta')^2};\ b_2=\frac{\beta'(\alpha'\beta-\alpha)}{(1-\alpha'\beta')^2},$$

[1]) Ici et dans les formules qui suivent l'unité repréſente un ducat.

et par conséquent :

(7) $$\varphi(n)=\frac{\alpha n}{1-\alpha'\beta'}+\frac{\alpha'(\alpha\beta'-\beta)}{(1-\alpha'\beta')^2}\ ^{2)},$$

(8) $$\psi(n)=\frac{\beta n}{1-\alpha'\beta'}+\frac{\beta'(\alpha'\beta-\alpha)}{(1-\alpha'\beta')^2}.$$

On trouve donc p. e. :

(9) $$\varphi(1)=\frac{\alpha-\alpha'\beta}{(1-\alpha'\beta')^2}.$$

(10) $$\psi(1)=\frac{\beta-\alpha\beta'}{(1-\alpha'\beta')^2},$$

et l'on a dans le cas $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=\frac{1}{2}$:

(11) $$\varphi_1(n)=\psi_1(n)=\frac{2}{3}n-\frac{2}{9}.$$

Prenons maintenant le premier problème sur le désavantage de la primauté, tel qu'il fut proposé par Huygens à Hudde dans sa lettre du 4 avril 1665 [3]). Ce problème avait été formulé par Huygens comme suit : [4])

„A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, sous condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat, mais que celui qui jette croix prendra tout ce qui

---

[2]) Voici comment cette formule peut être obtenue par une méthode qui ne diffère pas essentiellement de celle suivie par Huygens dans ce genre de problèmes. Cherchons à cet effet la somme des valeurs des chances de A pour chaque coup par lequel le jeu peut se terminer.

On trouve de cette manière:
$\varphi(n)=\alpha n-\alpha'\beta+\alpha'\beta'\alpha(n+1)-2\alpha'^2\beta'\beta+\alpha'^2\beta'^2\alpha(n+2)-3\alpha'^3\beta'^2\beta+\alpha'^3\beta'^3\alpha(n+3)+$
$+\ldots=\frac{\alpha n}{1-\alpha'\beta'}+\alpha'\beta'\alpha+2\alpha'^2\beta'^2\alpha+3\alpha'^3\beta'^3\alpha+\ldots\ldots-\alpha'\beta-2\alpha'^2\beta'\beta-3\alpha'^3\beta'^2\beta-$
$-\ldots=\frac{\alpha n}{1-\alpha'\beta'}+\frac{\alpha'\beta'\alpha}{(1-\alpha'\beta')^2}-\frac{\alpha'\beta}{(1-\alpha'\beta')^2}\Big($puisque $a+2ar+3ar^2+\ldots=$
$=a(1-r)^{-2}\Big)=\frac{\alpha n}{1-\alpha'\beta'}+\frac{\alpha'(\alpha\beta'-\beta)}{(1-\alpha'\beta')^2}.$

[3]) Voir la p. 304 du T. V.

[4]) Voir la p. 348 du T. V.

eſt mis, et A jette le premier, pendant que rien n'a été mis encore. La queſtion eſt, combien A perd, quand il entre dans ce jeu, ou combien il pourrait donner à B pour pouvoir en finir?"

Or, Huygens en poſant cette queſtion avait ſous-entendu que „le jeu ne devait pas finir avant que quelque choſe n'eût été mis de part ou d'autre" [1]).

Dans ce cas on a pour calculer la perte p de A:

$$p = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \psi_1(1)) = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\psi_1(1),$$

c'eſt-à-dire, en appliquant la formule (11):

$$p = \frac{1}{3}\psi_1(1) = \frac{4}{27};$$

réſultat qui fut, en effet, obtenu par Huygens [2]).

Hudde, au contraire, avait compris, que ſi A jetait croix du premier coup le jeu ſerait fini. Dans cette hypothèſe on a:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \psi_1(1)) = \frac{1}{2}\psi_1(1) = \frac{2}{9};$$

réſultat que Hudde communiqua à Huygens dans ſa lettre du 5 mai [3]) (p. 350 du T. V).

Dans cette dernière lettre Hudde ne ſe borna pas à indiquer ſa ſolution du problème que nous venons de conſidérer, mais il poſa de ſon côté la queſtion ſuivante [4]):

---

[1]) Voir la p. 422 du T. V.

[2]) Comparez la p. 318 du T. V et consultez, pour connaître la voie suivie par Huygens dans la solution du problème, les p. 116—122 du présent Tome.

[3]) Il est vrai que Hudde avait commencé par trouver $\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{2}{9}$ (voir sa lettre du 5 avril, p. 308 du T. V) mais ce résultat avait été obtenu dans la supposition (voir les p. 349—350 du T. V) que celui qui jette pile doit mettre un ducat „mais seulement pour la 1e fois" (de sorte que l'enjeu pouvait monter au plus à deux ducats, dont l'un provenait de A et l'autre de B). Dans cette supposition la somme des valeurs des chances de A correspon-

„A et B tirent à l'aveuglette à tour de rôle. A toujours 1 de 3 jetons, desquels trois il y en a deux blancs et un noir, B de même toujours d'un certain nombre de jetons blancs et noirs dont la proportion reste invariable; sous condition que celui qui tire un jeton blanc jouira de tout ce qui est mis, mais qu'au contraire celui qui tire un noir ajoutera toujours un ducat: et A tirera le premier avant que rien n'ait été mis. On demande, lorsqu'on veut avoir des conditions équivalentes de part et d'autre, de sorte que, A commençant à tirer, il n'y ait d'avantage pour aucun des deux, quelle proportion devra se trouver entre les dits jetons blancs et noirs?"

Pour résoudre ce problème suivant l'interprétation de Huygens nous représenterons par ε_A l'espérance mathématique de A et par ε_B celle de B, lorsque c'est le tour de A de tirer et que rien n'a encore été mis.

On a donc, en employant les notations de la p. 32:

$$\varepsilon_A = -\alpha\varepsilon_B - \alpha' + \alpha'(1-\psi(1)) = -\alpha\varepsilon_B - \alpha'\psi(1),$$

$$\varepsilon_B = -\beta\varepsilon_A - \beta'\varphi(1),$$

dant aux différentes manières dont le jeu peut se terminer est représentée par la suite infinie: $0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = -\frac{1}{6}$.

Il est vrai aussi que dans sa lettre du 29 juin (p. 383 du T. V) Hudde corrige son résultat de $\frac{2}{9}$ en $\frac{4}{27}$. En effet, la conformité de ce dernier résultat de Hudde à celui de Huygens n'a pas peu contribué à prolonger le malentendu qui existait entre eux. Cependant leur accord n'était qu'apparent. Hudde, ayant cherché la cause de la divergence entre son résultat $\left(\text{de } \frac{2}{9}\right)$ et celui de Huygens $\left(\text{de } \frac{4}{27}\right)$ dans une différence d'interprétation des conditions du problème, avait réussi (comme il le raconte naïvement dans sa lettre du 21 août, p. 449—451 du T. V) à découvrir, non sans peine, „un double sens évident dans le mot *gagner*". Ce mot ne se trouvait pas dans l'énoncé du problème tel que Huygens le lui avait proposé, mais celui-ci ayant avoué (p. 422 du T. V) que cet énoncé avait été incomplet, Hudde supposait que Huygens avait oublié aussi d'y ajouter une phrase de la portée suivante: „que A en jetant croix du premier coup" gagnerait „autant qu'il perd par les conditions du jeu". De cette manière Hudde avait donné à l'énoncé en question une interprétation extrêmement forcée qui lui fournit enfin le résultat tant désiré, conforme à celui de Huygens.

Ajoutons que dans la même lettre du 21 août Hudde explique (p. 447—448 du T. V) de quelle façon il avait obtenu successivement les nombres $\frac{1}{6}$ et $\frac{2}{9}$.

[4]) Voir les p. 350—351 du T. V.

et par conſéquent:

$$\varepsilon_A = \frac{\alpha\beta'\varphi(1) - \alpha'\psi(1)}{1 - \alpha\beta}.$$

En ſubſtituant dans cette dernière formule les expreſſions que nous avons déduites pour $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ [1]), on trouve facilement (en utiliſant les relations $\alpha + \alpha' = 1$ et $\beta + \beta' = 1$):

$$(12) \qquad \varepsilon_A \text{ (interprétation de Huygens)} = \frac{-\alpha'\beta^2 + (\alpha^2 - \alpha')\beta\beta' + \alpha\beta'^2}{(1 - \alpha\beta)(1 - \alpha'\beta')^2}.$$

La condition de l'égalité des chances de A et de B au commencement du jeu exige donc que le rapport $\beta : \beta'$ entre les jetons blancs et noirs de B ſoit égal à la racine poſitive de l'équation:

$$\alpha'\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)^2 + (\alpha' - \alpha^2)\frac{\beta}{\beta'} - \alpha = 0;$$

équation qui dans le cas du problème $\left(\text{où } \alpha = \frac{2}{3}, \alpha' = \frac{1}{3}\right)$ nous donne:

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{73}.$$

Ce ſont là, en effet, les réſultats obtenus par Huygens, qu'il communiqua à Hudde dans ſes lettres du 7 juillet et du 28 juillet [2]).

Paſſons maintenant à l'interprétation de Hudde. D'après elle on a:

$$(13) \qquad \varepsilon_A \text{ (interprétation de Hudde)} = -\alpha'\psi(1) = -\frac{\alpha'(\beta - \alpha\beta')}{(1 - \alpha'\beta')^2}.$$

L'égalité des chances exige donc en général:

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha$$

---

[1]) Voir les formules (9) et (10) de la p. 33 de cet Avertissement.

[2]) Comparez les pp. 392 et 423 du T. V, et consultez quant à la méthode suivie par Huygens pour déduire ces résultats, le § 1 de l'Appendice IV (p. 108—113 du présent Tome) et le § 3 de l'Appendice V (p. 126—129 du même Tome).

Ajoutons que dans sa lettre du 10 mai (p. 352—353 du T. V) Huygens avait donné la solution fausse $\beta = \beta'$. Il la corrigea dans sa lettre du 7 juillet (p. 392 du T. V) ayant reconnu „d'avoir mis un + pour un —".

et dans le problème ſpécial propoſé par Hudde :

$$\frac{\beta}{\beta'}=\frac{2}{3};$$

réſultats qu'il annonça à Huygens dans ſa lettre du 29 juin [3]).

Voulant examiner encore d'une autre manière ſi, en effet, ſes „calculs" à lui et ceux de Hudde „ſuivaient des voies différentes", Huygens demanda à Hudde [4]) s'il trouvait, comme lui, $\frac{207}{343}$ d'un ducat pour l'avantage de A, qui fait le premier coup, dans le cas où A diſpoſe de deux jetons blancs et d'un noir et B d'un blanc et de deux noirs.

On retrouve facilement le réſultat mentionné en ſubſtituant dans la formule (12) de la p. 36 pour α, α', β et β' les valeurs $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. La même ſubſtitution appliquée à la formule (13) fournit, au contraire, $\frac{3}{49}$ d'un ducat. Sans doute ce dernier réſultat eût été indiqué par Hudde dans ſa réponſe ſi le nouveau malentendu dont nous avons parlé dans le deuxième alinéa de la note 3 de la p. 34 n'était intervenu. On peut s'en convaincre en conſultant les pp. 415—416 et 446 du T. V, où l'on voit de quelle manière Hudde avait obtenu la ſolution $\frac{9}{245}$ qu'il communiqua à Huygens dans ſa lettre du 29 juin [5]).

Ici, comme partout, les calculs et les raiſonnements de Hudde ſur les queſtions dont nous traitons étaient parfaitement exacts, les divergences entre ſes réſultats et ceux de Huygens ne provenant que des interprétations différentes qu'ils donnèrent à ces queſtions.

---

[3]) Voir les pp. 381 et 385 du T. V.
[4]) Voir sa lettre du 10 mai 1665 à la p. 353 du T. V.
[5]) Voir la p. 381 du T. V.

Voici un autre problème proposé par Huygens dans sa lettre du 10 mai[1]):

„A et B jettent à tour de rôle à croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra un ducat, mais que celui qui jette croix prendra tout ce qui est mis; et A jettera le premier. On demande combien A et B devraient mettre dès le commencement, c'est-à-dire, chacun une somme égale, pour faire que la condition de A et de B devienne la même?"

Sur ce problème la différence d'interprétation concernant l'effet du premier coup s'il était croix et que rien ne fût encore mis, ne trouvait pas de prise; par suite, les résultats obtenus par Huygens et Hudde étaient identiques.

Évidemment l'égalité des conditions des deux joueurs exige ici:

$$\varphi_1(n) = \frac{1}{2}n,$$

c'est à dire[2]):

$$\frac{2}{3}n - \frac{2}{9} = \frac{1}{2}n;\ n = \frac{4}{3};$$

il faut donc que chaque joueur commence par mettre $\frac{2}{3}$ d'un ducat.

Ce résultat fut indiqué par Hudde dans sa lettre du 29 juin[3]) et par Huygens dans la sienne du 7 juillet 1665[4]).

Un dernier problème proposé par Huygens à Hudde en 1665. La „part du diable".

Nous avons réservé une place à part au problème suivant[5]):

„A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque

---

[1]) Voir les pp. 353 et 381—382 du T. V.
[2]) Voir la formule (11) de la p. 33 de cet Avertissement.
[3]) Voir la p. 382 du T. V.

ſois un ducat ſi quelque choſe a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque choſe ait été mis, et l'on jouera juſqu'à ce que tout ait été enlevé. On demande quel eſt le déſavantage de A?"

De ce problème Huygens a élaboré une ſolution ſous la date du 15 juillet 1665[6]). Il l'a auſſi propoſé à Hudde puiſque celui-ci en a traité dans une pièce que nous avons reproduite aux p. 463—469 du T. V.

Au premier abord le problème n'a rien de bien particulier. Il ſemble même que ſa ſolution puiſſe être obtenue par un raiſonnement très ſimple[7]) que nous expoſons dans la note 2 de la p. 142 et qui évidemment a échappé à l'attention de Huygens[8]). Il y a cependant une réſerve importante à faire dont nous parlerons plus loin[9]).

Nous commençons par développer ici ce raiſonnement d'une manière un peu plus générale que nous ne le faiſons à la place précitée.

Suppoſons, à cet effet, que les joueurs A et B conviennent de ſe ſéparer à un inſtant où il y n ducats à l'enjeu, et ſoit x_n la part qui revient au joueur dont c'eſt le tour de jeter. Nous diviſons en deux périodes le jeu qui aurait eu lieu ſi les joueurs avaient continué. Nous étendons la première période juſqu'à l'inſtant où *pour la première fois* l'enjeu eſt réduit à un ſeul ducat et la ſeconde depuis cet inſtant jusqu'à la fin du jeu. Évidemment l'eſpérance mathématique correſpondant aux ducats que le joueur peut gagner ou perdre pendant la première période eſt égale à ſon eſpérance totale dans le cas où il y a $n-1$ ducats à l'enjeu, c'eſt-à-dire elle eſt égale à x_{n-1}. Quant à ſon eſpérance correſpondant à la ſeconde période, elle eſt égale à x_1 dans le cas où n eſt impair, parce que dans ce cas le tour de jeter ſera au commencement de cette période au même joueur qui a jeté lorſ-

---

4) Voir la p. 394 du T. V. Sur la méthode suivie par Huygens on peut consulter le § 4 de l'Appendice V, p. 130—132 du présent Tome.

5) Voir la p. 132 du présent Tome.

6) Voir les p. 132—150.

7) Nous devons ce raisonnement et les solutions fondées sur lui à notre collaborateur M. Fr. Schuh.

8) Comparez les p. 142—143 du présent Tome où Huygens exprime le désir de connaître une solution plus simple que celle qu'il venait d'élaborer.

9) Voir les p. 43—47 de cet Avertissement.

qu'il y avait n ducats à l'enjeu; dans le cas où n eſt pair ſon eſpérance ſera, au contraire, repréſentée par $1 - x_1$ [1]), l'unité étant égale à un ducat.

On a donc:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_1 \text{ (pour } n \text{ impair);} & (14) \\ x_n = x_{n-1} + 1 - x_1 \text{ (pour } n \text{ pair).} & (15) \end{cases}$$

Dans le cas ſpécial $n = 2$, on trouve:

$$x_2 = x_1 + 1 - x_1 = 1. \quad (16)$$

Soient maintenant, au début du jeu, ε_A l'eſpérance du joueur qui jette le premier, ε_B celle de l'autre joueur.

D'après les règles du jeu, on a: $\varepsilon_A = \frac{1}{2}\varepsilon_B - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - x_1)$, puisque A s'il jette croix ſe trouvera après ce coup dans la même ſituation que celle où B ſe trouvait au commencement du jeu. Mais, parce qu'on a $\varepsilon_A + \varepsilon_B = 0$ [1]), cette équation ſe réduit à:

$$\varepsilon_A = -\frac{1}{3}x_1. \quad (17)$$

On a de plus:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}x_2, \quad (18)$$

et, par conſéquent, à cauſe de la relation (16):

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad (19)$$

donc enfin:

$$\varepsilon_A = -\frac{1}{6}; \quad (20)$$

réſultat obtenu par Huygens [2]) et auſſi par Hudde [3]).

---

[1]) C'est-à-dire dans l'hypothèse où la somme des espérances des deux joueurs est égale à l'enjeu qu'ils ont formé. Nous aurons à revenir sur cette hypothèse dont Huygens aussi a fait usage dans sa solution (voir p. e. la p. 133 du présent Tome).

[2]) Voir les pp. 132—141.

[3]) Voir la p. 463 du T. V.

Quant aux équations (14) et (15), elles se réduisent à la seule équation: $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}$, applicable lorsque n est pair ou impair. Et l'on trouve facilement à l'aide de cette équation:

(21) $$x_n = \frac{1}{2} n$$ [4]).

Nous indiquons ci-après une autre solution ne reposant pas sur le raisonnement qui nous a fourni la valeur de x_2. Elle nous fera connaître l'artifice sur lequel la solution de Huygens est fondée.

On a d'abord comme conséquence immédiate des règles du jeu [5]):

(22) $$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n - 1 - x_{n-1}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n + 1 - x_{n+1}) =$$

$$= n - \frac{1}{2} x_{n-1} - \frac{1}{2} x_{n+1},$$

ou bien:

(23) $$x_{n+1} = 2n - x_{n-1} - 2x_n.$$

À l'aide d'une application répétée de cette dernière relation on exprime facilement x_3, x_4, x_5, etc. en fonction de x_2 et de x_1. On trouve:

(24) $$x_n = 2n - 2 - (n - 2)x_1 - (n - 1)x_2 \quad (n \text{ impair}),$$

(25) $$x_n = - n + 2 + (n - 2)x_1 + (n - 1)x_2 \quad (n \text{ pair}).$$

---

4) Ce résultat est conforme à celui formulé par Huygens dans l'avant-dernier alinéa de la p. 142. En effet, quand n est pair Huygens suppose que les joueurs ont contribué pour une même somme à l'enjeu (voir les définitions de la p. 133). L'avantage du joueur est alors égal à zéro, parce qu'on doit soustraire sa mise $\frac{1}{2}n$ de son espérance future qui, elle aussi, est égale à $\frac{1}{2}n$. Quand n est impair Huygens suppose que l'adversaire a mis un ducat de plus que le joueur en question. L'avantage de celui-ci est donc $\frac{1}{2}n$ diminué de sa mise $\frac{1}{2}(n-1)$, c'est-à-dire qu'il est égal à un demi-ducat.

5) En admettant toujours l'hypothèse formulée dans la note 1 de la p. 40.

Or, il réfulte des équations (17) et (18):

(26) $$x_1 = -3\varepsilon_A; \quad x_2 = 2 + 6\varepsilon_A.$$

Les équations (23) et (24) fe réduifent donc aux fuivantes:

(27) $$\begin{cases} x_n = -3n\varepsilon_A \ (n \text{ impair}), \\ x_n = n + 3n\varepsilon_A \ (n \text{ pair}), \end{cases}$$

que nous écrivons:

(28) $$\varepsilon_A = -\frac{x_n}{3n} \ (n \text{ impair}),$$

(29) $$\varepsilon_A = -\frac{1}{3} + \frac{x_n}{3n} \ (n \text{ pair}).$$

À l'exemple de Huygens [1]) nous raisonnons maintenant de la manière fuivante: Même fi n eft un grand nombre, les efpérances des deux joueurs ne peuvent différer que de 1 ou de 2 ducats, puisque la différence entre les chances du joueur qui jette le premier et de l'autre joueur ne peut fe faire fentir que vers la fin de la partie quand il n'y a plus qu'un petit nombre de ducats à l'enjeu.

Soit donc p cette différence. On a alors $x_n = \frac{1}{2}n \pm \frac{1}{2}p$. Subftituons cette valeur de x_n dans les équations (28) et (29) et faifons croître indéfiniment le nombre n. Ces équations amènent alors l'une et l'autre le même réfultat, favoir $\varepsilon_A = -\frac{1}{6}$.

Difons enfin quelques mots à propos de la folution de Huygens. Huygens commence par déduire deux équations qui font équivalentes à nos équations (17) et (18) [2]). Enfuite il fe fert d'une férie d'équations [3]) qui ne diffèrent pas effentiellement de celles qu'on obtient en prenant fucceffivement $n = 2$, $n = 3$, etc.

---

[1]) Voir l'alinéa qui commence en bas de la p. 139 du présent Tome.

[2]) Ce sont les équations $3a = b$ et $b = \frac{\Delta - c}{2}$ qu'on trouve à la p. 133.

[3]) Voir la p. 134.

dans l'équation (22)[4]. De cette manière Huygens réuſſit à exprimer la quantité $-a = \varepsilon_A$ à l'aide d'une ſuite qu'on peut prolonger indéfiniment[5]. Il lui faut donc prouver qu'on peut négliger le dernier terme de cette ſuite quand on la prolonge ſuffiſamment[6]. C'eſt à quoi il emploie le raiſonnement que nous venons de reproduire. Après cela il ne s'agit plus que de ſommer la ſuite en queſtion; ce qui lui réuſſit également[7].

Remarquons que cette ſolution de Huygens contraſte favorablement avec celle de Hudde. Dans la première Pièce qui ſe rapporte à cette dernière ſolution[8], Hudde n'a trouvé d'autre iſſue que d'ériger en „Corollaire" une relation qui dans nos notations s'exprime par: $x_4 - 2 = x_2 - 1$. Dans une autre Pièce[9] il tâche de prouver la relation $x_2 - 1 = 0$ par un développement en ſérie dans lequel il néglige en dernière inſtance un grand nombre de termes dont les valeurs lui ſont inconnues.

Nous avons maintenant à nous occuper de la réserve qui nous empêche d'accepter ſans diſcuſſion les ſolutions dont nous venons de traiter. Ces ſolutions ſuppoſent que la ſomme des eſpérances des deux joueurs eſt égale à l'enjeu. Or, cette hypothèse devient ici ſujette à caution parce que le jeu peut ſe prolonger indéfiniment ſans que l'enjeu ſoit jamais épuisé.

Afin de montrer la portée de cette remarque, ſuppoſons que les joueurs conviennent de donner l'enjeu à une troiſième perſonne dans le cas où cet enjeu monterait à ν ducats. Quelle eſt l'eſpérance mathématique $\varphi_C(n, \nu)$ de cette perſonne à l'inſtant où l'enjeu contient n ducats ($n < \nu$)?

On a évidemment: $\varphi_C(1, \nu) = \frac{1}{2}\varphi_C(2, \nu)$, et de même:

---

[4]) Comparez la note 1 de la p. 135.

[5]) Voir les p. 135—139.

[6]) Il s'agit du terme $-\frac{1}{32}k$ de la suite qu'on trouve à la p. 139. Or, dans la note 2 de la p. 138 nous avons indiqué la relation qui existe entre la quantité k et la différence des espérances des joueurs.

[7]) Voir la p. 140.

[8]) Voir les p. 463—465 du T. V.

[9]) Voir les p. 468—469 du T. V.

$$\varphi_C(n,\nu)=\frac{1}{2}\varphi_C(n+1,\nu)+\frac{1}{2}\varphi_C(n-1,\nu)\ \ (\text{pour } 1<n<\nu).$$

De ces relations on déduit facilement:

$$\varphi_C(n,\nu)=n\varphi_C(1,\nu)\ \ (\text{pour } 1\leqq n\leqq \nu).$$

Or, $\varphi_C(\nu,\nu)=\nu$, donc $\varphi_C(1,\nu)=1$, et par ſuite:

$$(30)\qquad \varphi_C(n,\nu)=n\ \ (\text{pour } 1\leqq n\leqq \nu).$$

Soit maintenant ε_C l'eſpérance de la troiſième perſonne au début du jeu, rien n'étant encore mis. On a:

$$\varepsilon_C=\frac{1}{2}\varepsilon_C+\frac{1}{2}\varphi_C(1,\nu)=\frac{1}{2}\varepsilon_C+\frac{1}{2},$$

et, par conſéquent:

$$(31)\qquad \varepsilon_C=1.$$

L'eſpérance de la troiſième perſonne eſt donc indépendante du nombre ν. Elle eſt égale à un ducat au commencement du jeu et elle augmente ou diminue enſuite régulièrement avec l'enjeu auquel elle reſte toujours égale.

Quelle eſt la probabilité que l'enjeu après être monté à n ducats atteigne la ſomme de ν ducats?

On obtient cette probabilité en diviſant l'eſpérance de la troiſième perſonne par la ſomme qu'il peut obtenir. Elle eſt donc égale à $\frac{n}{\nu}$ quand $1\leqq n\leqq\nu$, et à $\frac{1}{\nu}$ quand rien n'a encore été mis.

La probabilité que la troiſième perſonne gagne l'enjeu s'approche donc indéfiniment de zéro à meſure que ν augmente.

Pour $\nu=2n$ elle eſt égale à $\frac{1}{2}$. Or, puiſque la probabilité que l'enjeu diminue de n à 0, ſans paſſer par $\nu=2n$, eſt évidemment égale à celle qu'il monte de n à $\nu=2n$ (ſans paſſer par zéro), il ne reſte rien pour la probabilité que l'enjeu oſcille indéfiniment entre les limites 0 et $2n$ ſans jamais atteindre ni l'une ni l'autre. Quoique cet événement ne ſoit pas impoſſible, ſa probabilité eſt donc infiniment petite. Et ſi cela eſt vrai pour $\nu=2n$, il en eſt de même *a fortiori* pour $\nu=2n-1$,

c'eſt-à-dire la concluſion reſte applicable dans le cas où la limite ſupérieure eſt déſignée par un nombre impair.

Quelles ſont l'eſpérance $\varphi_A(n, \nu)$ du joueur qui doit jeter, et celle $\varphi_B(n, \nu)$ de l'autre joueur?

Il faut dans le développement poſtérieur du jeu diſtinguer trois poſſibilités: 1[e] l'enjeu eſt épuisé par les joueurs, 2[e] il eſt gagné par la troiſième perſonne, 3[e] il oſcille indéfiniment entre 0 et ν ducats ſans jamais atteindre une de ces deux limites. Ce dernier événement entraînerait pour les joueurs une perte n'excédant jamais ν ducats; perte qu'on peut négliger puisque ſa probabilité eſt infiniment petite comme nous venons de le voir.

On a donc:

$$\varphi_A(n,\nu)+\varphi_B(n,\nu)+\varphi_C(n,\nu)=n,$$

c'eſt-à-dire, à cause de l'équation (30):

$$(32) \qquad \varphi_B(n,\nu)=-\varphi_A(n,\nu).$$

En appliquant les règles du jeu, on trouve:

$$\varphi_A(n,\nu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi_B(n-1,\nu)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi_B(n+1,\nu)=$$
$$=-\frac{1}{2}\varphi_A(n-1,\nu)-\frac{1}{2}\varphi_A(n+1,\nu),$$

ou bien:

$$\varphi_A(n+1,\nu)=-2\varphi_A(n,\nu)-\varphi_A(n-1,\nu) \quad (\text{pour } 1<n<\nu).$$

On a de plus:

$$\varphi_A(1,\nu)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi_B(2,\nu)=-\frac{1}{2}\varphi_A(2,\nu).$$

À l'aide de ces deux dernières relations on trouve ſans peine:

$$\begin{cases}\varphi_A(n,\nu)=n\varphi_A(1,\nu) & (\text{pour } n \text{ impair et } \leq\nu),\\ \varphi_A(n,\nu)=-n\varphi_A(1,\nu) & (\text{pour } n \text{ pair et } \leq\nu).\end{cases}$$

Or, évidemment $\varphi_A(\nu,\nu)=0$, donc:

(33) $$\varphi_A(1,\nu) = \varphi_B(1,\nu) = 0$$ [1].

Calculons maintenant les efpérances ε'_A et ε'_B des joueurs A et B au début du jeu. On a:

$$\varepsilon'_A + \varepsilon'_B + \varepsilon_C = 0,$$

c'eft-à-dire, puifque $\varepsilon_C = 1$:

$$\varepsilon'_B = -1 - \varepsilon'_A$$

Or, d'après les règles du jeu:

$$\varepsilon'_A = \frac{1}{2}\varepsilon'_B - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_B(1,\nu) = -1 - \frac{1}{2}\varepsilon'_A,$$

et par fuite:

(34) $$\varepsilon'_A = -\frac{2}{3},\ \varepsilon'_B = -\frac{1}{3}.$$

En comparant ce réfultat à celui de la p. 40 on voit que la perte caufée aux joueurs par la participation fuppofée de la troifième perfonne fe répartit également fur les deux joueurs.

Revenons maintenant au problème tel qu'il fut pofé par Huygens. Il n'y eft queftion que des deux joueurs A et B. Cependant il n'y a pas lieu, nous femble-t-il, de leur affigner l'efpérance mathématique qui, d'après nos calculs, revient à la troisième perfonne que nous avons introduite. Dès que la formation de l'enjeu a commencé ces joueurs fe trouvent dans la fituation que nous avons indiquée dans la note 1 de cette page, pourvu qu'on y fuppofe $\nu = \infty$; c'eft-à-dire l'enjeu doit être confidéré comme perdu pour eux, puifque leurs efpérances mathématiques font devenues égales à zéro. On arrive à cette conclufion fi l'on fait croître indé-

---

[1]) Ce résultat s'explique facilement. À chaque coup le joueur a une chance égale de gagner ou de perdre un ducat. Son espérance mathématique est donc égale à zéro pour chaque coup en particulier. Or, lorsque l'enjeu est épuisé ou lorsqu'il monte à ν ducats, cela n'a d'autre effet pour les joueurs que de faire cesser le jeu.

[2]) Voir la p. 32 de cet Avertissement.

finiment le nombre ν. Il eſt vrai que la probabilité que le jeu continue juſqu'à l'infini eſt infiniment petite, mais l'eſpérance mathématique qui correſpond à cette éventualité n'en reſte pas moins une quantité finie. Elle eſt égale à chaque inſtant à l'enjeu actuel.

Remarquons que des conſidérations analogues ſe préſentent dans tous les jeux où les coups peuvent ſe répéter indéfiniment ſans épuiſer l'enjeu, de ſorte qu'il nous ſemble utile d'introduire un terme pour déſigner la ſomme qui dans un tel jeu eſt perdue pour les joueurs à l'inſtant même où ils conviennent de jouer. Nous propoſons de la nommer: la part du diable.

N'oublions pas cependant que parfois dans les jeux de ce genre il eſt facile de montrer dès l'abord que cette part eſt infiniment petite, et par ſuite négligeable.

Prenons par exemple le problème de la p. 31. La probabilité qu'un enjeu de n ducats monte ſous les conditions de ce problème juſqu'a $n+\nu$ ducats s'exprime pour ν pair par $\alpha'^{\frac{1}{2}\nu}\beta'^{\frac{1}{2}\nu}$, et pour ν impair par $\alpha'^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\beta'^{\frac{1}{2}(\nu-1)}$. La „part du diable" eſt donc dans ce cas égale à la limite, pour $\nu=\infty$, du produit de ces expreſſions par $n+\nu$, c'eſt-à-dire qu'elle eſt nulle. Afin de réſoudre ce problème, il eſt donc permis, comme nous l'avons fait [2], d'appliquer l'hypothèſe que la ſomme des eſpérances des joueurs eſt à chaque inſtant égale à l'enjeu [3].

---

[3]) Supposons, pour avoir un autre exemple, que les chances de chaque joueur de tirer un ducat de l'enjeu ou d'y mettre un ducat soient entre elles comme p est à q. On trouve alors:

$$\varphi c(n,\nu)=\frac{\nu\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n}\right)}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu}};$$

par suite la part du diable est nulle dans le cas $p>q$ et ∞ dans celui de $p<q$, tandis que pour $p=q$ on retrouve la formule (30).

Ajoutons que la probabilité qu'un enjeu de n ducats augmente jusqu'à ν ducats est $\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu}}$. On a donc $\frac{1}{1+\left(\frac{p}{q}\right)^{n}}$ pour la probabilité que cet enjeu monte à $2n$ ducats. Or, on en déduit en intervertissant les nombres p et q, celle que l'enjeu s'épuise sans avoir jamais contenu $2n$ ducats. La somme de ces deux dernières probabilités étant égale à l'unité, il en résulte que, cette fois encore, la probabilité que l'enjeu oscille entre 0 et $2n$ ducats, sans jamais atteindre ces limites, est infiniment petite.

Nous finiſſons par indiquer de quelle manière la part du diable peut être éliminée par un changement dans l'énoncé du problème qui nous occupe. Il suffit pour cela d'ajouter à cet énoncé la clauſe ſuivante: Lorſque l'enjeu monte à une certaine ſomme les joueurs ſe le partageront en parties égales ſans continuer le jeu. Évidemment il faut alors ajouter à l'eſpérance de chaque joueur la moitié de ce que nous avons trouvé pour l'eſpérance de la troiſième perſonne [1]).

On a donc dans ce cas:

$$\varepsilon_A = \varepsilon'_A + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}; \varepsilon_B = \varepsilon'_B + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

et de même:

$$x_n\,{}^{2}) = \varphi_A(n, \nu) + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n;$$

réſultats conformes à ceux de Huygens [3]).

[1]) Voici une autre idée, suggérée par M. F. Schuh. Supposons que les personnes A et B, qui sont intéressées au jeu, ne jouent pas elles-mêmes, mais qu'elles se fassent représenter au jeu par des délégués. Si ces délégués leur annoncent que le jeu est fini, sans en communiquer le résultat, les personnes A et B, qui ont fait une gageure sur le résultat, sachant que le délégué de A ferait le premier coup, se trouvent précisément dans les conditions qui justifient la solution de Huygens, puisque la possibilité que le jeu se continue indéfiniment est exclue.

[2]) Voir sur cette notation la p. 39.

[3]) Comparez les p. 40—41.

FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.

II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.

III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.

IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.

V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

FRANCISCI van SCHOOTEN

MATHEMATISCHE OEFFENINGEN,

Begrepen in vijf Boecken.

I. Verhandeling van vijftig Arithmetische en vijftig Geometrische Voorstellen.

II. Ontbinding der Simpele Meet-konstige Werck-stucken.

III. APOLLONII PERGÆI herstelde Vlacke Plaetsen.

IV. Tuych-werckelijcke beschrijving der Kegel-sneden op een vlack.

V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe.

Waer by gevoegt is een Tractaet, handelende van Reeckening in Speelen van Geluck,

Door d'Heer

CHRISTIANUS HUGENIUS.

Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten

der

PERSPECTIVE.

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM, LIBER V.

CONTINENS

Sectiones triginta miscellaneas.



LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
cIↃ IↃC LVII.

Vÿfde Boeck

der

MATHEMATISCHE OEFFENINGEN,

Begrÿpende

Dertich Afdeelingen van gemengde ſtoffe.

Door

FRANCISCUS van SCHOOTEN,
Profeſſor Matheſeos in de Univerſiteyt tot *Leyden*.



t'AMSTERDAM,

By GERRIT van GOEDESBERGH,
Boeck-verkooper op 't Water / in de Delffsche Bybel / tegen
over de Nieuwe-Brugh. ANNO 1660.

AU LECTEUR[1].

Lorſque j'avais déjà pris la réſolution de terminer ces excercifes[2]), il m'eſt venu à l'eſprit, Cher Lecteur, qu'il me reſtait encore pluſieurs autres ſujets amuſants et remarquables, leſquels, ſi je les avais ajoutés à ces Sections[3]) et que j'avais réuſſi à les traiter dignement, auraient grandement orné mon travail et peut-être facilité et rendu plus profitables tes Études; ſeulement la peine que j'aurais dû prendre pour les développer, ainſi que le travail qu'ils m'auraient coûté, me feraient devenus trop lourds. C'eſt pourquoi (de même que, parmi d'autres matières traitées dans les Sections précédentes de mon ouvrage, j'ai indiqué comment quelques-unes des Propoſitions les plus belles et les plus ſubtiles trouvées en partie par les Mathématiciens de l'Antiquité et en partie par les Mathématiciens les plus Excellents de ce ſiècle, auraient pu être cherchées et trouvées au moyen de l'*Algèbre*) il ne m'a pas ſemblé inopportun, afin d'étendre les applications de cet Art, d'ajouter ici, au lieu des ſujets qui me reſtaient, ce qui a été inventé dernièrement par le Très Noble et Très Célèbre Seigneur CHRISTIANUS HUGENIUS ſur le calcul dans les Jeux de Haſard, Traité qu'il m'a communiqué avec une lettre que j'ai également ajoutée[4]). Je préſume que ſon Écrit te plaira d'autant mieux que les conſidérations de l'auteur te paraîtront plus ſubtiles et plus extraordinaires; ſurtout parce qu'il y emploie la même *Analyſe* dont je me ſuis ſervi et dont je lui ai enſeigné jadis les fondements[5]), et qu'ainſi il indique à ceux qui ont étudié cet art une méthode pour analyſer de pareils Problèmes. Si je t'ai donné ainſi, Cher Lecteur, outre le reſte de mon travail, aſſez de ſujets pour t'exercer dans ce genre d'Étude[6]), tu comprendras, j'eſpère, ma bonne volonté envers toi, ce qui te fera agréer la peine que j'ai priſe pour ton bien et celui des Études. Adieu.

---

1) Dans cet avant-propos, qu'on trouve aux p. 485—486 des „Mathematische Oeffeningen", le professeur van Schooten introduit chez ses lecteurs le petit traité, qui va suivre, sur les jeux de hasard, composé par son élève Christiaan Huygens.

2) Il s'agit de l'ouvrage dont nous avons reproduit le titre en fac-simile à la p. 50. Comparez l'Avertissement, à la p. 5 du présent Tome.

3) Le traité de Huygens fut ajouté au cinquième et dernier Livre de l'ouvrage de van Schooten. Dans l'édition hollandaise dont nous nous servons ce Livre portait le titre „Vijfde Bouck der Mathematische Oeffeningen, begrijpende Dertich Afdeelingen van gemengde stoffe". Dans l'édition latine qui la précédait le même Livre était intitulé „Excercitationum Mathematicarum, Liber V. Continens Sectiones triginta miscellaneas." Voir les deux pages précédentes.

TOT DEN LESER[1]).

Na dat ick beſloten hadt een eynde van deſe oeffeningen te maecken [2]), ſoo heb ick bevonden, dat my, Beminde Leſer, noch verſcheyde andre dingen van vermaeckelijcke en treffelijcke ſtoffe overich waren, welcke, ſoo ickſe, na haer waerde verhandelt hebbende, by deſe Afdeelingen [3]) gevoegt hadde, niet weynich cieraet aen deſen mijnen arbeyt en mogelijck oock hulp en profijt aen uwe Studien ſouden toe-gebracht hebben; doch de moeyte van die te beſchrijven als oock het werck ſouden my te verdrietig gevallen zijn. Weshalven alſoo ick onder andere dingen, die in de voorgaende Afdeelingen verhandelt zijn, betoont hebbe, op wat wijz ſommige der fraeyſte en ſubtijlſte Voorſtellen, die ten deele van de Oude, en ten deele van de Voortreffelickſte Wiskonſtenaers deſer eeuwe ſeer aerdig zijn uyt-gevonden, ſouden mogen zijn geſocht, ofte door behulp der *Algebra* konnen gevonden worden: ſoo en heb ick 't niet ongerijmt geacht, indien ick, tot overvloediger gebruyck van deſe Konſt, 't geen onlangs door den Wel-Edelen en Wijt-beroemden Heer CHRISTIANVS HVGENIVS aengaende 't reeckenen in Spelen van Geluck uyt-gevonden ende my in ſchrift van hem mede gedeelt is, alhier met deſſelfs brief [4]), in plaets van 'tgeene my overig was, by-voegde. Welck ſijn Tractaet ick dan UE. des te aengenamer acht te ſullen weſen, als 'tgeen daer in verhandelt wordt te ſubtijlder en ongemeender ſal bevonden worden; inſonderheyt door dien hy tot deſſelfs vinding deſelve *Analyſis*, welckers fondamenten hy eertijts van my geleert heeft [5]), als ick, gebruyckt; en alſoo de bevlytigers van die de weg baent om diergelijcke Voorſtellen te ontbinden. Waer in, ſoo ick nevens mijnen andren arbeyt aen U, Beminde Leſer, in deſe ſoort van Studie [6]) genoegſame ſtof van oeffening gegeven hebbe; ſoo ſult ghy daer uyt (gelijck ick hoop) mijne bereytwilligheyt t'uwaerts konnen afnemen, en dienvolgende oock mijnen arbeyt, t'uwen en der Studien beſten aengenomen, ten goeden duyden. Vaert wel.

---

[4]) Voir la page 57 qui suit.

[5]) Voir au T. XI les p. 7—20 qui contiennent un aperçu de l'enseignement donné par van Schooten en 1645 et 1646 à son élève Christiaan Huygens âgé alors de 16 à 17 ans. Cet enseignement était fondé surtout sur les méthodes exposées par Descartes dans sa „Géométrie"; voir l'ouvrage cité dans la note 7, p. 6 du T. I.

[6]) C'est-à-dire dans l'étude des méthodes analytiques.

A Monfieur

FRANCISCUS van SCHOOTEN[1]).

Monfieur,

Sachant qu'en publiant les louables fruits de votre intelligence et de votre zèle, vous vous propofez entre autres de faire voir, par la diverfité des fujets traités, la grandeur du champ fur lequel notre excellent Art *Algébrique* s'étend, je ne doute pas que le préfent écrit au fujet du Calcul dans les Jeux de hafard ne puiffe vous fervir à atteindre ce but. En effet, plus il femble difficile de déterminer par la raifon ce qui eft incertain et foumis au hafard, plus la fcience qui parvient à ce réfultat paraîtra admirable. Comme c'eft donc à votre demande et à la fuite de vos exhortations que j'ai commencé à mettre ce Calcul par écrit [2]), et que vous le jugez digne de paraître enfemble avec les réfultats de vos profondes recherches, non feulement je vous donne volontiers la permiffion de le publier de cette façon mais encore j'eftime que cette manière de publication fera tout à mon avantage. Car fi quelques lecteurs pourraient bien s'imaginer que j'ai travaillé fur des fujets de faible importance, ils ne condamneront néanmoins pas comme complètement inutile et indigne de toute louange ce que vous voulez bien adopter de cette façon comme fi c'était votre propre ouvrage, après l'avoir traduit, non fans quelque labeur, de notre langue en Latin [3]). Toutefois je veux croire qu'en confidérant ces chofes plus attentivement, le lecteur apercevra bientôt qu'il ne s'agit pas ici d'un fimple jeu d'efprit, mais qu'on y jette les fondements d'une fpéculation fort intéreffante et profonde. Les Problèmes appartenant à cette Matière ne feront pas, me femble-t-il, jugés plus faciles que ceux de *Diophante*, mais on les trouvera peut-être plus amufants attendu qu'ils renferment quelque chofe de plus que de fimples propriétés des nombres. Il faut favoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens

---

[1]) Voir sur Frans van Schooten la note 2, p. 4 du T. I.

[2]) Comparez la lettre à de Roberval du 18 avril 1656 et celle à van Schooten du 20 avril 1656, p. 404 du T. I.

Aen mijn Heer,

FRANCISCUS van SCHOOTEN [1]).

Mijn Heer,

Naer dien ick weet dat VE., de loffelijcke vruchten van ſijn vernuft ende arbeyt in 't licht gevende, onder anderen dit ooghmerck heeft: namentlijck, om door de verſcheydenheyt der verhandelde ſtoffen te betoonen hoe wijt onſe uytnemende Konſt van *Algebra* ſich uytſtreckt; ſoo en twijffele ick oock niet, of het geene ick van de Rekeningh in Spelen van geluck beſchreven heb, ſal tot VE. opſet niet ondienſtig zijn. Want ſoo veel te ſwaerder als het ſcheen, door reden te konnen bepalen het geene onſeker is ende het geval onderworpen, ſoo veel te meer verwonderinghs waerdigh ſal die wetenſchap ſchijnen, waer door ſulcx kan werden te weege gebracht. Dewijl ick dan op VE. verſoeck ende aen-maeninghe, deſe Rekening eerſt heb beginnen by geſchrift te ſtellen [2]), ende VE. deſelve waerdigh acht om te gelijck met ſyne diepſinnige vonden in 't licht te komen; ſoo en ſal ick niet alleen het ſelve geerne toeſtaen, maer oock tot mijn voordeel duyden, dat die op deſe maniere te voorſchijn werde gebracht. Want of ſommige mochten dencken dat ick ontrent geringhe dingen en van weynigh gewichte mijn moeyte beſteedt hadde, ſoo en ſullen ſy nochtans niet t' eenemael voor onnut ende onpryſelijck houden, het geene VE. in dier voegen als voor het ſyne is aen-nemende, en niet ſonder arbeyt uyt onſe ſpraeck in de Latijnſche heeft overgeſet [3]). Alhoewel ick wil gelooven, ſo iemandt deſe dinghen wat naerder begint in te ſien, dat hij haeſt ſal bevinden, geen enckel ſpel te zijn het geene hier wert verhandelt, maer datter de beginſelen en gronden geleyt werden van een ſeer aerdige en diepe ſpeculatie. Soo ſullen oock, meyne ick, de Voorſtellen die in deſe Materie voorvallen, geenſins lichter als die van *Diophantus* geacht werden, doch wel vermaeckelijcker miſſchien, door dienſe iets meer inhouden als bloote eygenſchappen der getallen. Voorts is te weeten, dat al over eenighen tijdt, ſommige van de Vermaertſte Wis-

---

[3]) En effet, le présent Traité sur le Calcul dans les Jeux de hasard parut pour la première fois en 1657 dans l'édition latine des „Mathematische Oeffeningen" qui précédait de trois années l'édition hollandaise que nous suivons; voir l'Avertissement, aux pp. 5 et 8 du présent Tome.

de toute la France ſe ſont occupés de ce genre de Calcul [1]), afin que perſonne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas. Mais ces ſavants, quoiqu'ils ſe miſſent à l'épreuve l'un l'autre en ſe propoſant beaucoup de queſtions difficiles à réſoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moimême toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'eſt impoſſible pour la raiſon que je viens de mentionner d'affirmer que nous ſommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui eſt du réſultat, j'ai conſtaté en bien des cas que mes ſolutions ne diffèrent nullement des leurs [2]). Vous trouverez qu'à la fin de ce Traité [3]) j'ai propoſé encore quelques queſtions du même genre ſans indiquer la maniére de les réſoudre, premièrement parce que je voyais qu'il me coûterait trop de travail d'expoſer convenablement les raiſonnements conduiſant aux réponſes, et en ſecond lieu parce qu'il me ſemblait utile de laiſſer quelque choſe à chercher à nos lecteurs (s'il s'en trouve quelques-uns), afin que cela leur ſervît d'exercice et de paſſe-temps.

La Haye
le 27 Avril
1657.

Votre ſerviteur dévoué

CHR. HUYGENS de ZUYLICHEM.

[1]) Il s'agit ſurtout de Pascal et de Fermat; voir la p. 405 du T. I et les p. 3—4 de l'Avertissement qui précède.

konstenaers van geheel Vranckrijck met dese soorte van Rekeningh [1]) zijn besigh geweest, op dat niemandt hier in, de eer van de eerste Inventie die de myne niet en is, my toe en schrijve. Doch sy luyden, offe wel sich onder malkanderen met veele swaere questien ter proeve stelden, soo hebbense nochtans elck sijn maniere van uytvinding bedeckt gehouden. Soo dat ick van noode gehad heb, alles van vooren aen selfs te ondersoecken en te doorgronden: ende daerom oock noch niet verseeckert en ben, of wy hier in een selfde eerste beginsel getroffen hebben. Maer de uytkomste belangende, heb ick in veele questien ondervonden dat de myne van de haere geensins en verscheelt [2]). VE. sal vinden dat ick in 't eynde van dit Tractaet [3]), noch eenige van die questien bygevoegt hebbe, achterlaetende nochtans de werckingh; eensdeels om dat ick te veel moeyte te gemoet sagh, indien ick alles nae behooren wilde afdoen; ten anderen om dat my raetsaem dacht, iets overigh te laeten, 'twelck onse Lesers (soo der eenige zijn sullen) mochte dienen tot oeffeningh en tijdt-verdrijf.

In s'Graven-
Hage den 27
Apr. 1657.

VE. dienstwilligen dienaer

CHR. HUYGENS van Zuylichem.

---

[2]) Voir les p. 6—8 de l'Avertissement.

[3]) Voir les p. 89—91.



DU CALCUL

DANS LES

JEUX DE HASARD.

[1656–1657].

Quoique dans les jeux de hafard pur les réfultats foient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée. Exemple: fi quelqu'un parie de jeter avec un dé fix points au premier coup, il eft incertain s'il gagnera ou s'il perdra; mais ce qui eft déterminé et calculable c'eft combien la chance qu'il a de perdre fon pari furpaffe celle qu'il a de le gagner. De même, fi je joue avec une autre perfonne à qui gagnera le premier trois parties et que j'en ai déjà gagné une, il eft encore incertain lequel des deux l'emportera; mais on peut calculer avec certitude le rapport de ma chance de gagner à la fienne, et l'on fait par conféquent auffi de combien, fi nous voulons interrompre le jeu, la part de l'enjeu à laquelle j'ai droit furpaffe la fienne [1]). On peut calculer également pour quel prix je devrais raifonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui défirerait le continuer en mon lieu. Bien des queftions de ce genre peuvent fe préfenter en des cas femblables où il y a 2, 3 ou plufieurs perfonnes [2]), et comme ces calculs ne font pas univerfellement connus et peuvent fouvent être utiles, j'en indiquerai brièvement la méthode, après quoi je confidérerai auffi le jeu aux dés [3]).

Dans ces deux matières je pars de l'hypothèfe que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chofe a une valeur telle que fi l'on poffède cette valeur on peut fe procurer la même chance par un jeu équitable, c'eft-à-dire par un jeu qui ne vife au détriment de perfonne. Exemple: fi quelqu'un cache à mon infu trois

[1]) Voir la Prop. VI, p. 71.

[2]) Voir les Prop. IV, V, VII, VIII, IX, p. 67—77.

[3]) Voir les Prop. X—XIV, p. 77—87.



VAN

REKENINGH

IN

SPELEN VAN GELUCK.

[1656—1657].

Al-hoewel in de ſpelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomſten onſeecker zijn, ſoo heeft nochtans de kanſſe, die yemandt heeft om te winnen of te verlieſen, haere ſeeckere bepaling. Als by exempel. Die met een dobbel-ſteen ten eerſten een ſes neemt te werpen, het is onſeecker of hy het winnen ſal of niet; maer hoe veel minder kans hy heeft om te winnen als om te verlieſen, dat is in ſich ſelven ſeecker, en werdt door reeckeningh uyt-gevonden. So mede, als ick tegen een ander in drie ſpelen uyt ſpeel, ende een ſpel daer van gewonnen hebbe, het is noch onſeecker wie eerſt ſal uyt weſen. Doch hoe dat mijn kanſſe ſtaet tegen de ſyne, kan ſeeckerlijck bereeckent werden, en daer door oock bekent, ingevalle wy het ſpel wilden laten blijven, hoe veel my meerder toe-komen ſoude van 't geen ingeſet is als hem [1]). Ofte oock indien yemandt anders mijn ſpel begeerde over te nemen, waer voor ick hem dat ſoude behooren te laten. Hier konnen verſcheyde queſtien uyt ontſtaen tuſſchen 2, 3 of meerder getal van ſpeelders [2]), en dewijl diergelijcke reeckeningh geenſins gemeen en is ende dickmaels kan te paſſe komen, ſoo ſal ick hier in 't kort de wegh daer toe aenwijſen, ende daer na oock eenige verklaringe doen aengaende de dobbel-ſteenen [3]).

Ick neeme tot beyder fondament, dat in het ſpeelen de kanſſe, die yemant ergens toe heeft, even ſoo veel weerdt is als het geen, het welck hebbende hy weder tot deſelfde kanſſe kan geraecken met rechtmatigh ſpel, dat is, daer in niemandt verlies geboden werdt. By exempel. So yemandt ſonder mijn weeten in

écus [1]) dans une main et fept dans l'autre, et me donne à choifir entre les deux mains, je dis que cet offre a pour moi la même valeur que fi j'étais certain d'obtenir cinq écus; en effet, lorfque je poffède cinq écus, je puis de nouveau me mettre dans le cas d'avoir des chances égales d'obtenir trois ou fept écus, et cela dans un jeu équitable, comme cela fera démontré plus bas [2]).

Proposition I.

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.

Afin de non feulement démontrer cette règle mais auffi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, poffédant x, je puiffe me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Suppofons que ce jeu foit le fuivant. Je joue x contre une autre perfonne, dont l'enjeu eft également x; il eft convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu eft équitable, et il appert que j'ai ainfi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x - a$ était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'àvoir a ou d'avoir b. Je pofe donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. La preuve en eft aifée. En effet, poffédant $\frac{a+b}{2}$, je puis hafarder cette fomme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de forte une chance égale d'avoir a fi je perds, ou b fi je gagne; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a+b$ et je lui en donne a.

En chiffres. Lorfque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance eft 5 d'après cette Propofition; et il eft certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, fi je joue 5 contre une autre perfonne dont la mife eft également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'eft là un jeu équitable, et il eft évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3.

---

[1]) Le „schelling" est une ancienne monnaie hollandaise valant six sous; mais puisque la valeur de la pièce n'importe pas et qu'on trouve dans l'édition latine le mot „solidus", qui signifie une certaine pièce d'or, nous employerons dans notre traduction française l'expression „écu".

[2]) Voir la Prop. I, qui suit.

d'eene handt 3 ſchellingen [1]) verbergt, en in d'ander 7 ſchellingen, ende my te kieſen geeft welck van beyde ick begeere te hebben, ick ſegge dit my even ſoo veel weerdt te zijn, als of ick 5 ſchellingen ſeecker hadde. Om dat, als ick 5 ſchellingen hebbe, ick wederom daer toe kan geraecken, dat ick gelijcke kans ſal hebben, om 3 of 7 ſchellingen te krijgen, en dat met rechtmatigh ſpel: gelijck hier naer ſal betoont werden [2]).

I. Voorstel.

Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my ſo veel weerdt als $\frac{a+b}{2}$.

Om deſen regel niet alleen te bewijſen maer oock eerſt uyt te vinden, ſoo zy geſtelt x voor het geene dat mijn kanſſe weerdt is. Soo moet ick dan x hebbende weder tot deſelfde kans konnen geraecken met rechtmatig ſpel. Laet dit het ſpel zijn: dat ick tegen een ander ſpeele om x, en dat den anderen daer tegen mede x in-ſette: ende dat bedongen zij, dat de geene die wint aen die verlieſt ſal geven a. Dit ſpel is rechtmaetigh, ende het blijckt dat ick hier door gelijcke kans heb om a te hebben, te weeten, als ick 't ſpel verlies; of $2x-a$, als ick 't win: want alſdan ſoo treck ick $2x$ die in-geſet zijn, daer van ick den anderen moet geven a. Indien nu $2x-a$ ſoo veel ware als b, ſoo ſoude ick ghelijcke kans hebben tot a of b. Ick ſtelle dan $2x-a \infty b$, ſo komt $x \infty \frac{a+b}{2}$, voor de waerde van mijn kans. En het bewijs hier van is licht. Want $\frac{a+b}{2}$ hebbende, ſoo kan ick dat tegen een ander waegen die mede $\frac{a+b}{2}$ ſal in-ſetten, ende bedingen dat die het ſpel wint, den anderen ſal a geven. Waer door ick gelijcke kans ſal bekomen om a te hebben, te weeten, als ick verlies, of b als ick win; want alſdan ſoo treck ick $a+b$ dat in-geſet is, ende geef hem daer van a.

In getaelen. Indien ick gelijcke kans heb om 3 te hebben of 7, ſoo is door dit Voorſtel mijn kanſſe 5 weerdt; ende het is ſeecker dat ick 5 hebbende weder tot de ſelfde kanſſe kan geraecken. Want ſpeelende om de ſelve tegen een ander die daer 5 tegen ſet, met beding dat de geene die wint den anderen 3 ſal geven; ſoo is dit rechtmaetig ſpel, ende het blijckt dat ick gelijcke kans hebbe om 3 te hebben, te weeten, als ick verlies, of 7 indien ick win; want alſdan treck ick 10, daer van ick hem 3 geef.

Proposition II.

Avoir des chances égales d'obtenir a, b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$.

Pour trouver ceci, appelons derechef x la valeur de ma chance. Il faut donc que, poſſédant x, je puiſſe me procurer de nouveau les mêmes chances par un jeu équitable. Que ce jeu ſoit le ſuivant: Je joue contre deux autres perſonnes; chacun de nous trois met x; je conditionne avec la première qu'elle me donnera b ſi elle gagne le jeu et réciproquement, avec la ſeconde qu'elle me donnera c ſi elle gagne et réciproquement. Il appert que ce jeu eſt équitable. J'aurai ainſi une change égale d'avoir b, ſavoir ſi le premier joueur gagne, ou c, ſi le deuxième gagne, ou enfin $3x - b - c$ ſi je gagne moi-même; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $3x$, dont je donne b à l'un et c à l'autre. Or, ſi $3x - b - c$ était égal à a, j'aurais des chances égales d'avoir a, b ou c. Je poſe donc $3x - b - c = a$, d'où je tire $x = \frac{a+b+c}{3}$, valeur de ma chance. On trouve de même qu'avoir des chances égales d'obtenir a, b, c ou a me vaut $\frac{a+b+c+d}{4}$, et ainſi de ſuite.

Proposition III [1]).

Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Pour découvrir cette règle, appelons de nouveau x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puiſſe rentrer dans mon premier état par un jeu équitable. À cet effet je prends un nombre de joueurs tel qu'avec moi il y en a $p+q$ en tout, dont chacun met x, de ſorte que l'enjeu total ſera $px + qx$; chacun

---

[1]) Cette Proposition fut communiquée par Huygens à de Carcavy dans une lettre du 6 juillet 1656 (p. 442 du T. I) en ajoutant qu'il s'en servait „dans toutes ces questions des parties du jeu". Comparez les p. 19—20 de l'Avertissement.

II. Voorstel.

Als ick gelijcke kans hebbe tot a of b of c, het is my foo veel weerdt als of ick $\frac{a+b+c}{3}$ hadde.

Om dit wederom te vinden, foo zy als vooren geftelt x voor de waerde van mijn kans. Soo moet ick dan x hebbende weder tot de felfde kanffe konnen geraecken door rechtmaetig fpel. Laet dit het fpel zijn, dat ick tegen 2 andere fpeele, infettende ieder van ons drien x, ende laet ick met den eenen defe voorwaerde maecken, dat foo hy het fpel wint hy my fal geven b, ende ick b aen hem, foo ick het kome te winnen. Met den anderen laet ick defe voorwaerde maecken, dat hy het fpel winnende my fal geven c, of ick aen hem c als ick het win. Het blijckt dat dit fpel rechtmaetig is. Ende ick fal daer door gelijcke kans hebben, om b te hebben, te weeten, als het den eerften wint, of c, als het den tweeden wint, of $3x - b - c$ als ick het win; want dan treck ick $3x$ die ingefet zijn, en geve daer van aen den eenen b, aen den anderen c. Indien nu $3x - b - c$ gelijck waer aen a, fo foude ick gelijcke kans hebben tot a of b of c. So ftel ick dan $3x - b - c \propto a$, en komt $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, voor de waerde van mijn kans. Op gelijcke manier werdt gevonden, dat als ick gelijcke kans hebbe tot a of b of c of d, dit foo veel weerdt is als $\frac{a+b+c+d}{4}$, ende foo voorts.

III. Voorstel [1].

Als het getal der kanffen die ick hebbe tot a is p, ende het getal der kanffen die ick tot b heb is q; nemende altijdt dat ieder kans even licht kan gebeuren: Het is my weerdt $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Om defen regel uyt te vinden, fo zy wederom x geftelt voor het geene mijn kans weerdt is. So moet ick x hebbende wederom in ftaet als vooren konnen geraecken door rechtmaetig fpel. Laet ick hier toe foo veel fpeelders nemen, datfe met my te faemen het getal van $p + q$ uytmaecken, infettende elck x, foo datter

joue pour ſon propre compte avec une même chance de gagner. Suppoſons en outre qu'avec q joueurs, c'eſt-à-dire avec chacun d'eux en particulier, je faſſe cette convention que ſi l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la ſomme b, et que ſi moi je gagne, je lui donnerai la même ſomme. Suppoſons enfin qu'avec les $p-1$ joueurs qui reſtent, ou plutôt avec chacun d'eux en particulier, je faſſe la convention que ſi l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la ſomme a, et que je lui donnerai également la ſomme a ſi c'eſt moi qui gagne la partie. Il eſt évident qu'à ces conditions le jeu eſt équitable, attendu que les intérêts d'aucun joueur ne ſe trouvent léſés. On voit de plus que j'ai maintenant q chances d'obtenir b, $p-1$ chances d'obtenir a et une chance (au cas où c'eſt moi qui gagne) d'avoir $px+qx-bq-ap+a$; en effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu $px+qx$ dont je dois céder b à chacun des q joueurs et a à chacun des $p-1$ joueurs, ce qui fait en tout $qb+pa-a$. Or, ſi $px+qx-bq-ap+a$ était égal à a, j'aurais p chances d'avoir a (car j'avais déjà $p-1$ chances d'obtenir cette ſomme) et q chances d'avoir b; je ſerais donc revenu à mes chances premières. Je poſe donc $px+qx-bq-ap+a=a$, et je trouve $x=\frac{ap+bq}{p+q}$ pour la valeur de ma chance, conformément à l'énoncé.

En chiffres. Si j'ai 3 chances de gagner 13, et 2 chances de gagner 8, je poſſède pour ainſi dire 11, d'après cette règle. Et il eſt aiſé de faire voir qu'étant en poſſeſſion de 11, je puis me procurer de nouveau ces mêmes chances. En effet, je puis jouer avec 4 autres perſonnes et chacun de nous cinq peut mettre 11; je conviendrai alors avec deux de ces perſonnes que ſi l'une d'elles gagne la partie elle me donnera 8 et que, ſi c'eſt moi qui gagne, je leur donnerai à chacune la même ſomme. De même je conviens avec les deux autres que celle des deux qui gagne la partie me donnera 13 et que, ſi moi je gagne, je leur donnerai à chacune 13 également. Ce jeu ſera équitable. Et l'on voit que j'ai ainſi 2 chances d'avoir 8, ſavoir au cas où l'un des deux joueurs qui m'ont promis cette ſomme emporte l'enjeu, et 3 chances d'avoir 13, ſavoir ſi l'un des deux autres qui doivent me donner cette ſomme gagne la partie, ou ſi je la gagne moi-même. En effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu qui eſt de 55, dont je dois donner 13 à chacun de deux joueurs et 8 à chacun de deux autres joueurs, de ſorte qu'il m'en reſte également 13.

Proposition IV.

Suppoſons que je joue contre une autre perſonne à qui aura gagné le premier trois parties, et que j'aie déjà gagné deux parties et lui une. Je veux ſavoir quelle partie de l'enjeu m'eſt due au cas où nous voulons interrompre le jeu et partager équitablement les miſes.

in ſal ſtaen $px + qx$, ende elck voor ſijn hooft ſpeelende met even goede kans om te winnen. Voorts laet ick met ſoo veel deſer ſpeelders, als het getal q is, ieder in 't byzonder dit verding maecken, dat als hy het ſpel komt te winnen hy my ſal b geven, of ick daer entegens het ſelfde aen hem als ick het win. Laet ick oock met de reſt van de ſpeelders, zijnde $p - 1$, dit verding maecken met elck in 't byſonder, dat hy het ſpel winnende my ſal a geven, ende ick hem van gelijcken a indien ick het kome te winnen. Het blijckt dat dit ſpel met deſe voorwaerden rechtmaetig is, niemandt hier door verongelijckt weſende. Het blijckt mede dat ick alſnu q kanſſen hebbe tot b, ende $p - 1$ kanſſen tot a, en 1 kanſſe, (te weeten, als ick het win,) tot $px + qx - bq - ap + a$, want alſdan ſoo treck ick $px + qx$ dat ingeſet is, waer van ick aen yder van q ſpeelders moet geven b, en aen yder van $p - 1$ ſpeelders a, maeckende te ſaemen $qb + pa - a$. Indien nu $px + qx - bq - ap + a$ gelijck waer aen a, ſoo ſoude ick p kanſſen hebben tot a, (want ick alreede $p - 1$ kanſſen daer toe hadde) ende q kanſſen tot b, ende ſoude alſo tot mijn voorige kanſſe wederom geraeckt zijn. Soo ſtel ick dan te zijn $px + qx - bq - ap + a \propto a$; en komt $x \propto \dfrac{ap + bq}{p + q}$ voor het geene dat mijn kanſſe weerdt was, gelijck in 't begin is geſtelt.

In getaelen. Indien ick 3 kanſſen hebbe tot 13, en 2 kanſſen tot 8, ſoo heb ick door deſen regel ſoo veel als 11. En is licht te thoonen, dat ick 11 hebbende wederom tot de ſelfde kanſſe kan geraecken. Want ſpeelende tegen 4 andere, en ſettende elck van ons vyven 11 in, ſoo ſal ick met 2 van haer verdraegen elck in 't byſonder, dat ſoo hy het ſpel wint hy my 8 ſal geven, of ick aen hem 8, indien ick het winne. Met de ander 2 van gelijcken, dat die van haer het ſpel wint my ſal 13 geven, of ick aen hem 13 als ick het kom te winnen. Welck ſpeelen rechtmaetig is. Ende het blijckt, dat ick daer door 2 kanſſen hebbe tot 8, naementlijck als een van de twee die my 8 belooft hebben wint, en 3 kanſſen tot 13, te weeten als een van de twee andere die my 13 gheven moeten wint, of als ick ſelver het ſpel win. Want ick het winnende ſoo treck ick 't geen ingeſet is dat's 55, daer van ick aen elck van 2 moet geven 13, en aen elck van de 2 andere 8, ſoo dat voor my dan oock 13 overblijft.

IV. Voorstel.

Genomen dan dat ick tegens een ander ſpeele ten dryen uyt en dat ick alreede 2 ſpelen hebbe en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het ſpel niet en wilden voortſpeelen, maer het geen ingeſet is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen ſoude.

Il eſt néceſſaire de commencer par les cas les plus ſimples pour arriver à la ſolution des queſtions propoſées en premier lieu [1]) au ſujet du partage de l'enjeu entre pluſieurs joueurs dont les chances ſont inégales.

Il faut remarquer d'abord qu'il ſuffit de tenir compte des parties qui manquent de part et d'autre [2]). Car il eſt certain que ſi nous jouions à qui aura gagné le premier 20 parties, et que j'euſſe gagné 19 parties et mon adverſaire 18, j'aurais le même avantage que dans le cas énoncé, où ſur trois parties j'en ai gagné deux et lui une ſeule, et cela parce que dans les deux cas il ne me manque qu'une partie tandis qu'il lui en manque deux.

Enſuite, pour calculer la part qui revient à chacun de nous, il faut faire attention à ce qui arriverait ſi nous continuions le jeu. Il eſt certain que ſi je gagnais la première partie, j'aurais terminé le jeu, et qu'ainſi j'obtiendrais l'enjeu tout entier que j'appellerai a. Mais ſi l'autre joueur gagnait la première partie nos chances ſeraient déſormais égales, attendu qu'il nous manquerait une partie à chacun; nous aurions donc chacun droit à $\frac{1}{2}a$. Or, il eſt évident que j'ai autant de chance de gagner la première partie que de la perdre. J'ai donc des chances égales d'avoir a ou $\frac{1}{2}a$, ce qui, d'après la première Propoſition [3]), équivaut à la ſomme des moitiés, c'eſt-à-dire à $\frac{3}{4}a$, de ſorte qu'il reſte $\frac{1}{4}a$ pour mon adverſaire. J'aurais d'ailleurs pu faire pour lui auſſi un calcul direct, en ſuivant la même méthode. Il en reſſort que celui qui voudrait continuer le jeu en mon lieu, pourrait m'offrir $\frac{3}{4}a$, et qu'on peut donc toujours haſarder 3 contre 1 en acceptant de gagner un jeu avant qu'un autre joueur en gagne deux.

Proposition V.

Suppoſons qu'il me manque une partie à moi et trois à mon adverſaire. Il s'agit de partager l'enjeu dans cette hypothèſe.

Conſidérons de nouveau l'état où nous ſerions ſi moi je gagnais la première partie ou bien ſi mon adverſaire la gagnait. Si je la gagnais, j'aurais l'enjeu a, mais ſi c'était lui qui la gagnait, il lui en manquerait encore 2 contre une qui me manquerait à moi; nous nous trouverions donc dans l'état conſidéré dans la propoſition précédente, et il me reviendrait $\frac{3}{4}a$, comme nous l'avons vu à cet endroit. J'ai

[1]) Voir la p. 61.
[2]) Comparez la note 1 de la p. 22.

Om nu tot de eerst voor-gestelde questien [1]) te komen, aengaende de verdeelingh onder verscheyde speelders te maecken, als haere kanssen ongelijck zijn, soo is 't noodigh van de lichtste te beginnen.

Voor eerst moet acht genomen werden alleen op de spelen, die weder-zijds noch ontbreecken. Want het is seecker, dat, of wy ten 20gen uyt speelden, en dat ick 19 hadde, en die tegens my speelt 18, dat ick even het selfde voordeel soude hebben als nu, hebbende van drie spelen 2 gewonnen en hy een: door dien in beyde gevallen my noch maer een spel ontbreeckt en hem twee spelen.

Voorts om te vinden, wat deel ons elck toekomt, soo moet aengemerckt werden watter soude gebeuren indien wy voort speelden. Het is seecker indien ick het eerste spel quam te winnen, dan soude ick uyt wesen en hebben al dat ingeset is, het welck zy genoemt a. Maer indien den anderen het eerste spel won, dan souden wy gelijcke kans hebben, elck noch een spel ontbreeckende, en daerom elck gerechtigt zijn tot $\frac{1}{2}a$. Het is nu seecker dat ick gelijcke kans heb om dat eerste spel te winnen of te verliesen. Soo heb ick dan gelijcke kans om a te hebben of $\frac{1}{2}a$, het welck door het 1ste Voorstel [2]) soo veel is als of ick van beyde de helft hadde dat is $\frac{3}{4}a$, en blijft voor die tegens my speelt $\frac{1}{4}a$. Wiens rekening oock van eersten aen op de selve manier hadde konnen gemaeckt werden. Hier uyt blijckt, dat die mijn spel soude willen overnemen my $\frac{3}{4}a$ daer voor kan geven; en dat men dienvolgens altijdt kan 3 tegen 1 setten, als men neemt 1 spel te winnen, eer dat een ander 2 spelen wint.

V. Voorstel.

Zij gestelt dat my 1 spel ontbreeckt, en die tegens my speelt 3 spelen. Nu moet men de verdeeling maecken.

Laet ons wederom acht nemen, in wat staet wy souden zijn, indien ick of hy het eerste spel quam te winnen. Als ick het won soo had ick het geen in-geset is dat is a, maer als hy het eerste spel won, dan souden hem noch 2 spelen ontbreecken tegen mijn 1, en wy souden daerom in staet zijn gelijck in 't voorgaende voorstel gestelt wierdt, en my toekomen $\frac{3}{4}a$, gelijck aldaer bethoont is. Soo heb

[3]) Voir la p. 63.

donc des chances égales d'obtenir a ou $\frac{3}{4}a$, ce qui, d'après la première Propofition [1]), me vaut $\frac{7}{8}a$. Refte $\frac{1}{8}a$ pour l'autre joueur. Ma chance eft donc à la fienne comme 7 eft à 1.

De même que ce calcul-ci dépend du calcul précédent, de même le réfultat obtenu ici eft néceffaire au calcul qui fe rapporte au cas fuivant, où il me manque une partie, tandis qu'il en manque quatre à mon adverfaire. On trouve de la même façon qu'il me revient dans ce cas $\frac{15}{16}$ de l'enjeu, et $\frac{1}{16}$ à lui.

Proposition VI.

Suppofons qu'il me manque deux parties et qu'il en manque trois à mon adverfaire.

La première partie aura maintenant pour effet, ou bien qu'il me manquera encore une partie à moi et trois à l'autre joueur (auquel cas il me reviendra $\frac{7}{8}a$ d'après ce qui précède), ou bien qu'il nous manquera deux parties à chacun de nous, auquel cas il me revient $\frac{1}{2}a$, attendu que nos chances feront devenues égales. Mais j'ai une chance contre une de gagner la première partie ou de la perdre; j'ai donc des chances égales d'obtenir $\frac{7}{8}a$ ou $\frac{1}{2}a$, ce qui me vaut $\frac{11}{16}a$ d'après la première Propofition [1]). Onze parties de l'enjeu me font donc dues contre cinq à mon adverfaire.

Proposition VII.

Suppofons qu'il me manque encore deux parties et lui quatre.

Ayant gagné la première partie, j'aurai donc encore 1 partie à gagner contre 4; l'ayant perdue, encore 2 contre 3. J'ai donc des chances égales d'avoir $\frac{15}{16}a$ ou $\frac{11}{16}a$, ce qui me vaut $\frac{13}{16}a$ d'après le première Propofition [1]). Il en réfulte

[1]) Voir la p. 63.

ick dan een kans tegen een om a te hebben of $\frac{3}{4}a$, het welck fo veel is door het 1ste Voorstel [1]) als $\frac{7}{8}a$. En blijft $\frac{1}{8}a$ voor den anderen. Soo dat mijn kans is tot de fyne als 7 tot 1.

Gelijck nu tot defe reeckeningh vereyfcht is geweeft de voorgaende, fo is wederom defe nodigh tot de volgende, te weeten, als men ftelt dat my 1 fpel ontbreeckt, ende mijn party 4 fpelen. En werdt op gelijcke manier bevonden, dat my komt $\frac{15}{16}$ van 't geen ingefet is, en hem $\frac{1}{16}$.

VI. Voorstel.

Zij geftelt dat my twee fpelen ontbreecken, en hem die tegen my fpeelt drie fpelen.

Nu fal gebeuren door het eerste fpel, of dat my noch 1 fpel fal ontbreecken en hem 3 (toekomende my daerom door het voorgaende $\frac{7}{8}a$), of dat ons elck noch twee fpelen fullen ontbreecken, waer door my komt $\frac{1}{2}a$, om dat dan elck even goede kans heeft. Maer ick heb een kans tegen een, om het eerfte fpel te winnen of te verliefen; foo heb ick dan ghelijcke kans tot $\frac{7}{8}a$ of $\frac{1}{2}a$, het welck my weerdt is $\frac{11}{16}a$ door het eerfte Voorstel [1]). Soo dat my komen elf deelen van 't geen ingeftelt is, en die tegens my fpeelt vijf deelen.

VII. Voorstel.

Zy geftelt dat aen my noch twee fpelen ontbreecken en hem 4 fpelen.

Soo fal ick het eerfte fpel winnende noch 1 fpel tegen 4 te winnen hebben; of, het felve verliefende, noch 2 tegen 3. Soo dat ick gelijcke kans heb tot $\frac{15}{16}a$ of $\frac{11}{16}a$, dat foo veel is als $\frac{13}{16}a$, door het 1ste Voorftel [1]). Waer uyt blijckt dat het

qu'il eſt plus avantageux d'avoir deux parties à gagner contre quatre, qu'une contre deux. Car dans ce dernier cas: à ſavoir le cas d'une partie contre deux, ma part eſt $\frac{3}{4}a$ d'après la 4ième Propoſition [1]), ce qui eſt moins que $\frac{13}{16}a$.

Proposition VIII.

Suppoſons maintenant que trois perſonnes jouent enſemble et qu'il manque une partie à la première ainſi qu'à la deuxième, mais qu'il en manque deux à la troiſième.

Pour calculer la part du premier joueur, il faut derechef tenir compte de ce qui lui reviendrait ſi lui-même ou ſi l'un des deux autres gagnait la première partie. S'il la gagnait, il obtiendrait l'enjeu que j'appelle a. Si le deuxième gagnait cette partie, le premier n'aurait rien, car le deuxième aurait terminé le jeu. Si le troiſième gagnait, il manquerait encore une partie à chacun des trois: par ſuite le premier, ainſi que chacun des deux autres, aurait droit à $\frac{1}{3}a$. Le premier a donc 1 chance d'obtenir a, 1 chance d'obtenir 0, et 1 chance d'obtenir $\frac{1}{3}a$ (car chacun des trois a la même chance de gagner la première partie), ce qui lui vaut $\frac{4}{9}a$ d'aprés la deuxième Propoſition [2]). Au deuxième joueur revient donc la même part, c'eſt-à-dire, $\frac{4}{9}a$, de ſorte qu'il reſte $\frac{1}{9}a$ pour le troiſième. On aurait pu trouver directement la part de ce dernier et calculer en partant de là la part des autres [3]).

Proposition IX [4]).

Pour calculer la part de chacun d'un nombre donné de joueurs, auxquels manquent des parties en nombres donnés pour chacun d'eux ſéparément [5]), il faut d'abord ſe rendre

---

[1]) Voir la p. 67.
[2]) Voir la p. 65.
[3]) Voir pour une rédaction antérieure de la solution du même problème le début de l'Appendice I, p. 92—93.

beter kans is 2 ſpelen te moeten winnen tegen 4, als een ſpel tegen twee. Want in dit laetſte geval, te weeten, van 1 tegen 2, ſo is mijn deel $\frac{3}{4}a$, door het 4[de] Voorſtel [1]), zijnde minder als $\frac{13}{16}a$.

VIII. Voorstel.

Laet ons nu ſtellen dat drie perſoonen t'ſamen ſpeelen, daer van den eerſten 1 ſpel ontbreeckt, den tweeden mede 1 ſpel, maer den derden 2 ſpelen.

Om het deel van den eerſten te vinden, ſo moet weder aengemerckt werden wat hem ſoude komen, indien hy of een van de twee anderen het eerſte ſpel quam te winnen. Als hy het won ſoo had hy het geen dat ingeſet is, 't welck zy a. Als het den tweeden won ſoo hadde den eerſten niets, want den tweeden ſoude daar mede uyt zijn. Als het den derden won ſoo ſoude aen elck van drien noch 1 ſpel ontbreecken, en daerom den eerſten ſo wel als elck van d'andere $\frac{1}{3}a$ toekomen. Soo iſſer dan voor den eerſten 1 kans tot a, 1 kans tot 0, en een kans tot $\frac{1}{3}a$, (want het even licht kan gebeuren aen yeder van drien het eerſte ſpel te winnen,) het welck hem weerdt is $\frac{4}{9}a$ door het 2[de] Voorstel [2]). Soo komt dan oock voor den tweeden $\frac{4}{9}a$, en voor den derden blijft over $\frac{1}{9}a$. Wiens deel in 't byſonder oock hadde konnen gevonden worden, en daer door de andere haer deelen bepaelt [3]).

IX. Voorstel [4]).

Om tuſſchen ſoo veel ſpeelders als voor-geſtelt zijn, waer van d'eene meer en d'ander minder ſpeelen ontbreecken een ieder haer deel te vinden [5]), ſoo moet ingeſien worden, wat

[4]) Cette Proposition manquait dans le manuscrit envoyé à van Schooten le 20 avril 1656, elle doit avoir été ajoutée en 1656 après le 6 mai, date de la Pièce N°. 289, p. 415 du T. I, ou en 1657; voir encore les pp. 5, 7 et 8 de l'Avertissement.

[5]) Voir, sur la solution générale de ce problème, les p. 21—25 et la note 3 de la p. 28 de l'Avertissement.

compte de ce qui reviendrait à celui dont on veut ſavoir la part dans le cas où lui et dans ceux où chacun des autres à ſon tour aurait gagné la première partie ſuivante. En ajoutant toutes ces parts et en diviſant la ſomme par le nombre des joueurs ou trouve la part cherchée du joueur conſidéré.

Suppoſons que 3 perſonnes A, B et C jouent enſemble et qu'il manque 1 partie à A, 2 à B et également 2 à C. On veut ſavoir quelle part de l'enjeu que j'appelle q revient au joueur B.

Nous devons examiner d'abord à quelles parts B aurait droit, ſi lui-même ou A ou C aurait gagné la première partie ſuivante. Si A la gagnait, il aurait terminé le jeu. B recevrait par conſéquent 0. Si B était lui-même le gagnant, 1 partie lui manquerait encore, ainſi qu'à A, tandis qu'il en manquerait 2 à C. B aurait donc droit à $\frac{4}{9}q$ d'après la huitième Propoſition.

Enfin, ſi C gagnait la première partie ſuivante, il manquerait 1 partie à A et à C, tandis qu'il en manquerait 2 à B; B, par conſéquent, aurait droit à $\frac{1}{9}q$ d'après la même Propoſition VIII.

Il faut maintenant ajouter les parts qui reviendraient à B dans ces trois hypothèſes, ſavoir 0, $\frac{4}{9}q$ et $\frac{1}{9}q$. Il vient $\frac{5}{9}q$. En diviſant ce nombre par 3, le nombre des joueurs, on trouve $\frac{5}{27}q$. C'eſt là la part juſte du joueur B.

On le démontre par la deuxième Propoſition [1]). En effet, comme B a des chances égales d'obtenir 0, $\frac{4}{9}q$ ou $\frac{1}{9}q$, il poſſède, d'après cette Propoſition, pour ainſi dire $\dfrac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$ ou $\frac{5}{27}q$ [2]). Et il eſt certain que le diviſeur 3 eſt égal au nombre des joueurs.

Mais pour ſavoir ce qui reviendra dans chaque cas à chaque joueur lorſque lui-même ou l'un quelconque des autres aura gagné la première partie ſuivante, il faut d'abord faire le calcul pour les cas les plus ſimples et enſuite, en partant de là, pour les cas ſuivants. Car de même que le dernier cas que nous avons conſidéré ne pouvait être ſoumis au calcul ſans que d'abord la huitième Propoſition eût été réſolue, dans laquelle les parties manquantes étaient aux nombres de 1, de 1 et de 2, de même auſſi la part de chaque joueur au cas où les nombres des parties manquantes ſont 1, 2, 3 [3]) ne peut être calculée ſans qu'on cherche d'abord cette

[1]) Voir la p. 65.

hem, wiens deel men begeert te weeten, ſoude toekomen, indien of hy, of elck van d'andere in 'tbeſonder het eerſte volgende ſpel quam te winnen. Dit dan alles te ſaemen geaddeert en door het getal der ſpeelders gedeelt, ſoo komt het geſochte gedeelte van den eenen.

Zy genomen dat 3 perſoonen A, B, en C te ſaemen ſpeelen, en dat aen A een ſpel ontbreeckt, aen B 2 ſpelen, en aen C van gelijcken 2 ſpelen. Men begeert te weeten wat deel aen B toekomt van het geene ingeſet is, het welck zy genoemt q.

Voor eerſt moeten wy onderſoecken wat B ſoude komen, als hy ſelfs, of A, of C het eerſte volgende ſpel quam te winnen. Als het A won, ſo ſoude hy uyt zijn, en dienvolgens ſoude B toekomen o. Als B ſelfs het won, ſo ontbrack hem noch 1 ſpel, en aen A mede 1 ſpel, maer aen C 2 ſpelen. Daerom ſoude B in dit geval toekomen $\frac{4}{9}q$ door het 8ste Voorſtel.

Eyndelijck als C het eerſte volgende ſpel quam te winnen, ſoo ſoude A en C elck 1 ſpel ontbreecken, maer aen B 2 ſpelen; en diēnvolgens ſoude B komen $\frac{1}{9}q$, door het ſelfde 8ste Voorſtel. Nu moet geaddeert werden het geen in deze 3 voorvallen aen B ſoude toekomen, te weeten, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$ en komt $\frac{5}{9}q$. Dit door 3, het getal der ſpeelders, gedeelt, komt $\frac{5}{27}q$. 'Twelck B zijn gerechte deel is. Het bewijs nu hier van blijckt door het 2de Voorſtel [1]). Want naer dien B gelijcke kans heeft tot o, $\frac{4}{9}q$, of $\frac{1}{9}q$, ſoo heeft hy door het 2de Voorſtel ſoo veel als $\dfrac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$ dat is $\frac{5}{27}q$ [2]). Ende het is ſeecker dat deſen diviſor 3 het getal van de ſpeelders is.

Doch om te weeten, wat iemandt komt in elck geval, te weeten, als hy ſelfs of een van d'andere het eerſte volgende ſpel wint: ſoo moeten de ſimpelſte voorvallen eerſt uytgevonden werden, en door haer behulp de volgende. Want gelijck dit laetſte voorval niet konde afgedaen werden ſonder dat eerſt dat van het 8ste Voorſtel uytgereeckent was, in 't welck de reſterende ſpelen waeren 1, 1, 2, ſoo kan insgelijcks ieders deel niet gevonden werden in ſo een geval, als de reſterende ſpelen zijn 1, 2, 3 [3]), of men moet eerſt uytgereeckent hebben het voorval van 1, 2, 2

[2]) Le même problème est résolu dans l'Appendice I à la p. 93.

[3]) Ce problème aussi est traité dans l'Appendice I aux p. 93—95; mais Huygens a manqué alors la solution exacte.

part dans le cas des nombres 1, 2, 2, comme nous venons de le faire, ainſi que dans celui des nombres 1, 1, 3, ce qui peut être fait d'après la huitième Propoſition. C'eſt en ſuivant cette méthode qu'on trouve les parts correſpondant aux nombres du tableau ſuivant, ainſi qu'à une infinité d'autres.

Tableau pour trois joueurs.

Parties qui leur manquent.	1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3
Leurs parts.	4.4.1	17.5.5	13.13.1	19.6.2
	9	27	27	27

Parties qui leur manquent.	1.1.4	1.1.5	1.2.4	1.2.5
Leurs parts.	40.40.1	121.121.1	178.58.7	542.179.8
	81	243	243	729

Parties qui leur manquent.	1.3.3	1.3.4	1.3.5
Leurs parts.	65.8.8	616.82.31	629.87.13
	81	729	729

Parties qui leur manquent.	2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.3.3	2.3.4	2.3.5
Leurs parts.	34.34.13	338.338.53	353.353.23	133.55.55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

À l'égard des dés, on peut poſer ces queſtions: à ſavoir en combien de fois l'on peut accepter de jeter avec un dé un 6 ou bien un des autres nombres; de même en combien de fois 2 ſix avec 2 dés ou 3 ſix avec 3 dés. Et bien d'autres queſtions encore. Pour les réſoudre, il faut remarquer ce qui ſuit.

D'abord qu'on peut faire avec un dé ſix coups différents également vraiſemblables. Car je ſuppoſe que le dé a la forme d'un *Cube* parfait.

Enſuite qu'on peut faire 36 coups différents avec 2 dés, leſquels ont auſſi des vraiſemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième dé peut ſe combiner. Et 6 fois 6 font 36.

De même qu'il y a 216 coups de 3 dés. Car avec chacun des 36 coups

gelijck wy terſtond gedaen hebben, ende noch dat van 1, 1, 3, het welck door behulp van het 8ste Voorſtel mede konde bereeckent werden. Op deſe manier dan werden vervolgens al de voorvallen uytgevonden, die in de volgende tafel zijn vervat, en oneyndelijcke andere.

Tafel voor drie Speelders.

Spelen die haer ontbreecken.	1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3
Haer deelen.	4.4.1	17.5.5	13.13.1	19.6.2
	9	27	27	27

Spelen die haer ontbreecken.	1.1.4	1.1.5	1.2.4	1.2.5
Haer deelen.	40.40.1	121.121.1	178.58.7	542.179.8
	81	243	243	729

Spelen die haer ontbreecken.	1.3.3	1.3.4	1.3.5
Haer deelen.	65.8.8	616.82.31	629.87.13
	81	729	729

Spelen die haer ontbreecken.	2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.3.3	2.3.4	2.3.5
Haer deelen.	34.34.13	338.338.53	353.353.23	133.55.55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

De dobbel-ſteenen aengaende konnen deſe queſtien werden voorgeſtelt, te weeten, van hoeveel reyſen men kan nemen met eene ſteen een 6 te werpen of een van d'ander ooghen. Oock van hoeveel reyſen 2 ſeſſen met 2 ſteenen, of 3 ſeſſen met 3 ſteenen. Ende noch veel andere. Om welcke te ſolveeren, ſo moet hier op werden acht genomen.

Eerſtelijck dat op 1 ſteen zijn 6 verſcheyde werpen, die even licht konnen gebeuren. Want ick neeme dat een dobbel-ſteen de perfecte figure van een *Cubus* heeft.

Voorts, dat op 2 ſteenen ſijn 36 verſcheyde werpen, die inſgelijcx even licht konnen voorkomen. Want tegen elcke werp van de eene ſteen kan een van de 6 werpen van d'andere ſteen te gelijck boven leggen. En 6 mael 6 maeckt 36.

Oock dat op 3 ſteenen zijn 216 werpen. Want tegen elck van de 36 werpen

des 2 dés peut fe combiner l'un quelconque des 6 coups du troifième. Et 6 fois 36 font 216.

On trouve de la même façon qu'il y a 6 × 216 ou 1296 coups de quatre dés; et qu'on peut en continuant ainfi calculer le nombre de coups pour un nombre quelconque de dés: on multiplie par 6 le nombre précédent de coups, chaque fois qu'on ajoute un nouveau dé.

Enfuite, il faut favoir qu'avec deux dés on ne peut faire qu'un coup de 2 ou de 12 points, et 2 coups de 3 ou de 11 points. En effet, fi nous appelons les dés A et B refpectivement, il eft évident que pour jeter 3 points A peut donner un as et B un 2, ou bien B un as et A un 2. De même pour obtenir 11 points, A peut donner 5 et B 6, ou bien A 6 et B 5. Le coup de 4 points eft triple, favoir A 1, B 3, ou A 3, B 1, ou A 2, B 2. Le coup de 10 points eft également triple. Celui de 5 ou de 9 points, quadruple. Celui de 6 ou de 8 points, quintuple. Celui de 7 points, fextuple.

Avec 3 dés l'on trouve pour	3 ou 18	points	1	coups différents.
	4 ou 17		3	
	5 ou 16		6	
	6 ou 15		10	
	7 ou 14		15	
	8 ou 13		21	
	9 ou 12		25	
	10 ou 11		27	

Proposition X.

Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter un fix avec un dé.

Il eft certain que le joueur qui accepte de jeter un 6 en un feul coup à 1 chance de gagner l'enjeu et 5 de perdre. Car il y a 5 coups contre lui et pas plus qu'un feul pour lui. Appelons l'enjeu a. Il a donc 1 chance d'obtenir a et 5 chances de n'obtenir rien, ce qui d'après la deuxième Propofition [1]) lui vaut $\frac{1}{6}a$. Il refte $\frac{5}{6}a$ pour celui qui l'engage à jeter le dé. Celui qui joue une partie d'un feul coup, ne peut donc mettre que 1 contre 5.

La part de celui qui parie de jeter un 6 en deux coups, eft calculée de la façon fuivante. S'il jette un 6 la première fois, il gagne a. S'il manque fon coup, il en a encore un, ce qui lui vaut $\frac{1}{6}a$ d'après le calcul précédent. Mais il n'a qu'une chance de jeter un 6 du premier coup et il en a 5 de manquer ce coup. Il a donc

der 2 ſteenen kan een van de 6 werpen komen, die op de derde zijn. En 6 mael 36 maeckt 216.

Van gelijcken blijckt, dat op 4 ſteenen zijn 6 mael 216 werpen, dat is, 1296; en dat men ſoo voort de werpen van ſoo veel ſteenen als men wil kan bereeckenen, altijdt door het toe-doen van eene ſteen 6 mael de werpen der voorgaende nemende.

Vorders moet men weeten, dat op twee ſteenen maer eene werp en is van 2 of 12 oogen, en 2 werpen van 3 of 11 oogen. Want gevende aen de ſteenen de naemen van A en B, ſoo blijckt dat om 3 oogen te werpen op A een aes kan zijn, en op B een 2; of op B een aes, en op A een 2. Van gelijcken om 11 oogen te hebben, ſo kan op A 5 zijn, en op B 6; of op A 6 en op B 5. Van 4 oogen zijnder 3 werpen, te weeten, A 1, B 3; of A 3, B 1; of A 2, B 2. Van 10 oogen inſgelijcks 3 werpen. Van 5 of 9 oogen 4 werpen. Van 6 of 8 oogen 5 werpen. Van 7 oogen 6 werpen.

Op 3 ſteenen vindt men van	3 of 18	oogen	1	werpen.
	4 of 17		3	
	5 of 16		6	
	6 of 15		10	
	7 of 14		15	
	8 of 13		21	
	9 of 12		25	
	10 of 11		27	

X. Voorstel.

Te vinden van hoeveel reyſen men kan neemen een 6 te werpen met eene ſteen.

Die het ten eerſten neemt, het is ſeecker dat hy 1 kans heeft om te winnen, ende te hebben het geen ingeſet is, tegen 5 kanſſen om te verlieſen. Want daer ſijn 5 werpen tegen hem, en maer een voor hem. Het geen ingeſet is zy genoemt a. Soo heeft hy dan 1 kans om te hebben a, en 5 kanſſen om 0 te hebben, het welck door het 2de Voorſtel [1]) ſo veel is als $\frac{1}{6}a$. En blijft voor die het hem geeft te werpen $\frac{5}{6}a$. Soo dat hy maer 1 tegen 5 kan ſetten, die het ten eerſten neemt.

Die van tween eens een 6 neemt te werpen, werdt ſijn deel aldus bereeckent. Indien hy de eerſte reys een 6 raeckt, ſoo heeft hy a. Indien hy miſt, ſoo heeft hy noch eene werp, dewelcke door het voorgaende ſoo veel is als $\frac{1}{6}a$. Maer hy heeft maer een kans om in de eerſte reys een 6 te werpen, en 5 kanſſen om die te miſſen.

[1]) Voir la p. 65; mais il s'agit plutôt de la troisième Proposition qu'on trouve à la même page.

au commencement 1 chance d'obtenir a et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{6}a$, ce qui lui vaut $\frac{11}{36}a$ d'après la deuxième Propofition. Il refte $\frac{25}{36}a$ pour celui qui gage contre lui. Celui qui joue en 2 coups peut donc mettre 11 contre 25, ce qui eft moins que 1 contre 2.

En partant de ce réfultat, on calcule de la même manière que la part de celui qui parie de jeter un 6 en trois coups eft $\frac{91}{216}a$. Il peut donc mettre 91 contre 125, c'eft-à-dire à peu près 3 contre 4.

La part de celui qui joue en 4 coups eft $\frac{671}{1296}a$. Il peut donc mettre 671 contre 625, c'eft-à-dire plus que 1 contre 1.

La part de celui qui joue en 5 coups eft $\frac{4651}{7776}a$; il peut mettre 4651 contre 3125, c'eft-à-dire à peu près 3 contre 2.

La part de celui qui joue en 6 coups eft $\frac{31031}{46656}a$, et il peut mettre 31031 contre 15625, c'eft-à-dire à peu près 2 contre 1.

On peut pourfuivre ce calcul fucceffivement pour chaque nombre de coups. Mais on peut auffi avancer par de plus grands bonds, comme nous l'indiquerons à la Propofition fuivante; fans quoi le Calcul deviendrait fort long.

Proposition XI.

Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter 2 fix avec 2 dés.

Celui qui joue en un feul coup, a 1 chance de gagner, c'eft-à-dire d'avoir a, contre 35 chances de perdre, c'eft-à-dire d'avoir 0, attendu qu'il y a 36 coups. De forte qu'il a $\frac{1}{36}a$ d'après la deuxième Propofition [1]).

Quant à celui qui joue en 2 coups, il gagne a s'il jette 2 fix la première fois. S'il manque fon coup la première fois, il lui en refte encore un, ce qui lui vaut $\frac{1}{36}a$ d'après ce que nous venons de dire. Mais il n'a qu'une chance de jeter 2 fix la première fois contre 35 chances de manquer fon coup. Il a donc au commence-

[1]) Voir la p. 65.

So heeft hy dan van eerſten aen 1 kans om a te hebben, en 5 kanſſen tot $\frac{1}{6}a$, het welck door het 2de Voorſtel ſoo veel is als $\frac{11}{36}a$. Ende blijft voor die het hem geeft $\frac{25}{36}a$. Soo dat die het van tween neemt 11 tegen 25 kan ſtellen, dat is, min als 1 tegen 2.

Hier uyt nu werdt op deſelve manier bereeckent, dat die van dryen eens neemt een 6 te werpen, zijn deel is $\frac{91}{216}a$. Soo dat hy kan 91 tegen 125 ſetten, dat is, weynigh min als 3 tegen 4.

Die het van vieren neemt, ſijn deel is $\frac{671}{1296}a$. Soo dat hy 671 tegen 625 kan ſetten, dat is, meer als 1 tegen 1.

Die het van vyven neemt, ſyn deel is $\frac{4651}{7776}a$, ende kan 4651 tegen 3125 ſetten, dat is, weynig min als 3 tegen 2.

Die het van ſeſſen neemt, ſijn deel is $\frac{31031}{46656}a$, ende kan 31031 tegen 15625 ſetten, dat is, weynigh min als 2 tegen 1.

Aldus kan men vervolgens yder getal van werpen vinden. Maer men kan oock met grooter ſprongen voort gaen, gelijck wy in 't volgende Voorſtel aenwyſen ſullen, ſonder 't welck de Reeckening anders ſeer lang ſoude vallen.

XI. Voorstel.

Te vinden van hoe veel reyſen men kan neemen 2 ſeſſen te werpen met 2 ſteenen.

Die het ten eerſten neemt, heeft 1 kans om te winnen, dat is, om a te hebben, tegen 35 kanſſen om te verlieſen ofte 0 te hebben; om datter 36 werpen zijn. Sulcx dat hy door het 2de Voorſtel [1]) heeft $\frac{1}{36}a$.

Die het van tween neemt, indien hy de eerſte reys 2 ſeſſen werpt, ſoo heeft hy a. Indien hy d'eerſte reys miſt, ſoo heeft hy noch eene werp overig, dat is, door 't geen geſeyt is, ſoo veel als $\frac{1}{36}a$. Maer hy heeft maer 1 kans om in de eerſte reys 2 ſeſſen te werpen, tegen 35 kanſſen om die te miſſen. Soo heeft hy dan van eerſten aen 1 kanſſe tot a, en 35 kanſſen tot $\frac{1}{36}a$, het welck door het 2de Voor-

ment 1 chance d'obtenir a et 35 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$ d'après la deuxième Propofition. Il refte $\frac{1225}{1296}a$ pour celui qui l'engage à jeter. On peut trouver en partant de là la chance ou la part de celui qui joue en 4 coups; on peut fauter le cas du jeu en 3 coups.

En effet, celui qui joue en 4 coups, obtient a, s'il jette 2 fix l'une des deux premières fois; finon, il lui refte encore 2 coups, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$ d'après le calcul précédent. Mais d'après le même calcul il a 71 chances de jeter 2 fix l'une des deux premières fois, contre 1225 chances de les manquer. Il a donc au commencement 71 chances d'obtenir a et 1225 chances d'obtenir $\frac{71}{1296}a$; ce qui, d'après la deuxième Propofition, lui vaut $\frac{178991}{1679616}a$. Il refte $\frac{1500625}{1679616}a$ pour celui qui gage contre lui. Leurs chances font donc l'une à l'autre comme 178991 eft à 1500625.

Partant de là, on trouve de la même manière la chance de celui qui parie de jeter une fois 2 fix en 8 coups. Enfuite, en partant de là, la chance de celui qui joue en 16 coups. Et en partant de la chance de ce dernier, jointe à celle de celui qui joue en 8 coups, on trouve la chance de celui qui joue en 24 coups. Dans ce calcul, comme il s'agit furtout de chercher pour quel nombre de coups les chances des deux joueurs commencent à devenir égales, on peut omettre une partie des derniers Chiffres des nombres qui fans cela deviendraient très grands. Je trouve que celui qui joue en 24 coups a encore un léger défavantage, et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant en 25 coups au moins [1]).

Proposition XII.

Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 fix du premier coup.

Cela équivaut à vouloir favoir en combien de coups d'un feul dé l'on peut compter jeter deux fois un 6. D'après ce que nous avons démontré plus haut [2]), celui qui accepterait de jeter 2 fix en 2 coups, aurait droit à $\frac{1}{36}a$.

---

[1]) On trouvera aux p. 26—28 de l'Avertissement une discussion du problème en question et de celui qui le suit.

ſtel ſoo veel is als $\frac{71}{1296}a$. En blijft voor die het hem geeft te werpen $\frac{1225}{1296}a$. Hier uyt nu kan gevonden worden, wat kans ofte deel hy heeft die het neemt van 4 werpen, overſlaende de kanſſe van die het neemt van dryen.

Want die het van vieren neemt, indien hy het doet in een van de 2 eerſte reyſen, ſoo heeft hy a; indien niet, ſoo heeft hy noch 2 werpen overig, dat is, door 't geen te vooren geſeyt is, ſoo veel als $\frac{71}{1296}a$. Maer hy heeft oock door het ſelve 71 kanſſen om van de 2 eerſte werpen eens 2 ſeſſen te werpen, tegen 1225 kanſſen om die te miſſen. Soo heeft hy dan van eerſten aen 71 kanſſen tot a, en 1225 kanſſen tot $\frac{71}{1296}a$; het welck door het 2de Voorſtel ſo veel weerdt is als $\frac{178991}{1679616}a$. Ende blijft voor die het hem geeft $\frac{1500625}{1679616}a$. Staende haere kanſſen tegen een, als 178991 tegen 1500625.

Hier uyt werdt vorders op deſelve manier gevonden de kans, van die van 8 reyſen eens 2 ſeſſen neemt te werpen. En daer uyt dan wederom de kans, van die het neemt van 16 reyſen. En uyt deſe ſijn kans, ende uyt de kans van die het neemt van 8 werpen, werdt gevonden de kans van die het neemt van 24gen. In welcke werckingh, alſoo voornamentlijck maer geſocht werdt in wat getal van werpen de gelijcke kanſſe begint tuſſchen die het neemt en geeft, ſoo magh men van de getalen, die anders ſeer groot ſouden werden, een deel van de achterſte Cijfers af-ſnijden. Ick vinde dat die het neemt van 24gen, noch yets te kort komt; en dat het eerſt van 25gen genomen kan werden met voordeel [1]).

XII. Voorstel.

Te vinden met hoe veel ſteenen men kan nemen ten eerſten 2 ſeſſen te werpen.

Dit is ſoo veel dan of men wilde weeten, in hoe menige werp met eene ſteen men kan nemen tweemael een 6 te raecken. Het welck die het in 2 werpen nam, ſoude, door het geen hier te vooren is beweſen [2]), $\frac{1}{36}a$ toekomen.

---

[2]) Voir l'avant-dernier alinéa de la p. 81.

Quant à celui qui jouerait en 3 coups, ſi ſon premier coup n'était pas un 6, il lui reſterait encore 2 coups leſquels devraient être des 6 l'un et l'autre; ce que nous avons dit valoir $\frac{1}{36}a$. Mais ſi ſon premier coup eſt un 6, il ne lui faut plus jeter qu'un ſeul 6 dans les deux coups ſuivants, ce qui d'après la dixième Propoſition [1]) lui vaut $\frac{11}{36}a$. Or, il eſt certain qu'il a 1 chance de jeter un 6 du premier coup contre 5 chances de le manquer. Il a donc au commencement 1 chance d'obtenir $\frac{11}{36}a$ et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui d'après la deuxième Propoſition [2]) lui vaut $\frac{16}{216}a$ ou $\frac{2}{27}a$. Prenant ainſi chaque fois un coup de plus, on trouve qu'on peut accepter avec avantage de jeter 2 ſix avec un dé en 10 coups ou avec 10 dés en un coup [3]).

Proposition XIII.

Dans l'hypothèſe que je joue un coup de deux dés contre une autre perſonne à condition que s'il vient 7 points, j'aurai gagné, mais qu'elle aura gagné s'il en vient 10, et que nous partagerons l'enjeu en parties égales s'il vient autre choſe, trouver la part qui revient à chacun de nous.

Comme parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 6 de 7 points et 3 de 10 points, il en reſte 27 qui ne font gagner ni l'un ni l'autre. Dans ce dernier cas, nous avons chacun droit à $\frac{1}{2}a$. Mais ſinon, j'ai 6 chances de gagner, c'eſt-à-dire d'avoir a, et 3 chances de perdre, c'eſt-à-dire d'avoir 0; ce qui d'après la deuxième Propoſition [2]) me vaut $\frac{2}{3}a$ pour ce cas. J'ai donc au commencement 27 chances d'avoir $\frac{1}{2}a$ et 9 chances d'avoir $\frac{2}{3}a$; ce qui d'après la deuxième Propoſition me vaut $\frac{13}{24}a$. Et il reſte $\frac{11}{24}a$ pour l'autre joueur.

---

[1]) Voir les p. 79—81.
[2]) Voir la p. 65 et consultez la note 1 de la p. 79.

Die het in dryen nam, indien zijn eerste werp geen 6 en waer, soo had hy noch 2 werpen, die beyde een 6 souden moeten zijn; het welck geseyt is soo veel weerdt te zijn als $\frac{1}{36}a$. Maer zijn eerste werp een 6 wesende, soo behoeft hy van tween noch maer eens een 6 te werpen, het welck soo veel is door het 10de Voorstel [1]) als of hy $\frac{11}{36}a$ hadde. Nu is seecker dat hy 1 kans heeft om ten eersten een 6 te werpen, tegen 5 kanssen om die te missen. Soo heeft hy dan van eersten aen 1 kans tot $\frac{11}{36}a$, en 5 kanssen tot $\frac{1}{36}a$, het welck door het 2de Voorstel [2]) soo veel is als $\frac{16}{216}a$ of $\frac{2}{27}a$. Op dese manier t'elckens een werp meer nemende soo werdt bevonden, dat in 10 werpen met eene steen, of met 10 steenen ten eersten, kan genomen werden 2 sessen te werpen, en dat met voordeel [3]).

XIII. Voorstel.

Als ick tegen een ander speel met 2 steenen alleen eene werp, op conditie, dat, indien der 7 oogen komen, ick winnen sal; maer hy, indiender 10 oogen komen; en ingevalle iets anders, dat wy dan gelijckelijck deelen sullen het geen ingeset is: Te vinden wat deel daer van ons elck toekomt.

Dewijl van de 36 werpen, die op 2 steenen zijn, 6 werpen zijn van 7 oogen, en 3 werpen van 10 oogen, soo resteren noch 27 werpen, die het spel konnen kamp maecken. Het welck gebeurende so komt ons ieder $\frac{1}{2}a$. Maer als het geen kamp is, soo heb ick 6 kanssen om te winnen dat is om a te hebben, en 3 kanssen om te verliesen ofte 0 te hebben; het welck door het 2de [2]) soo veel is, als of ick in sulcken geval $\frac{2}{3}a$ hadde. Soo heb ick dan van eersten aen 27 kanssen tot $\frac{1}{2}a$, en 9 kanssen tot $\frac{2}{3}a$; het welck door het 2de soo veel is als $\frac{13}{24}a$. En blijft voor den anderen $\frac{11}{24}a$.

---

[3]) Voir la note 1 de la p. 82.

Proposition XIV.

Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laiſſe le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la ſienne.

Soit x la valeur de ma chance, et a l'enjeu. La chance de l'autre joueur a donc la valeur $a-x$. Il eſt évident auſſi que chaque fois que c'eſt ſon tour de jeter, ma chance aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'eſt mon tour de jeter, ma chance doit avoir une valeur ſupérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à mon adverſaire et lui faire gagner la partie, et 31 coups à ſon déſavantage, c'eſt-à-dire qui amènent mon tour de jeter, j'ai 5 chances d'avoir o lorſqu'il jette la première fois, et 31 chances d'avoir y; ce qui d'après la troiſième Propoſition [1]), me vaut $\frac{31y}{36}$. Mais nous avons poſé que ma chance valait x au commencement du jeu. De ſorte que $\frac{31y}{36}=x$, partant $y=\frac{36x}{31}$. Nous avons poſé en outre que ma chance vaut y, lorſque c'eſt mon tour de jeter. Mais lorſque je jette, j'ai 6 chances d'avoir a, attendu qu'il y a 6 coups de 7 points qui me font gagner; et j'ai 30 chances de faire revenir le tour de mon adverſaire, c'eſt-à-dire d'avoir pour ma part x. La valeur y eſt donc équivalente à 6 chances d'avoir a et 30 chances d'avoir x; ce qui, d'après la troiſième Propoſition, me vaut $\frac{6a+30x}{36}$. Cette expreſſion étant donc égale à y, et y d'après ce qui précède à $\frac{36x}{31}$, il faut que $\frac{30x+6a}{36}$ ſoit égal à $\frac{36x}{31}$, d'où l'on tire $x=\frac{31a}{61}$; valeur de ma chance. Par conſéquent, la chance de mon adverſaire vaudra $\frac{30a}{61}$. Le rapport de nos chances eſt donc de 31 à 30 [2]).

---

[1]) Voir la p. 65. C'est la seule fois que la Prop. III est citée dans le présent Traité. Comparez la note 1 de la p. 79.

[2]) Consultez encore sur cette Proposition les pp. 4 et 6 de l'Avertissement et la note 2 de la p. 88.

XIV. Voorstel.

Als ick en noch een ander met beurten werpen met 2 steenen, ende bespreecken dat ick sal winnen, soo haest ick 7 ooghen werp, ende hy, soo haest als hy 6 ooghen werpt, mits dat ick hem de voorwerp geve. Te vinden in wat reden mijn kans tegen de sijne staet.

Laet mijn kans weert sijn x, ende het geen ingeset is sy genoemt a; soo is dan de kans van den anderen weerdt $a-x$. Het blijckt oock dat elcke mael, als sijn beurt van werpen weder komt, mijn kans dan weder moet x weerdt zijn. Maer soo dickmaels als het mijn beurt is te werpen, soo moet mijn kans meerder weerdt zijn. Laet ons y stellen voor het geene datse dan weerdt is. Overmits nu datter 5 werpen zijn van de 36 werpen op 2 steenen, die mijn tegen speelder 6 ooghen konnen geven, ende het spel doen winnen, en 31 werpen die hem doen missen, dat is, die mijn beurt van werpen doen komen: soo heb ick dan, als hy begint te werpen, 5 kanssen om 0 te hebben, en 31 kanssen om te hebben y; het welck door het 3de Voorstel [1]) weerdt is $\frac{31y}{36}$. Maer daer is gestelt, dat mijn kans van eersten aan x weerdt is. Soo is dan $\frac{31y}{36} \infty x$, en daerom $y \infty \frac{36x}{31}$. Voorts soo is gestelt, dat, mijn beurt van werpen gekomen zijnde, mijn kans dan y weerdt is. Maer ick sullende werpen, soo heb ick 6 kanssen tot a; om datter 6 werpen zijn van 7 ooghen, dewelcke my doen winnen; en ick heb 30 kanssen om de beurt van mijn tegen-speelder te doen wederkeeren, dat is, om voor my x te hebben. Soo is dan y soo veel weerdt als 6 kanssen tot a en 30 kanssen tot x; 't welck door het 3de Voorstel soo veel is als $\frac{6a + 30x}{36}$. Dit dan zijnde gelijck aen y, ende te voren gevonden zijnde $\frac{36x}{31} \infty y$, soo moet $\frac{30x + 6a}{36}$ gelijck zijn aen $\frac{36x}{31}$; waer uyt gevonden werdt $x \infty \frac{31a}{61}$, het welck de weerde is van mijn kans. En diensvolgens sal de kans van die tegens my speelt weerdt zijn $\frac{30a}{61}$. Soo dat onse kanssen tegen malkanderen staen, als 31 tot 30 [2]).

Je termine en faifant fuivre encore quelques Propofitions[1]).

I [2]). A et B jouent enfemble avec 2 dés à la condition fuivante: A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un feul coup; enfuite B 2 coups fucceffifs; puis de nouveau A 2 coups, et ainfi de fuite, jufqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B? Réponfe: comme 10355 eft à 12276.

II [3]). Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs; ils jouent à cette condition que celui gagnera qui aura le premier, en choififfant à l'aveuglette, tiré un jeton blanc, et que A choifira le premier, B enfuite, puis C, puis de nouveau A et, ainfi de fuite, à tour de rôle. On demande le rapport de leurs chances?

III [4]). A parie contre B, que de 40 cartes, dont dix de chaque couleur, il en tirera 4 de manière à en avoir une de chaque couleur. On trouve dans ce cas que la chance de A eft à celle de B comme 1000 eft à 8139.

IV [5]). On prend comme plus haut 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs. A parie

---

[1]) Voir sur ces Exercices les p. 29—30 de l'Avertissement.

[2]) On doit ce problème à Fermat; voir la p. 433 du T. I. Après avoir résolu la Prop. XIV de Huygens, transmise à lui par l'intermédiaire de Carcavy (voir les pp. 428 et 430 du T. I), Fermat inventa ce problème plus compliqué, qu'il fit parvenir à Huygens par la même voie (voir la lettre du 22 juin 1656 de Carcavy, p. 432 du T. I et l'Appendice, p. 433 du même Tome, qui y appartient). Huygens en envoya sa solution à Carcavy par sa lettre du 6 juillet 1656 (p. 442 du T. I). On trouve les solutions de de Monmort et de Jacques Bernoulli respectivement aux pp. 216—217 et 49—51 de leurs ouvrages, cités dans les notes 11 et 13 de la p. 9 du présent Tome; celle de Struyck aux p. 32—34 de l'édition française de ses Œuvres, citée dans la note 14 de la p. 9. Et nous avons reproduit celle de Spinoza dans la note 7 de la p. 29.

[3]) Aux p. 57—65 de son „Ars conjectandi" Bernoulli distingue trois interprétations différentes qu'on peut donner à l'énoncé de ce problème. En premier lieu on peut supposer que chaque jeton noir qui ait été tiré est remis parmi les autres jetons, de sorte que les joueurs ont toujours à choisir entre 4 jetons blancs et 8 noirs. En second lieu, lorsque les jetons ne sont pas remis, on peut supposer que les joueurs prennent *tous ensemble* 12 jetons, ou bien que *chaque* joueur prend 12 jetons pour en tirer un lorsque c'est son tour de jouer.

Huygens, comme il résulte du § 1 de l'Appendice II, p. 96 du présent Tome, avait en vue la première de ces trois interprétations, tandis que Hudde adopta la deuxième dans la

Volgen tot een besſluyt noch eenige Voorſtellen [1]).

I [2]). A en B ſpeelen teghen malkander met 2 ſteenen, op deſe conditie: dat A ſal winnen als hy 6 oogen werpt, maer B ſal winnen als hy 7 oogen werpt. A ſal eerſt eene werp doen; daernae B twee werpen achtervolgens; dan weder A 2 werpen; en ſoo voorts, tot dat d'een of d'ander ſal winnen. De vrage is in wat reden de kans van A ſtaet tegen die van B? antw. als 10355 tot 12276.

II [3]). Drie ſpeelders A, B en C nemende 12 ſchijven, van de welcke 4 wit zijn en 8 ſwart, ſpeelen op conditie, dat die van haer blindeling eerſt een witte ſchyve ſal gekoſen hebben winnen ſal, en dat A de eerſte ſal nemen, B de tweede, en dan C, en dan wederom A, en ſoo vervolgens met beurten. De vraghe is in wat reden haere kanſſen ſtaen tegens malkander?

III [4]). A wed tegens B, dat hy uyt 40 kaerten, dat is, 10 van ieder ſoort, 4 kaerten uyttrecken ſal, ſoo dat hy van elcke ſoorte een ſal hebben. Hier wordt de kans van A tegen die van B gevonden, als 1000 tegen 8139.

IV [5]). Genomen hebbende ghelijck hier te vooren 12 ſchyven, 4 witte en 8 ſwarte; ſoo wed A tegen B dat hy blindeling 7 ſchyven ſal daer uyt nemen,

---

solution qu'il envoya à Huygens en 1665; voir les p. 10—11 de l'Avertissement. Bernoulli, au lieu cité, résoud le problème pour chacune des trois interprétations. De Monmort, p. 219—220 de son „Essay", de Moivre, p. 229—232 du Mémoire de 1711, cité dans la note 12 de la p. 9 et p. 49—57 de sa „Doctrine of chances", citée dans la même note, et Struyck, p. 34—38 de l'édition française de ses „Œuvres", s'occupent tous de la première et de la deuxième interprétation, la troisième étant en effet un peu forcée, et donnent les solutions qui y correspondent.

4) Ce problème est dû à Fermat; voir la p. 434 du T. I. Huygens dans sa lettre à Carcavy en donne la solution numérique sans y ajouter son analyse (p. 444 du même Tome). On trouve la solution de de Monmort aux p. 221—222 de son „Essay", celles de Bernoulli aux pp. 66 et 144—145 de l'„Ars conjectandi", celle de Struyck aux p. 38—39 de ses „Œuvres".

5) Le problème admet deux interprétations différentes sur lesquelles on peut consulter le deuxième alinéa de la note 6 de la p. 96 et les notes 1 et 2 de la p. 100 du présent Tome. À la p. 20 de l'Avertissement nous avons comparé les solutions de Huygens (p. 97—101) aux solutions plus simples obtenues à l'aide de l'analyse combinatoire, telles qu'on en trouve chez de Monmort (p. 220—221 de son „Essay"), chez de Moivre (p. 235—236 du Mémoire de 1711), chez Bernoulli, (p. 145—146 de l'„Ars conjectandi") et chez Struyck (p. 39—40 de ses „Œuvres").

contre B que parmi 7 jetons qu'il en tirera à l'aveuglette, il ſe trouvera 3 blancs. On demande le rapport de la chance de A à celle de B.

V [1]). Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec 3 dés à cette condition q'u'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et qui celui là gagnera qui ſera le premier en poſſeſſion de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A eſt à celle de B comme 244140625 eſt à 282429536481.

F I N.

[1]) Ce problème fut proposé par Pascal à Fermat. Huygens en reçut communication dans une lettre de Carcavy, datée du 28 septembre 1656 (p. 493 du T. I). Il en envoya la solution à Carcavy au 12 octobre 1656 (p. 505—506 du T. I). Plus tard, probablement en 1676 (voir la p. 15 de l'Avertissement), Huygens s'occupa de nouveau du problème et en élabora une solution qu'on trouve aux p. 151—155 du présent Tome. Dans la note 2 de la p. 154 nous

onder welcke 3 witte ſullen zijn. Men vraegt in wat reden de kans van A ſtaet tegen die van B.

V [1]). A en B genomen hebbende elck 12 penningen ſpelen met 3 dobbelſteenen op deſe conditie: dat, alſ'er 11 oogen geworpen worden, A een penning aen B moet geven; maer alſ'er 14 geworpen werden, dat dan B een penning aen A moet geven; en dat hy het ſpel winnen ſal, die eerſt al de penningen ſal hebben. Hier werdt ghevonden de kans van A tegen die van B te zijn, als 244140625 tot 282429536481.

EYNDE.

citons les solutions de Bernoulli, de de Monmort, de de Moivre et de Struyck. Ajoutons encore que c'est à ce problème que les célèbres recherches sur la durée des parties doivent leur origine; voir les p. 268—277 de l'édition de 1713 (citée dans la note 11 de la p. 9 du présent Tome) de l'„Essay" de de Monmort, les p. 251—264 du Mémoire de 1711 de de Moivre, les p. 162—191 de sa „Doctrine of chances", comme aussi les p. X—XI de la Préface de ce dernier ouvrage.

APPENDICE I[1])

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1656].

S'il reſte 1 jeu à gaigner à A et 1 à B, et 2 jeux à C, combien vaudra la place de chaſcun poſé qu'ils ayent mis chacun 2 eſcus au jeu.

Si C perd le premier jeu il perdra 2 eſcus, s'il le gaigne il ſera quite, mais c'eſt deux contre un qu'il gaigne ce premier jeu, il a donc deux hazards pour perdre 2 eſcus, et 1 pour eſtre quite. Partant je dis que ſa part des 6 eſcus eſt $\frac{2}{3}$ eſcu[2]). Car prenant ces $\frac{2}{3}$ d'eſcu, il trouvera deux autres qui mettront $\frac{2}{3}$ d'eſcu contre ſes $\frac{2}{3}$[3]). Et [ils] joueront à qui aura le tout, ſçavoir 2 eſcus, en quoy il aura meſme chance qu'auparavant, à ſcavoir 2 hazards pour perdre ſes $\frac{2}{3}$ d'eſcu, c'eſt a dire 2 eſcus, y adjouſtant ce qu'il aura laiſſé à A et B: et un hazard pour

---

[1]) Cet Appendice, emprunté à une feuille séparée, contient la solution de la Prop. VIII (p. 73) du texte du Traité que nous venons de reproduire et de deux problèmes, traités (p. 77) dans la Prop. IX du même Traité. C'est probable qu'il fut composé à l'occasion de la correspondance, en 1656, avec Carcavy; voir les p. 6—8 de l'Avertissement.

[2]) Consultez la Prop. III, p. 65. D'ailleurs Huygens au lieu de se rapporter à cette Proposition fait suivre une démonstration qui en est indépendante.

[3]) De cette manière Huygens fait reposer la démonstration de sa solution sur l'axiome qu'il a énoncé au commencement du deuxième alinéa de la p. 61.

eſtre quite, en gaignant aux deux autres chacun leur $\frac{2}{3}$ d'eſcu. Car ainſi il aura 2 eſcus, comme auparavant qu'il avoit jouè contre A et B. Il s'en ſuit que les places de A et de B valent chacune $2\frac{2}{3}$ eſcus. Et ſi l'on diviſe ce qui eſt au jeu en 9 parties, A en prendra 4. B. 4. C. 1 [4]).

S'il reſte 1 jeu à gaigner à A. 2 à B. et 2 à C, 6 eſcus au jeu.

Si A gaigne le premier il gaigne 4 eſcus. ſi B ou C le gaigne, A gaigne $\frac{2}{3}$ eſcus par la precedente, donques A a 2 hazards pour gaigner $\frac{2}{3}$ eſcus et 1 hazard pour gagner 4 eſcus. Je dis que des 6 eſcus ſa part eſt $3\frac{7}{9}$ eſcu. C'eſt à dire qu'il gaigne $1\frac{7}{9}$ eſcus, car prenant outre ſes 2 eſcus qu'il avoit mis, encore $1\frac{7}{9}$ eſcus que je dis qu'il gaigne il mettra $\frac{10}{9}$ eſcus contre deux autres qui en mettront $\frac{10}{9}$ eſcus chacun, pour jouer qui aura tout. Et par ainſi il aura 1 hazard pour gaigner $\frac{30}{9}$ eſcus qui avec les $\frac{6}{9}$ eſcus qu'il aura mis a part, le feront gaigner 4 eſcus et deux hazards pour ne gaigner que $\frac{6}{9}$ c'eſt $\frac{2}{3}$ eſcus qu'il aura mis à part. donc B et C auront des 6 eſcus chacun $1\frac{1}{9}$ eſcus. Et ſi l'on diviſe ce qui eſt au jeu en 27 parties, A prendra 17. B et C chacun 5 [5]).

S'il reſte 1 à A. 2 à B. 3 jeux à C. 6 eſcus au jeu. combien vaut la place de chacun.

Si A gaigne le premier jeu il gaigne 4 eſcus. s'il le perd il a un hazard pour gaigner $\frac{2}{3}$ eſcus [6]) et un pour gaigner $1\frac{7}{9}$ eſcus [7]), qui vaut autant que s'il eſtoit

---

[4]) Comparez la solution de la Prop. VIII, p. 73.

[5]) Comparez le deuxième cas de la „Table pour trois joueurs", p. 77.

[6]) Évidemment il s'agit ici du cas où c'est B qui gagne. Alors il reste à A 1 jeu, à B 1 et à C 3 jeux à gagner. Huygens aurait donc dû calculer les „hazards" de ce cas et il aurait trouvé $\frac{8}{9}$ au lieu de $\frac{2}{3}$ écu. Ce n'est que par mégarde qu'il a pris ce dernier nombre qui se rapporte au cas, traité au début de cette Pièce, où il manque à A 1 jeu, à B 1 et à C 2 jeux.

[7]) On lit en marge „par précedente"; voir, en effet, la solution du cas où il reste à A 1 à B 2 et à C 2 jeux à gagner.

asseurè de gaigner (en cas de perte du dit premier jeu) $\frac{11}{9}$ escus, qui vaut la moitiè des dits $\frac{2}{3}+1\frac{7}{9}$. Or il a deux hazards pour perdre le premier jeu, et un hazard pour le gaigner. donques il a un hazard pour gaigner 4 escus et 2 pour gaigner $\frac{11}{9}$ escus. Je dis qu'il gaigne $2\frac{4}{27}$ ou bien $\frac{58}{27}$ escus. Car prenant cecy et mettant a part $\frac{11}{9}$ escus il mettra le reste qui est $\frac{25}{27}$ contre deux autres qui mettront chacun autant. Et ainsi il aura 1 hazard pour gagner $\frac{25}{9}$ escus cest a dire (y adjoutant $\frac{11}{9}$ qu'il s'est reservè) $\frac{36}{9}$ ou 4 escus et 2 hazards pour ne gagner que les $\frac{11}{9}$ escus qu'il s'est reservè. Sa part donc des 6 escus est $2+2+\frac{4}{27}$ escus c'est $4\frac{4}{27}$ escus [1]).

Pour scavoir combien aura B. Je dis, si B gaigne le premier jeu il gaignera $\frac{2}{3}$ escus [2]) per primam. s'il le perd, il court fortune esgale de perdre 2 escus ou de perdre $\frac{8}{9}$ escus per secundam. qui est autant que si en perdant ce premier jeu il perdoit $\frac{13}{9}$ escus scavoir la moitie de $2+\frac{8}{9}$. Or il a 2 hazards pour perdre le 1er jeu et 1 hazard pour le gagner. Donq il a 2 hazards pour perdre $\frac{13}{9}$ escus et 1 hazard pour gaigner $\frac{2}{3}$ escus. Je dis qu'il aura des 6 escus $\frac{34}{27}$ ou $1\frac{7}{27}$ escus [3]). Car prenant $\frac{34}{27}$ escus il en mettra $\frac{19}{27}$ escus contre deux autres qui chacun en mettront autant et ainsi aura 1 hazard pour gagner $\frac{19}{9}$ escus, qui avec $\frac{15}{27}$ escus ou $\frac{5}{9}$

---

[1]) En vérité $4\frac{2}{9}$.

[2]) Même confusion entre les cas 1, 1, 2 et 1, 1, 3. On doit remplacer, comme auparavant $\frac{2}{3}$ par $\frac{8}{9}$.

[3]) En vérité $1\frac{1}{3}$.

[4]) En vérité $\frac{4}{9}$.

qu'il a refervez apart font $\frac{24}{9}$ ou $2\frac{2}{3}$, c'eft à dire qu'il gaignera $\frac{2}{3}$ efcus. Et deux hazards pour n'avoir que les $\frac{5}{9}$ efcus refervez, c'eft en perdre $\frac{13}{9}$ efcus parce qu'il avoit mis 2 efcus au jeu.

Il s'en suit que C aura des 6 efcus $\frac{16}{27}$ [4]). Ergo fi l'on divife le tout en 81 parties, A prendra 56, B 27, C 8 [5]).

---

[5]) Dans le „Tableau pour trois joueurs" (p. 77 du présent Tome) cette solution erronée est remplacée par la véritable d'après laquelle de 27 parties A en prendra 19, B 6 et C 2.

APPENDICE II [1])

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1665.]

§ 1 [2]).

A B C
x y z [3])

A heeft kanssen 4 tot a, 8 tot z [4])

$$\frac{4a + 8z}{12} \infty x \text{ [5])}$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}z \infty x$$

B heeft kanssen 4 tot o, 8 tot x

$$\frac{0 + 8x}{12} \infty y$$

$$\frac{2}{3}x \infty y$$

C heeft kanssen 4 tot o, 8 tot y

$$\frac{8y}{12} \infty z$$

$$y = \frac{3}{2}z$$

$$\frac{2}{3}x \infty \frac{3}{2}z;\ x \infty \frac{9}{4}z$$

$$\frac{9}{4}z \infty \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}z;\ z \infty \frac{4}{19}a;\ y \infty \frac{6}{19}a;\ x = \frac{9}{19}a$$

---

[1]) Cet Appendice, que nous avons divisé en paragraphes, contient les solutions de Huygens du deuxième et du quatrième des Exercices ajoutés par lui à son Traité (voir la p. 89 du présent Tome). D'après le lieu qu'il occupe aux p. 42—44 du Manuscrit C il doit dater de 1665. On retrouve les résultats des §§ 1 et 2 dans la lettre de Huygens à Hudde du 4 avril 1665, p. 304 du T. V. Consultez encore, à propos des §§ 2—4, la p. 20 de l'Avertissement.

[2]) Ce paragraphe traite du deuxième Exercice.

[3]) x, y et z représentent respectivement les espérances mathématiques des trois joueurs A, B, C au commencement du jeu.

[4]) Traduction: „A a 4 chances d'avoir a, 8 d'avoir z". a représente l'enjeu.

[5]) D'après la Prop. III, p. 65 du présent Tome. ∞ est le signe d'égalité employé par Huygens.

[6]) Traduction: „A parie contre B que parmi 12 jetons, dont 4 blancs et 8 noirs, il prendra à

§ 2.

A wedt tegen B dat hij uit 12 ſchijven, daer van 4 witte en 8 ſwarte ſijn, ſal 7 ſchijven blindeling nemen waeronder 3 witte ſullen ſijn, en niet meer. Vraghe wat reden de kans van A heeft tegen die van B, facit als 35 tot 64 [6]).

Soo A genomen hebbende 6 ſchijven heeft 3 witte en 3 ſwarte. ſoo heeft 1 kans tot 0 en 5 kanſen tot a (pot) [7]). $\frac{0+5a}{6} \infty \frac{5}{6}a$ [8])

6 [ſchijven] 2 [wit] 4 [zwart] $\frac{2.a+4.0}{6} \infty \frac{1}{3}a$

5 „ 3 „ 2 „ $\frac{1.0+6.\frac{5}{6}a}{7} \infty \frac{5}{7}a$

5 „ 2 „ 3 „ $\frac{2.\frac{5}{6}a+5.\frac{1}{3}a}{7} \infty \frac{10}{21}[a]$

5 „ 1 „ 4 „ $\frac{3.\frac{1}{3}[a]+4.0}{7} \infty \frac{1}{7}[a]$

4 „ 3 „ 1 „ $\frac{1.0+7.\frac{5}{7}[a]}{8} \infty \frac{5}{8}[a]$

4 „ 2 „ 2 „ $\frac{2.\frac{5}{7}[a]+6.\frac{10}{21}[a]}{8} \infty \frac{15}{28}[a]$

---

l'aveuglette 7 jetons dont 3 seront blancs, et pas plus. On demande le rapport de la chance de A à celle de B; réponse: comme 35 est à 64".

On voit que ce problème est identique au quatrième des Exercices qu'on trouve aux p. 89—91. Seulement, en conséquence d'un malentendu qui avait eu lieu entre lui et Hudde sur la conception du problème, Huygens a ajouté à l'énoncé les mots „en niet meer", qui indiquent que, pour gagner, A doit prendre 3 jetons blancs „et pas plus". Consultez sur le malentendu en question les pp. 304 et 307 du Tome V.

7) Traduction: „Si A, ayant pris 6 jetons, en a 3 de blanc et 3 de noir, il a une chance d'avoir zéro et 5 d'avoir a (l'enjeu)".

8) Comme on le verra Huygens suppose que les jetons sont pris l'un après l'autre et il commence par calculer l'espérance mathématique de A après le sixième coup dans les deux seuls cas où celui-ci peut gagner au septième coup. Ensuite il considère la situation du jeu après le cinquième coup, et ainsi de suite, pour remonter enfin jusqu'au commencement du jeu.

4 [ſchijven]	1 [wit]		3 [zwart]		$\frac{3\cdot\frac{10}{21}[a]+5\cdot\frac{1}{7}[a]}{8}$	$\infty\ \frac{15}{56}[a]$
4	,,	0 ,,	4	,,	$\frac{4\cdot\frac{1}{7}[a]+4\cdot 0}{8}$	$\infty\ \frac{1}{14}[a]$
3	,,	3 ,,	0	,,	$\frac{1.0+8.\frac{5}{8}[a]}{9}$	$\infty\ \frac{5}{9}[a]$
3	,,	2 ,,	1	,,	$\frac{2.\frac{5}{8}[a]+7\cdot\frac{15}{28}[a]}{9}$	$\infty\ \frac{5}{9}[a]$
3	,,	1 ,,	2	,,	$\frac{3\cdot\frac{15}{28}[a]+6.\frac{15}{56}[a]}{9}$	$\infty\ \frac{5}{14}[a]$
3	,,	0 ,,	3	,,	$\frac{4\cdot\frac{15}{56}[a]+5\cdot\frac{1}{14}[a]}{9}$	$\infty\ \frac{10}{63}[a]$
2	,,	2 ,,	0	,,	$\frac{2.\frac{5}{9}[a]+8.\frac{5}{9}[a]}{10}$	$\infty\ \frac{5}{9}[a]$
2	,,	1 ,,	1	,,	$\frac{3\cdot\frac{5}{9}[a]+7\cdot\frac{5}{14}[a]}{10}$	$\infty\ \frac{5}{12}[a]$
2	,,	0 ,,	2	,,	$\frac{4\cdot\frac{5}{14}[a]+6.\frac{10}{63}[a]}{10}$	$\infty\ \frac{5}{21}[a]$
1	,,	1 ,,	0	,,	$\frac{3\cdot\frac{5}{9}[a]+8.\frac{5}{12}[a]}{11}$	$\infty\ \frac{15}{33}[a]$
1	,,	0 ,,	1	,,	$\frac{4\cdot\frac{5}{12}[a]+7\cdot\frac{5}{21}[a]}{11}$	$\infty\ \frac{10}{33}[a]$
0	,,	0 ,,	0	,,	$\frac{4\cdot\frac{15}{33}[a]+8.\frac{10}{33}[a]}{12}$	$\infty\ \frac{35}{99}[a]$

Ergo de kans van A tot die van B als 35 tot 64 [1]).

§ 3 [2]).

De voorgaande kans van A is nootſakelijk even ſoo veel dan of hij uyt de voorſegde 12 ſchijven moeſte nemen 5 waeronder 1 witte [3]).

4 [ſchijven]	1 [wit]	3 [zwart]	$\frac{3.0 + 5.a}{8}$	[∞] $\frac{5}{8}a$
4 „	0 „	4 „	$\frac{4.a + 4.0}{8}$	[∞] $\frac{1}{2}a$
3 „	1 „	2 „	$\frac{3.0 + 6.\frac{5}{8}[a]}{9}$	[∞] $\frac{5}{12}[a]$
3 „	0 „	3 „	$\frac{4.\frac{5}{8}[a] + 5.\frac{1}{2}[a]}{9}$	[∞] $\frac{5}{9}[a]$
2 „	1 „	1 „	$\frac{3.0 + 7.\frac{5}{12}[a]}{10}$	[∞] $\frac{7}{24}[a]$
2 „	0 „	2 „	$\frac{4.\frac{5}{12}[a] + 6.\frac{5}{9}[a]}{10}$	[∞] $\frac{1}{2}[a]$
1 „	1 „	0 „	$\frac{3.0 + 8.\frac{7}{24}[a]}{11}$	[∞] $\frac{7}{33}[a]$
1 „	0 „	1 „	$\frac{4.\frac{7}{24}[a] + 7.\frac{1}{2}[a]}{11}$	[∞] $\frac{14}{33}[a]$
0 „	0 „	0 „	$\frac{4.\frac{7}{33}[a] + 8.\frac{14}{33}[a]}{12}$	[∞] $\frac{35}{99}[a]$. bon.

[1]) Traduction: „Par conséquent la chance de A est à celle de B comme 35 est à 64".

[2]) Ce paragraphe contient une vérification de la solution obtenue au paragraphe précédent.

[3]) Traduction: „La chance précédente de A est nécessairement aussi grande que dans le cas où parmi les 12 jetons mentionnés il en devait prendre 5 dont un blanc". Remarquons qu'il s'agit dans ce dernier cas des jetons qui, suivant la première supposition, n'ont pas été pris, dont 4 sont noirs et 1 blanc. Nous appellerons le problème qui s'y rattache: le problème complémentaire.

§ 4 [1].

ijsdem positis, maer datter ten minste 3 witte onder de 7 getrocken schijven sullen sijn [2].

4 [schijven]	1 [wit]	3 [zwart]	$\frac{3.0 + 5.a}{8}$	[∞]	$\frac{5}{8}a$ [3]
3 „	1 „	2 „	$\frac{3.0 + 6.\frac{5}{8}[a]}{9}$	[∞]	$\frac{5}{12}[a]$
3 „	0 „	3 „	$\frac{4.\frac{5}{8}[a] + 5.a}{9}$	[∞]	$\frac{5}{6}[a]$
2 „	1 „	1 „	$\frac{3.0 + 7.\frac{5}{12}[a]}{10}$	[∞]	$\frac{7}{24}[a]$
2 „	0 „	2 „	$\frac{4.\frac{5}{12}[a] + 6.\frac{5}{6}[a]}{10}$	[∞]	$\frac{2}{3}[a]$
1 „	1 „	0 „	$\frac{3.0 + 8.\frac{7}{24}[a]}{[11]}$	[∞]	$\frac{7}{33}[a]$

---

[1]) Ce paragraphe contient la solution du quatrième Exercice proposé par Huygens si l'on donne à ce problème l'interprétation que Hudde y avait attachée; comparez le deuxième alinéa de la note 6 qui commence à la p. 96.

[2]) Traduction: „[Solution du problème précédent] sous les mêmes suppositions, mais avec cette différence qu'il faut qu'il y ait *au moins* trois blancs parmi les 7 jetons qu'on a pris".

[3]) Pour simplifier le calcul Huygens commence par remplacer le problème en question par le problème complémentaire (voir la note 3 de la p. 99) d'après lequel A prend 5 jetons dont quatre, au moins, doivent être noirs. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de discuter le cas de 4 jetons dont 0 blancs et 4 noirs, parce qu'alors le cinquième coup fera toujours gagner A.

[4]) C'est, en effet, le résultat obtenu par Hudde; voir la p. 304 du T. V. Ajoutons qu'un peu plus haut dans le Manuscrit C, aux p. 36—37, on rencontre un autre calcul qui se rapporte au même problème et qui doit avoir précédé celui que nous avons reproduit. Ce calcul fut biffé plus tard et Huygens le signala comme „misrekent" (mal calculé). En le parcourant, on s'aperçoit d'abord que Huygens y a suivi, comme dans ce § 4, l'interprétation de Hudde,

1 [ſchijven] o [wit] 1 [zwart] $\dfrac{4.\frac{7}{24}[a] + 7.\frac{2}{3}[a]}{[11]}$ [∞] $\frac{35}{66}[a]$

o „ o „ o „ $\dfrac{4.\frac{7}{33}[a] + 8.\frac{35}{66}[a]}{[12]}$ [∞] $\frac{42}{99}[a]$

42 [tot] 57

14 [tot] 19. bon [4]).

---

puisqu'il considère le jeu comme gagné quand A, déja en possession de 2 jetons blancs et de 3 jetons noirs, prend ensuite 1 jeton blanc. De cette manière il trouve dans ce cas de 2 jetons blancs et 3 jetons noirs pour l'espérance mathématique de A: $\dfrac{2a + 5.\frac{1}{3}a}{7} = \frac{11}{21}a$, au lieu de $\frac{10}{21}a$, comme au § 2 de la présente Pièce. Il aurait donc dû arriver au résultat obtenu par Hudde, mais au cas de 1 jeton blanc et 4 jetons noirs il commet une erreur de calcul en écrivant „$\dfrac{3.a + 0}{7} \infty \frac{3}{7}a$" au lieu de $\dfrac{3.\frac{1}{3}a + 0}{7} \infty \frac{1}{7}a$; ce qui explique l'inexactitude du résultat final auquel il parvient.

APPENDICE III [1])

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1665.]

J[an] heeft 2 witte ſchijven en 1 ſwarte, maer P. heeft 1 witte en 2 ſwarte. En ieder uit ſijn ſchijven met beurten een uytkieſende blindeling, die een ſwarte krijght moet een ♁ (ducaet) inſetten, maar die een witte krijght, ſtrijckt alles dat ingeſet is, en J kieſt eerſt als noch niets ingeſet is. de vraghe is hoe veel J van eerſten aen hier door wint of verlieſt, antw. J wint $\frac{207}{343}$ van een ducaet [2]).

+ *a*	is	't geen	heeft	P.	als	hij	0	tegen	0	heeft	ingeſet	en	J.	moet	werpen [3]).
− *b*	„	„	„	Jan	„	„	1	„	0	„	„	„	P.	„	„
− *c*	„	„	„	P.	„	„	1	„	1	„	„	„	J.	„	„
− *d*	„	„	„	Jan	„	„	2	„	1	„	„	„	P.	„	„
− *e*	„	„	„	P.	„	„	2	„	2	„	„	„	J.	„	„
− *f*	„	„	„	Jan	„	„	3	„	2	„	„	„	P.	„	„
− *g*	„	„	„	P.	„	„	3	„	3	„	„	„	J.	„	„
− *h*	„	„	„	J.	„	„	4	„	3	„	„	„	P.	„	„ [4])

---

[1]) Cet Appendice est emprunté aux p. 45—47 du Manuscrit C; ces pages étaient numérotées 1—3 par Huygens. On y trouve la solution d'un problème posé par Huygens dans une lettre à Hudde du 10 mai 1665; voir les p. 352—353 du Tome V. Ajoutons que ce problème était une modification d'un autre problème proposé par Hudde à Huygens dans la lettre du 5 mai 1665; voir les p. 350—351 du même Tome. On peut encore consulter sur ces problèmes les p. 34—37 de l'Avertissement.

[2]) Traduction: „J[ean] a 2 jetons blancs et 1 noir, mais P. 1 blanc et 2 noirs. Et chacun à son tour choisit à l'aveuglette un de ses jetons. Celui qui obtient un jeton noir doit ajouter un ♁ (ducat) à l'enjeu, mais celui qui obtient un jeton blanc reçoit tout ce qui a été mis. Et J. choisit la première fois, quand il n'y a encore rien à l'enjeu. On demande combien est l'avantage ou le désavantage de J. au commencement du jeu. Rép. J. gagne $\frac{207}{343}$ d'un ducat."

$+k$ is 't geen heeft J. als hij o tegen o heeft ingeset en P. moet werpen.
$-l$ „ „ „ P. „ „ 1 „ o „ „ „ J. „ „
$-m$ „ „ „ J. „ „ 1 „ 1 „ „ „ P. „ „
$-n$ „ „ „ P. „ „ 2 „ 1 „ „ „ J. „ „
$-o$ „ „ „ J. „ „ 2 „ 2 „ „ „ P. „ „
$-p$ „ „ „ P. „ „ 3 „ 2 „ „ „ J. „ „ [5]

1.$-b$ en 2.$+k$[6]

$-a \infty \frac{-b+2k}{3}$

$-3a+b \infty 2k$

$a \infty \frac{b-2k}{3}$

$-b \infty$ 1.$-\delta$ 2.$+c$[7]

$-b \infty \frac{-\delta+2c}{3}$

$\frac{1}{3}b \infty \frac{-2c+\delta}{9}$

$-c \infty$ 2.$-\delta$ 1.$+d$

$\frac{2}{9}c \infty -\frac{2}{27}d+\frac{4}{27}\delta$[8]

$-d \infty$ 1.-2δ 2.$+e$

$\frac{2}{27}d \infty \frac{4}{81}\delta-\frac{4}{81}e$

$-e \infty$ 2.-2δ 1.$+f$

$-\frac{4}{81}e \infty -\frac{16}{243}\delta+\frac{4}{243}f$

$-f \infty$ 1.-3δ 2.$+g$

$\frac{4}{243}f \infty \frac{12}{729}\delta-\frac{8}{729}g$

$-g \infty$ 2.-3δ 1.$+h$

$-\frac{8}{729}g \infty -\frac{48}{2187}\delta+\frac{8}{2187}h$

$-h \infty$ 1.-4δ 2.$+i$

$\frac{8}{2187}h \infty \frac{32}{6561}\delta-\frac{16}{6561}i$

---

[3]) Traduction: „$+a$ est l'avantage de P. quand il a mis o contre o et que J. doit choisir". Remarquons que Huygens a donc supposé, en commençant ces calculs, que l'avantage se trouverait du côté de P, mais que les calculs lui ont appris le contraire.

[4]) Plus bas dans le manuscrit ces définitions préalables sont continuées encore en introduisant les lettres *i*, ℵ, ℶ, ℷ, mais nous avons cru pouvoir supprimer ces dernières définitions.

[5]) Ces définitions aussi sont continuées plus bas en introduisant les lettres *q*, *r*, *t* et *v*.

[6]) Cette notation (1.$-b$ et 2.$+k$) indique, comme Huygens l'expliquera expressément dans une autre Pièce que nous reproduirons plus bas (voir la p. 124 du présent Tome), que J[ean] a (au commencement du jeu) une chance d'obtenir $-b$ et deux d'obtenir $+k$. On voit donc que Huygens suppose que le jeu se continuera si Jean prend un jeton blanc au premier coup. Or, cette supposition a donné lieu à un nouveau malentendu entre Hudde et lui, puisque Hudde considérait que le jeu était fini dans ce cas (voir les pp. 381 et 422 du T. V). D'après cette dernière interprétation on aurait donc $k=0$.

[7]) En effet, il est évident que l'avantage de l'un des joueurs est toujours égal au désavantage de l'autre.

[8]) Nous supprimons, ici et dans la suite, quelques calculs tout-à-fait analogues à ceux qui précèdent.

$-i \infty 2.-4\delta \quad 1.+\aleph$

$-\frac{16}{6561} i \infty -\frac{128}{[19683]}\delta + \frac{16}{[19683]}\aleph$

$\aleph \infty 1.-5\delta \quad 2.+\text{ר}$

$\aleph \infty \frac{-5\delta + 2\text{ר}}{3}$

$k \infty 2.+l \quad 1.-a$

$\frac{2}{3}k \infty \frac{4}{9}l - \frac{2}{9}a$

$-l \infty 2.-\delta \quad 1.+m$

$\frac{4}{9}l \infty \frac{8}{27}\delta - \frac{4}{27}m$

$-m \infty 1.-\delta \quad 2.+n$

$\frac{4}{27}m \infty \frac{4}{81}\delta - \frac{8}{81}n$

$-n \infty 2.-2\delta \quad 1.+o$

$-\frac{8}{81}n \infty -\frac{32}{243}\delta + \frac{8}{243}o$

$-o \infty 1.-2\delta \quad 2.+p$

$\frac{8}{243}o \infty \frac{16}{729}\delta - \frac{16}{729}p$

$-p \infty 2.-3\delta \quad 1.+q$

$-\frac{16}{729}p \infty -\frac{96}{2187}\delta + \frac{16}{2187}q$

$-q \infty 1.-3\delta \quad 2.+r$

$\frac{16}{2187}q \infty \frac{48}{6561}\delta - \frac{32}{6561}r$

$-r \infty 2.-4\delta \quad 1.+s$

$-\frac{32}{[6561]}r \infty -\frac{256}{[19683]}\delta + \frac{32}{[19683]}s$

$-s \infty 1.-4\delta \quad 2.+t$

$\frac{32}{[19683]}s \infty \frac{128}{[59049]}\delta + \frac{64}{[59049]}t$

$-t \infty 2.-5\delta \quad 1.+v$

$-t \infty \frac{-10\delta + v}{3}$

A B

$a \infty \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}k$ [1]

---

[1]) Voir la première équation obtenue à la p. 103. Dans ce qui suit Huygens désignera par A le premier terme $\frac{1}{3}b$, par B le deuxième terme $-\frac{2}{3}k$ du second membre de cette équation.

[2]) Huygens veut indiquer ainsi qu'on peut remplacer $-\frac{2}{9}c$ par $-\frac{4}{27}\delta + \frac{2}{27}d$; voir les calculs qu'on trouve aux p. 103—104.

[3]) Comme on le verra, la solution de Huygens repose sur la supposition que ce dernier terme (et aussi celui de l'expression pour B) s'approche indéfiniment de zéro. Cela admis, il ne s'agit plus que de sommer les suites infinies formées par les termes qui contiennent δ. Comparez encore à propos de cette supposition la note 1 de la p. 112.

A

$$\frac{1}{3}b \infty \frac{1}{9}\vartheta - \frac{2}{9}c$$

$$-\frac{4}{27}\vartheta + \frac{2}{27}d$$ [2])

$$+\frac{4}{81}\vartheta - \frac{4}{81}e$$

$$-\frac{16}{243}\vartheta + \frac{4}{243}f$$

$$+\frac{12}{729}\vartheta - \frac{8}{729}g$$

$$-\frac{48}{2187}\vartheta + \frac{8}{2187}h$$

$$\left[-\frac{16}{6561}i\right] \qquad +\frac{32}{6561}\vartheta - \frac{16}{6561}i$$

$$-\frac{128}{[12683]}\vartheta + \frac{16}{[19683]}\aleph$$

$$+\frac{80}{[59049]}\vartheta - \frac{32}{[59049]}\daleth$$ [3])

B

$$-\frac{2}{3}k \infty \frac{2}{9}a - \frac{4}{9}l$$

$$-\frac{8}{27}\vartheta + \frac{4}{27}m$$

$$+\frac{4}{81}\vartheta - \frac{8}{81}n$$

$$-\frac{32}{243}\vartheta + \frac{8}{243}o$$

$$+\frac{16}{729}\vartheta - \frac{16}{729}p$$

$$-\frac{96}{2187}\vartheta + \frac{16}{2187}q$$

$$\left[-\frac{32}{6561}r\right] \qquad +\frac{48}{6561}\vartheta - \frac{32}{6561}r$$

$$-\frac{256}{[19683]}\vartheta + \frac{32}{[19683]}s$$

$$+\frac{128}{[59049]}\vartheta - \frac{64}{[59049]}t$$

$$-\frac{640}{[177147]}\vartheta + \frac{64}{[177147]}v$$

Theorema.

Si ſint magnitudines in ratione geometrica continue deſcendentes erit maxima cum omnibus reliquis in infinitum ad ſolam maximam ſicut maxima ad exceſſum maximæ ſupra ſequentem. Ergo ſi ſint ut 4 ad 1 erit maxima cum omnibus ad maximam ut 4 ad 3.

Si ſint ut 9 ad 2, erit maxima cum omnibus ad maximam ut 9 ad 7. ſive maxima cum omnibus erit $\frac{9}{7}$ maximæ.

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{4}{81} & \frac{8}{729} & \frac{16}{6561} & \frac{32}{59049} \\ & \frac{8}{729} & \frac{16}{6561} & \frac{32}{59049} \\ & & \frac{16}{6561} & \frac{32}{59049} \\ & & & \frac{32}{59049} \end{array}\right\} \text{les} + \text{de B.}^{1)}$$

hic[2]) ſequens eſt $\frac{2}{9}$ precedentis.

$\frac{9}{7}$ [van] $\frac{4}{81}$ [∞] $\frac{4}{63}$ ∞ de bovenſte rij

$\frac{9}{7}$ van $\frac{4}{63}$ [∞] $\frac{4}{49}$ ∞ al de rijen dat is ∞ de + van B[3])

les + de B aux − de B ut 1 ad 6
les − de B aux — de A ut 2 ad 1
les — de A aux + de A ut 4 ad 3

[1]) En effet, la somme de tous ces nombres est égale à celle des quatre premiers coefficients positifs de ϑ dans la suite B qui résulte du développement de $-\frac{2}{3}k$.

[2]) C'est-à-dire dans les suites qu'on trouve à côté.

[3]) Traduction: „$\frac{9}{7} \times \frac{4}{81} \infty \frac{4}{63} \infty$ la première suite. $\frac{9}{7} \times \frac{4}{63} \infty \frac{4}{49} \infty$ [la somme] de toutes les suites, c'est-à-dire ∞ les termes positifs de B".

[4]) C'est le résultat annoncé au début de cette Pièce; voir la p. 102.

les + de B font $\infty + \frac{4}{49}\delta$

ergo les — de B $\infty - \frac{24}{49}\delta$

ergo les — de A $\infty - \frac{12}{49}\delta$

ergo les + de A $\infty + \frac{9}{49}\delta$

$-\frac{23}{49}\delta$ quibus addenda $\frac{2}{9}a$ quæ fub B continentur.

$\frac{2}{9}a$

$\frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \infty a;\ \frac{207}{343}\delta \infty - a$ [4]).

APPENDICE IV [1]

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1665].

§ 1 [2]

A en B kiezen blindeling met beurten, A altijdt uit 3 [of uit $\theta + \lambda$] fchijven waer van 2 [θ] wit fijn en 1 [λ] fwart, maer B uyt een onbekend getal van witte en fwarte fchijven, op conditie dat die een witte treckt fal al hebben dat in staet; maer die een fwarte treckt daer voor ieder reys 1 duc. fal in fetten. en A fal eerft trecken, de vrage is als men wil hebben dat de kanffen van A en B gelijckwaerdigh fijn, wat proportie van witte tot fwarte fchijven B foude moeten hebben [3]).

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 54—61 (numérotées 10—17 par Huygens) du Manuscrit C. Elle contient la solution du problème posé par Hudde dans sa lettre du 5 mai 1665 (voir la p. 350 du T. V) et de quelques autres problèmes qui s'y rattachent.

[2]) Ce paragraphe s'occupe du problème de Hudde, où A doit choisir entre 2 jetons blancs et 1 noir, et de la généralisation que Huygens y a donnée en représentant le nombre des blancs par θ et celui des noirs par λ. Huygens traite conjointement ces deux problèmes, mais, pour éviter la confusion qui en résulterait ici, il nous a semblé préférable d'omettre tout ce qui se rapporte à la solution particulière sauf l'endroit où il s'agit de l'application de la solution générale à ce cas spécial. On peut encore consulter sur ces problèmes les p. 35—37 de l'Avertissement.

[3]) Traduction: „A et B choisissent à l'aveuglette à tour de rôle, A toujours un de 3 [ou de $\theta + \lambda$] jetons dont 2 [θ] blancs et 1 [λ] noir, mais B un d'un nombre inconnu de jetons blancs et noirs, à condition que celui qui tirera un jeton blanc aura tout ce qui est mis; mais celui qui tire un jeton noir ajoutera chaque fois un ducat à l'enjeu, et A tirera le premier. On demande lorsqu'on veut que les chances de A et de B soient équivalentes, quelle proportion devra exister entre les nombres des jetons blancs et noirs de B".

[4]) Traduction: „A choisit un de 3 [ou de $\theta + \lambda$] jetons dont 2 [θ] blancs, 1 [λ] noir".

[5]) Traduction: „*a* est l'avantage de A quand il a mis 0 contre 0 et qu'il doit choisir".

A kieſt uyt 3 [of uit $\rho \infty \theta + \lambda$] ſchijven waer van 2 [$\theta$] wit, 1 [$\lambda$] ſwart [4]).
B kieſt uyt ω ſchijven waervan φ wit, ψ ſwart. $\omega \infty \varphi + \psi$.

a	is 't geen heeft	A als hij	0 tegen	0	heeft ingeſet en hij moet kieſen [5]).
b	———	B ——	0 ——	1	
c	———	A ——	1 ——	1	
d	———	B ——	1 ——	2	
e	———	A ——	2 ——	2	
f	———	B ——	2 ——	3	
g	———	A ——	3 ——	3	
h	———	B ——	3 ——	4	
i	———	A ——	4 ——	4	
א	———	B ——	4 ——	5	
ב	———	A ——	5 ——	5	

— *k*	't geen heeft	B als hij	0 tegen	0	heeft ingeſet, en hij moet kieſen.
+ *l*		A ——	0 ——	1	
m		B ——	1 ——	1	
n		A ——	1 ——	2	
o		B ——	2 ——	2	
p		A ——	2 ——	3	
q		B ——	3 ——	3	
r		A ——	3 ——	4	
s		B ——	4 ——	4	
t		A ——	4 ——	5	

Δ is een ducaet die ingeſet werdt [6]).

$a \infty \theta.k \quad \lambda.-b$ [7])

$a \infty \dfrac{\theta k - \lambda b}{\rho}$

$b \infty \varphi.\Delta \quad \psi.-c$

$-\dfrac{\lambda}{\rho} b \infty \dfrac{-\lambda\varphi\Delta + \lambda\psi c}{\rho\omega}$

$c \infty \theta.\Delta \quad \lambda.-d$

$\dfrac{\lambda\psi c}{\rho\omega} \infty \dfrac{\lambda\theta\psi\Delta - \psi\lambda\lambda d}{\rho\rho\omega}$

$d \infty \varphi.2\Delta \quad \psi.-e$

$-\dfrac{\psi\lambda\lambda}{\rho\rho\omega} d \infty \dfrac{-2\varphi\psi\lambda^2\Delta + \psi\psi\lambda^2 e}{\rho\rho\omega\omega}$

---

[6]) Traduction: „Δ est un ducat qui est mis à l'enjeu".
[7]) Voir à propos de cette notation la note 6 de la p. 103.

$e \infty \theta . 2\Delta \quad \lambda . -f$

$\frac{\psi\psi\lambda\lambda}{\rho\rho\omega\omega} e \infty \frac{2\theta\lambda^2\psi\psi\Delta - \lambda\lambda^2\psi\psi f}{\rho^3\omega\omega}$

$f \infty \varphi . 3\Delta \quad \psi . -g$

$-\frac{\lambda\lambda^2\psi\psi}{\rho^3\omega\omega} f \infty \frac{-3\varphi\psi\psi\lambda\lambda^2\Delta + \lambda\lambda^2\psi^3 g}{\rho^3\omega^3}$

$g \infty \theta . 3\Delta \quad \lambda . -h$

$\frac{\lambda\lambda\lambda\psi^3}{\rho^3\omega^3} g \infty \frac{3\theta\lambda\lambda^2\psi^3\Delta - \lambda^4\psi^3 h}{\rho^4\omega^3}$

$h \infty \varphi . 4\Delta \quad \psi . -2$

$\frac{-\lambda^4\psi^3}{\rho^4\omega^3} h \infty \frac{-4\lambda^4\varphi\psi^3\Delta + \lambda^4\psi^4 i}{\rho^4\omega^4}$

$i \infty \theta . 4\Delta \quad \lambda . -\aleph$

$\frac{\lambda^4\psi^4}{\rho^4\omega^4} i \infty \frac{4\theta\lambda^4\psi^4\Delta - \lambda^5\psi^4\aleph}{\rho^5\omega^4}$

$\aleph \infty \varphi . 5\Delta \quad \psi . \beth$

$-\frac{\lambda^5\psi^4}{\rho^5\omega^4} \aleph \infty \frac{-5\lambda^5\psi^4\varphi\Delta + \lambda^5\psi^5\beth}{\rho^5\omega^5}$

$-k \infty \varphi . -a \quad \psi . -l$

$\frac{\theta}{\rho} k \infty \frac{\theta\varphi a + \theta\psi l}{\rho\omega}$

$l \infty \theta . \Delta \quad \lambda . -m$

$\frac{\theta\psi}{\rho\omega} l \infty \frac{\theta\theta\psi\Delta - \theta\psi\lambda m}{\rho\rho\omega}$

$m \infty \varphi . \Delta \quad \psi . -n$

$-\frac{\theta\psi\lambda m}{\rho\rho\omega} \infty \frac{-\lambda\theta\psi\varphi\Delta + \lambda\theta\psi\psi n}{\rho\rho\omega\omega}$

$n \infty \theta . 2\Delta \quad \lambda . -o$

$\frac{\lambda\theta\psi\psi}{\rho\rho\omega\omega} n \infty \frac{2\lambda\theta\theta\psi\psi\Delta - \lambda^2\theta\psi\psi o}{\rho^3\omega\omega}$

$o \infty \varphi . 2\Delta \quad \psi . -p$

$-\frac{\lambda^2\theta\psi\psi}{\rho^3\omega\omega} o \infty \frac{-2\lambda^2\theta\psi\psi\varphi\Delta + \lambda^2\theta\psi^3 p}{\rho^3\omega^3}$

$p \infty \theta . 3\Delta \quad \lambda . -q$

$\frac{\lambda^2\theta\psi^3}{\rho^3\omega^3} p \infty \frac{3\lambda^2\theta\theta\psi^3\Delta - \lambda\lambda^2\theta\psi^3 q}{\rho^4\omega^3}$

$q \infty \varphi . 3\Delta \quad \psi . -r$

$-\frac{\lambda\lambda\lambda\theta\psi^3}{\rho^4\omega^3} q \infty \frac{-3\lambda\lambda^2\theta\varphi\psi^3\Delta + \lambda\lambda^2\theta\psi^4 r}{\rho^4\omega^4}$

$r \infty \theta . 4\Delta \quad \lambda . -s$

$\frac{\lambda\lambda\lambda\theta\psi^4}{\rho^4\omega^4} r \infty \frac{4\theta\theta\lambda^3\psi^4\Delta - \lambda^4\theta\psi^4 s}{\rho^5\omega^4}$

$s \infty \varphi . 4\Delta \quad \psi . -t$

$-\frac{\lambda^4\theta\psi^4}{\rho^5\omega^4} s \infty \frac{-4\lambda^4\theta\psi^4\varphi\Delta + \lambda^4\theta\psi^5 t}{\rho^5\omega^5}$

$$\overset{\text{A}}{} \qquad \overset{\text{B}}{}$$

$$a \infty -\frac{\lambda b}{\rho} + \frac{\theta k}{\rho}$$ [1])

---

[1]) Voir plus haut à la p. 109. Dans ce qui suit, Huygens désigne par A le premier terme $-\frac{\lambda b}{\varrho}$, par B le deuxième terme $\frac{\theta k}{\varrho}$ du second membre de cette équation.

[2]) Cette notation indique qu'on peut remplacer $\frac{\lambda\psi c}{\varrho\omega}$ par $\frac{\lambda\theta\psi\Delta - \psi\lambda^2 d}{\varrho\varrho\omega}$.

[3]) Il s'agit des pages dont nous avons emprunté ce qui précède la dernière équation de la p. 110.

A

$$-\frac{\lambda b}{p} \infty \frac{-\lambda\varphi\Delta + \lambda\psi c}{p\omega}$$

$$\frac{\lambda\theta\psi\Delta - \psi\lambda^2 d}{pp\omega}$$ [2])

$$\frac{-2\varphi\psi\lambda^2\Delta + \psi\psi\lambda^2 e}{pp\omega\omega}$$

$$\frac{+2\theta\lambda^2\psi\psi\Delta - \lambda\lambda^2\psi\psi f}{p^3\omega\omega}$$

$$\frac{-3\varphi\psi\psi\lambda\lambda^2\Delta + \lambda\lambda^2\psi^3 g}{p^3\omega^3}$$

$$\frac{+3\theta\lambda^3\psi^3\Delta - \lambda^4\psi^3 h}{p^4\omega^3}$$

$$\left[-\frac{\lambda^4\psi^3 h}{p^4\omega^3}\right]$$

$$\frac{-4\lambda^4\varphi\psi^3\Delta + \lambda^4\psi^4 i}{p^4\omega^4}$$

$$\frac{4\theta\lambda^4\psi^4\Delta - \lambda^5\psi^4\aleph}{p^5\omega^4}$$

$$\frac{-5\lambda^5\psi^4\varphi\Delta + \lambda^5\psi^5\beth}{p^5\omega^5}$$

B

$$\frac{\theta k}{p} \infty \frac{\theta\varphi a}{p\omega} + \frac{\theta\psi l}{p\omega}$$

$$\frac{\theta\theta\psi\Delta - \theta\lambda\psi m}{pp\omega}$$

$$\frac{-\lambda\theta\psi\varphi\Delta + \lambda\theta\psi\psi n}{pp\omega\omega}$$

$$\frac{+2\lambda\theta\theta\psi\psi\Delta - \lambda\lambda\theta\psi\psi o}{p^3\omega\omega}$$

$$\frac{-2\lambda\lambda\theta\psi\psi\varphi\Delta + \lambda\lambda\theta\psi^3 p}{p^3\omega^3}$$

$$\frac{+3\lambda\lambda\theta\theta\psi^3\Delta - \lambda^3\theta\psi^3 q}{p^4\omega^3}$$

$$\left[\frac{-\lambda^3\theta\psi^3 q}{p^4\omega^3}\right]$$

$$\frac{-3\lambda^3\theta\varphi\psi^3\Delta + \lambda^3\theta\psi^4 r}{p^4\omega^4}$$

$$\frac{+4\theta\theta\lambda^3\psi^4\Delta - \lambda^4\theta\psi^4 s}{p^5\omega^4}$$

$$\frac{-4\lambda^4\theta\psi^4\varphi\Delta + \lambda^4\theta\psi^5 t}{p^5\omega^5}$$

il faudroit demonſtrer la proportion dans laquelle ſe ſuivent les + et les — de A et de B, ce qui n'eſt pas mal aiſe en regardant leur origine dans le calcul pag. 10 et 11 [3]).

Notez que les dernieres quantitez $\frac{\lambda^5\psi^5 ב}{\rho^5\omega^5}$ et $\frac{\lambda^4\theta\psi^5 t}{\rho^5\omega^5}$ deviennent infiniment petites, puiſque les + de A et de B et auſſi les — diminuent toujours ſelon la proportion de $\rho\omega$ à $\psi\lambda$, (eſtant $\rho\omega$ plus grand que $\lambda\psi$ parce que $\rho \infty \theta + \lambda$ et $\omega \infty \varphi + \psi$, et que les quantitez r, t ou q, s et i, ב ou h, א croiſſent ſeulement par l'unité comme l'on voit par l'hypotheſe pag. 10 [1]).

ſit $\lambda \infty$ les + d'A [2])
ergo $\theta \infty$ les + de B

$\theta\psi$ —— $\varphi\rho$ —— λ (les + [d']A) —— $\frac{\lambda\varphi\rho}{\theta\psi}$ [3]) ∞ les — d'A

$\theta\omega$ —— $\lambda\varphi$ —— θ (les + de B) —— $\frac{\lambda\varphi}{\omega}$ ∞ les — de B

$$-\lambda + \frac{\lambda\varphi\rho}{\theta\psi} \infty \theta - \frac{\lambda\varphi}{\omega}$$ [4])

$\frac{\omega\rho\lambda\varphi}{\theta\psi} \infty \omega\lambda + \omega\theta - \lambda\varphi$ ſed $\lambda + \theta \infty \rho$

$\frac{\omega\rho\lambda\varphi}{\theta\psi} \infty \omega\rho - \lambda\varphi$

$\omega\rho\lambda\varphi \infty \omega\rho\theta\psi - \lambda\varphi\theta\psi$ ſed $\omega \infty \varphi + \psi$ et $\rho \infty \theta + \lambda$

$\varphi\varphi\lambda\rho \infty \varphi\psi\theta\theta - \varphi\psi\lambda\rho + \theta\rho\psi\psi$

vel $\varphi\varphi \infty - \psi\varphi + \frac{\psi\theta\theta}{\lambda\rho}\varphi + \frac{\theta\psi\psi}{\lambda}$ bon. Regula [5]).

---

[1]) Par „l'hypothese" Huygens entend les définitions des quantités $a, -b$, etc. données au début de cette Pièce à la p. 109. Or, chacune des quantités, qui entrent dans une même suite, peut être considérée comme la somme de trois parties dont la première et la deuxième sont proportionnelles, respectivement, aux mises des joueurs A et B, lesquelles croissent chaque fois de l'unité, et dont la troisième ne varie pas. À la première et à la deuxième partie le raisonnement de Huygens s'applique; quant à la troisième, son produit avec les coefficients indiqués, s'approche *a fortiori* de zéro.

[2]) Puisque la solution cherchée dépend exclusivement des *rapports* qui existent entre les sommes des + et — de A et de B, on peut remplacer ces sommes par des quantités qui leur sont proportionnelles, et choisir pour l'une d'elles une valeur arbitraire. De cette manière il n'est pas nécessaire de déterminer la somme de l'une des suites formées par les quantités + ou — de A ou de B, comme Huygens l'avait fait pour les + de B à l'occasion du problème qui précède, où, évidemment, cette sommation ne pouvait être évitée; voir la p. 106.

[3]) Cette notation indique que $\theta\psi$ est à $\varphi\varrho$ comme λ est à $\frac{\lambda\varphi\varrho}{\theta\psi}$.

[4]) Puisque les chances des deux joueurs doivent être équivalentes au commencement du jeu, on doit avoir $a = 0$ et, par suite, $-A = B$; voir la dernière équation de la p. 110 et la note 1

$$\varphi\varphi \infty \frac{1}{3}\varphi\psi + 2\psi\psi$$ [6])

$$\varphi \infty \frac{1}{6}\psi + \sqrt{2\frac{1}{36}\psi\psi} \text{ vel } \varphi \infty \frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{73\psi\psi}$$

φ prope ∞ $1\frac{4}{7}\psi$; φ ad ψ prope ut 11 ad 7 propius ut 1193 ad 750 [7])

---

sit $\theta \infty 10$; $\lambda \infty 1$ [8]). $[\varphi \infty \frac{89}{22}\psi +] \sqrt{\frac{12761}{484}[\psi]}$ $\frac{113}{22}$ prox. maj.

$\frac{89}{22}$

$\frac{202}{22}$ prox. maj.

prox. maj. $101\psi \infty 11\varphi$

§ 2 [9]).

les + de B ont cette proportion

$$\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\rho\rho\omega} \qquad \frac{2\lambda\theta\theta\psi\psi\Delta}{\rho^3\omega\omega} \qquad \frac{3\lambda\lambda\theta\theta\psi^3\Delta}{\rho^4\omega^3}$$ [10])

$$\omega\rho \qquad 2\lambda\psi \qquad$$

$$2\omega\rho \qquad 3\lambda\psi$$

---

de cette même p. 110.

[5]) Par cette règle le problème peut être considéré comme résolu. En effet, pour déterminer la proportion désirée entre les nombres φ et ψ des jetons blancs et noirs, il ne s'agit plus que de résoudre une équation quadratique à racines toujours réelles et de signes contraires, dont la racine positive est la seule qui satisfait aux conditions du problème.

[6]) Application de la „Regula" au problème posé par Hudde où $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $\rho = 3$.

[7]) On ne voit pas comment la première approximation a été obtenue, mais de petits calculs en marge du Manuscrit permettent de constater que la seconde a été trouvée en calculant la racine quadratique de 73000000 qui est égale à 8544, d'où il suit $\varphi = \frac{9544}{6000}\psi = \frac{1193}{750}\psi$.

[8]) Voir à propos de cette proportion de 10 à 1, qu'on retrouve plusieurs fois dans la correspondance entre Huygens et Hudde, les pp. 386 et 393 du T. V.

[9]) Dans ce paragraphe Huygens détermine l'avantage du joueurs A pour des valeurs données de θ, λ, φ et ψ; problème dont il a résolu un cas particulier dans l'Appendice III (p. 102—107). À cet effet il doit chercher la somme de l'une des quatre suites dont il est question dans la note 2 de la page précédente, desquelles il choisit celle des „+ de B".

[10]) Voir les trois premiers termes positifs de la suite B de la p. 111.

ratio primæ ad ſecundam [1])

$$\begin{array}{ccccccccc} \Xi & \omega\rho & \lambda\psi & . & . & . & . & \Pi \\ & & . & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & \\ & & & & . & . & . & \\ & & & & & . & . & \\ & & & & & & . & \Sigma \end{array}$$

ut exceſſ. max. ſup. 2da. $(\omega\rho - \lambda\psi)$ ad max. $(\omega\rho)$ [ita] prima $\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\rho\rho\omega}$ [ad] $\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\omega\rho\rho - \rho\lambda\psi}$

series $\Xi\Pi$ vel $\Xi\Sigma$

$$\omega\rho - \lambda\psi \text{ [ad] } \omega\rho \text{ [ita] } \frac{\theta\theta\psi\Delta}{\omega\rho\rho - \rho\lambda\psi} \text{ [ad] } \frac{\omega\theta\theta\psi\Delta}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi}$$

ſumma omnium ſerierum ſive les + de B

$$a - \frac{\theta\varphi a}{\rho\omega} \infty \frac{\overset{+B}{\omega\theta\theta\psi\Delta} \overset{-A}{- \omega\lambda\varphi\rho\Delta} \overset{+A}{+ \omega\theta\lambda\psi\Delta} \overset{-B}{- \lambda\varphi\theta\psi\Delta}}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi}$$ [2]). Regula.

ſit $\frac{\omega\theta\theta\psi}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi} \infty \xi$

$$a - \frac{\theta\varphi a}{\rho\omega} \infty \overset{+B}{\xi\Delta} \overset{-A}{- \frac{\lambda\varphi\rho\xi\Delta}{\theta\theta\psi}} \overset{+A}{+ \frac{\lambda\xi\Delta}{\theta}} \overset{-B}{- \frac{\lambda\varphi\xi\Delta}{\theta\omega}}$$. bon. Regula eadem.

$a - \frac{1}{4}a$ [3]) $\infty \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \infty \frac{1}{9}\Delta \qquad a \infty - \frac{4}{27}\Delta$

---

[1]) Pour comprendre les calculs qui suivent, il suffira de considérer le „Theorema" de la p. 106 et l'algorithme dont Huygens s'est servi à cette page pour la sommation de la suite des „+ de B".

[2]) Comparez l'équation „$a \infty - \frac{\lambda b}{\varrho} + \frac{\theta k}{\varrho}$" de la p. 110.

[3]) Application au problème de croix ou pile qu'on trouvera formulé au début de l'Appendice V, p. 116. Il est clair que la solution de ce problème peut être obtenue au moyen de la règle générale précédente en posant $\theta = \lambda = \varphi = \psi = 1$, et par suite $\varrho = \omega = 2$.

$\frac{7}{9}a$[4]) $\infty \frac{24}{49}\Delta - \frac{9}{49}\Delta + \frac{12}{49}\Delta - \frac{4}{49}\Delta \infty \frac{23}{49}\Delta \qquad a \infty \frac{207}{343}\Delta$

$\lambda \infty 1;\ \theta \infty 10;\ \varphi \infty 10;\ \psi \infty 11;\ \rho \infty 11 \infty \lambda + \theta;\ \omega \infty 21 \infty \varphi + \psi$

$a \infty \frac{105}{131}\Delta$[5])

$\theta \infty 2;\ \lambda \infty 1;\ \varphi \infty 2;\ \psi \infty 3;\ \rho \infty 3;\ \omega \infty 5$

$a \infty \frac{5}{16}\Delta$[6])

---

[4]) Application au problème traité dans l'Appendice III, p. 102, où $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $\varphi = 1$, $\psi = 2$, donc $\varrho = \omega = 3$.

[5]) Voir sur ce problème une lettre de Huygens à Hudde du 7 juillet 1665, p. 393 du T. V.

[6]) Lisez $\frac{5}{11}\Delta$. On ne rencontre ce problème nulle part dans les lettres échangées entre Huygens et Hudde, ni ailleurs dans la correspondance de Huygens.

APPENDICE V[1])

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

1665.

§ 1[2])

Jul. 1665

A ſpeelt tegen B werpende met beurten kruys of munt, op conditie dat die munt werpt ieder reys een ducaet sal in ſetten, maer die kruys werpt ſal alles ſtrijcken dat in geſet is, en A ſal eerſt werpen als noch niets in geſet is. En werdt oock verſtaen dat het ſpel niet eer eyndight dan als er iets in geſet geweeſt is, en weder uyt getrocken[3]).

Traduction:

A joue croix ou pile contre B; les deux joueurs jettent tour à tour à condition que celui qui amène pile mettra chaque fois un ducat, mais qui jette croix prendra tout ce qui eſt mis; et A jettera le premier, alors qu'on n'a encore rien mis. Et il eſt entendu que le jeu ne finira pas avant que quelque choſe ait été miſe, et enlevée.

---

[1]) Cet Appendice, que nous avons divisé en paragraphes, est emprunté aux p. 63—74 du Manuscrit C. Ces pages étaient numérotées de 19 à 30 par Huygens.

[2]) Ce paragraphe contient la solution du problème sur le jeu de croix et pile, proposé par Huygens à Hudde dans une lettre du 4 avril 1665; voir les pp. 304 et 308 du T. V. On peut encore consulter sur ce problème les p. 33—34 de l'Avertissement.

[3]) On peut consulter sur l'adjonction de la dernière phrase qui manquait dans l'énoncé du problème envoyé à Hudde, la p. 422 du T. V, ou bien la p. 34 de l'Avertissement.

[4]) Voir la p. 123.

Zij geſtelt dat de geene die moet werpen als van weder ſijden noch niets in geſet is verlieſt a, dat is

$$\text{laet hij hebben} \left\{ \begin{array}{l} -\,a \text{ die o tegen o} \\ +\,b \text{ die o tegen 1} \\ +\,c \text{ die 1 tegen 1} \\ +\,d \text{ die 1 tegen 2} \\ +\,e \text{ die 2 tegen 2} \\ +\,f \text{ die 2 tegen 3} \\ +\,g \text{ die 3 tegen 3} \\ +\,h \text{ die 3 tegen 4} \\ +\,i \text{ die 4 tegen 4} \\ +\,k \text{ die 4 tegen 5} \end{array} \right\} \text{heef ingeſet en hij ſelfs moet werpen.}$$

(Men ſoude beter de quaeſtie voorſtellen dat A en B ieder een ducaet ſouden ingeſet hebben. Wanneer de avantagie van A waerd wordt bevonden $\frac{1}{9}$ ducaets. als pag. ſequ. werd gerekent [4].)

dewijl nu den eenen effen ſoo veel wint als den anderen verlieſt, ſoo heeft dan B, die o tegen o heeft in geſet, den andere moetende werpen, ſoo veel als $+\,a$.

Traduction:

Soit ſuppoſé que celui qui doit jeter quand rien n'a encore été mis, ni par l'un, ni par l'autre, perd a, c'eſt à dire:

$$\text{ſoit l'avantage} \left\{ \begin{array}{llcc} -\,a & \text{de celui qui a mis} & \text{o} & \text{contre o} \\ +\,b & \text{———} & \text{o} & \text{——— 1} \\ +\,c & \text{———} & 1 & \text{——— 1} \\ +\,d & \text{———} & 1 & \text{——— 2} \\ +\,e & \text{———} & 2 & \text{——— 2} \\ +\,f & \text{———} & 2 & \text{——— 3} \\ +\,g & \text{———} & 3 & \text{——— 3} \\ +\,h & \text{———} & 3 & \text{——— 4} \\ +\,i & \text{———} & 4 & \text{——— 4} \\ +\,k & \text{———} & 4 & \text{——— 5} \end{array} \right\} \text{et qui doit jeter.}$$

(Il vaudrait mieux propoſer la queſtion en ajoutant la condition que A et B auraient mis chacun un ducat. Alors on trouvera que l'avantage de A vaut $\frac{1}{9}$ ducat, comme nous l'avons calculé à la page suivante [4].)

Or, puiſque l'un gagne préciſément autant que l'autre perd, il s'enſuit que l'avantage de B, qui a mis o contre o, l'autre devant jeter, eſt égal à $+\,a$. Et de même celui

En van gelijcken die 1 tegen 0 heeft in gefet en den andere moet werpen, fal hebben $-b$, om dat die werpt heeft $+b$, en foo voorts.

die nu eerft werpt als 0 tegen 0 is ingefet, wiens kans werd gefteld $-a$, indien hij kruijs werpt, foo heeft hij de felve kans die den anderen tegenwoordigh heeft dat is $+a$; maer indien hij munt werpt foo moet hij 1 tegen 0 in fetten, en den anderen fal werpen, dat is, foo heeft hij $-b$. Soo is dan $-a \infty$ 1 kans tot $+a$ en 1 kans tot $-b$. Ergo $-a \infty \frac{a-b}{2}$, door het 2. voorftel van onfe Rekening in fpelen van geluck [1]). Van gelijcken kan men licht verftaan dat $+b$, dat is de kans van die 0 tegen 1 heeft ingefet, en felfs moet werpen, is ∞ 1 kans tot een ducaet te hebben, welck zij genoemt Δ, en 1 kans tot $-c$, foodat hierom is $b \infty \frac{\Delta-c}{2}$.

Item is $c \infty$ 1 tot Δ en 1 tot $-d$. daerom $c \infty \frac{\Delta-d}{2}$

Item is $d \infty$ 1 tot 2Δ en 1 tot $-e$. daerom $d \infty \frac{2\Delta-e}{2}$

Item is $e \infty$ 1 tot 2Δ en 1 tot $-f$. daerom $e \infty \frac{2\Delta-f}{2}$

Item $f \infty$ 1 tot 3Δ en 1 tot $-g$. daerom $f \infty \frac{3\Delta-g}{2}$

Item $g \infty$ 1 tot 3Δ en 1 tot $-h$. daerom $g \infty \frac{3\Delta-h}{2}$

En foo voorts $h \infty \frac{4\Delta-i}{2}$; $i \infty \frac{4\Delta-k}{2}$

Traduction:

qui a mis 1 contre 0, l'autre devant jeter, aura $-b$, parce que celui qui jette a $+b$ et ainfi de fuite.

Or, quant à celui qui jette le premier lorfqu'il eft mis 0 contre 0, dont l'avantage fut pofé $-a$, s'il jette croix il a le même avantage que l'autre a maintenant, c'eft-à-dire $+a$; mais s'il jette pile il doit mettre 1 contre 0, et l'autre jettera, c'eft-à-dire il aura $-b$. Ainfi donc $-a$ eft équivalent à une chance d'avoir $+a$ et 1 d'avoir $-b$. Par conféquent $-a \infty \frac{a-b}{2}$, par la deuxième propofition de notre Calcul dans les jeux de hafard [1]). De même on peut concevoir aifément que $+b$, c'eft-à-dire l'avantage de celui, qui a mis 0 contre 1 et qui doit jeter lui-même, est égal à 1 chance de recevoir un ducat, que nous répréfenterons par Δ, et 1 chance d'avoir $-c$. On a donc $b \infty \frac{\Delta-c}{2}$.

On a de même $c \infty$ 1 à Δ et 1 à $-d$. donc $c \infty \frac{\Delta-d}{2}$

. . . .

. . . .

Et ainfi de fuite $h \infty \frac{4\Delta-i}{2}$; $i \infty \frac{4\Delta-k}{2}$

Soo is dan $-a \infty \frac{a-b}{2}$

$$\frac{-\Delta+c}{4}\ ^{2)}$$

$$\frac{+\Delta-d}{8}$$

$$\frac{-2\Delta+e}{16}$$

$$\frac{+2\Delta-f}{32}$$

$$\frac{-3\Delta+g}{64}$$

$$\frac{+3\Delta-h}{128}$$

$$\frac{-4\Delta+i}{256}$$

$$\frac{+4\Delta-k}{512}, \text{etc.}$$

waeruyt blijckt dat

$$-a \infty \frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{8}\Delta-\frac{2}{16}\Delta+\frac{2}{32}\Delta-\frac{3}{64}\Delta+\frac{3}{128}\Delta-\frac{4}{256}\Delta+\frac{4}{512}\Delta-\frac{1}{512}k.$$

Traduction:

On a donc $-a \infty \frac{a-b}{2}$

$$\frac{-\Delta+c}{4}\ ^{2)}$$

.

.

.

.

$$\frac{+4\Delta-k}{512}, \text{etc.}$$

d'où il s'ensuit:

$$-a \infty \frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{8}\Delta-\frac{2}{16}\Delta+\frac{2}{32}\Delta-\frac{3}{64}\Delta+\frac{3}{128}\Delta-\frac{4}{256}\Delta+\frac{4}{512}\Delta-\frac{1}{512}k$$

---

[1]) Voir la p. 65 du présent Tome; mais il s'agit plutôt de la première Proposition, p. 63.

[2]) Cette notation indique que l'on peut remplacer $-\frac{b}{2}$ par $\frac{-\Delta+c}{4}$.

maer defe laetfte quantiteit welcke hier is $\frac{1}{512}k$, werd oneijndelijk kleijn indien in infinitum de rye continueert want dewyl men noch foo veel ducaten niet en verlieft als men ingefet heeft foo is *b* minder als een ducaet of Δ en *d* minder als 2Δ en *f* minder als 3Δ en *h* minder als 4Δ en *k* minder als 5Δ maer den denominator van 't gebroken gaet voort in de dobbele proportie 2, 4, 8, 16, etc. Ergo moet noodfaekelijk, als gefeght is, de laetfte quantiteyt, fijnde hier $\frac{1}{512}k$, eijndelijck foo kleijn werden als men wil, en daerom gerekent werden als o.

$$\text{Ergo} - a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \\ + \frac{4}{512}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta \text{ etc. in infin.}$$

Voorts fiet men hier dat de quantiteyten daer Δ in is en $+$ voorftaet tot die daer — voorftaet fijn als 1 tot 2.

Maer de geene daer — voorftaet kan haar fomme doch aldus gefchreven werden

---

Traduction:

mais cette dernière quantité, repréfentée ici par $\frac{1}{512}k$, devient infiniment petite fi la fuite continue indéfiniment, car, puifqu'on ne perd pas encore autant de ducats qu'on a mis, il fuit que *b* eft moins qu'un ducat ou Δ, et *d* moins que 2Δ, et *f* moins que 3Δ, et *h* moins que 4Δ, et *k* moins que 5Δ, mais le dénominateur de la fraction monte dans la proportion double 2, 4, 8, 16, etc. Par fuite il eft néceffaire, comme il a été dit, que la dernière quantité, étant ici $\frac{1}{512}k$, devienne finalement auffi petite qu'on le veut: elle doit donc être comptée pour zéro.

$$\text{On a donc} - a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \\ + \frac{4}{512}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta \text{ etc. jufqu'à l'infini.}$$

Enfuite on voit ici que les quantités où Δ entre et qui font précédées de $+$ font à celles précédées de — comme 1 eft à 2.

Mais, quant à celles qui font précédées de —, leur fomme peut auffi être écrite comme il fuit:

$$-\frac{1}{4}\Delta-\frac{1}{16}\Delta-\frac{1}{64}\Delta-\frac{1}{256}\Delta-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{16}\Delta-\frac{1}{64}\Delta-\frac{1}{256}\Delta-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{64}\Delta-\frac{1}{256}\Delta-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{256}\Delta-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

want dit alles te samen is $\infty -\frac{1}{4}\Delta-\frac{2}{16}\Delta-\frac{3}{64}\Delta-\frac{4}{256}\Delta-\frac{5}{1024}\Delta$ etc.

In de bovenste rije nu; dewijl ieder volgende quantiteyt is $\frac{1}{4}$ van de voor gaende, soo sijn se alle te samen $\frac{4}{3}$ van de voorste, dat is van $-\frac{1}{4}\Delta$ soo dat se maecken $-\frac{1}{3}\Delta$.

Van gelijcken is de tweede rye $\infty \frac{4}{3}$ van haer voorste quantiteyt $-\frac{1}{16}\Delta$. En soo voorts ieder rye $\infty \frac{4}{3}$ van sijn voorste quantiteyt soo sijn dan alle de ryen te

---

Traduction:

$$-\frac{1}{4}\Delta-\frac{1}{16}\Delta-\frac{1}{64}\Delta-\frac{1}{256}\Delta-\frac{1}{1024}\Delta, \text{ etc.}$$

. . . .

. . . .

car tout cela ensemble est égal à $-\frac{1}{4}\Delta-\frac{2}{16}\Delta-\frac{3}{64}\Delta-\frac{4}{256}\Delta-\frac{5}{1024}\Delta$, etc.

Or, dans la suite supérieure, puisque toute quantité qui suit est $\frac{1}{4}$ de celle qui la précède, ces quantités seront toutes ensemble $\infty \frac{4}{3}$ de la première, c'est-à-dire de $-\frac{1}{4}\Delta$. Leur somme sera donc $-\frac{1}{3}\Delta$.

De même la deuxième suite est $\infty \frac{4}{3}$ de sa première quantité $-\frac{1}{16}\Delta$. Et ainsi partout, chaque suite étant $\infty \frac{4}{3}$ de sa première quantité. Il en résulte que toutes les suites

ſamen $\infty \frac{4}{3}$ van de ſchuijnſe rije die beſtaet uyt alle de voorſte quantiteyten, en welcke deſelve is met de bovenſte rije. Maer deſe was $\infty - \frac{1}{3}\Delta$. Ergo al de ryen te ſamen $\infty \frac{4}{3}$ van $-\frac{1}{3}\Delta$, dat is, gelijck $-\frac{4}{9}\Delta$. Soo ſijn dan de quantiteyten van de voorgaende aequatie daer Δ in komt en $-$ voor ſtaet $\infty -\frac{4}{9}\Delta$. maer deſe waren tot die daer $+$ voor ſtaet als 2 tot 1. Ergo die met $+$ geteykent ſijn doen te ſamen $+\frac{2}{9}\Delta$. Welcke van die met $-$ afgetrocken reſteert $-\frac{2}{9}\Delta$. Soo dat de aequatie is

$$-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{2}{9}\Delta$$

$$-3a \infty -\frac{4}{9}\Delta$$

$$a \infty \frac{4}{27}\Delta$$

ſoo verlieſt dan A die eerſt uitwerpt $\frac{4}{27}$ van een ducaet [1]).

Traduction:

enſemble ſont égales à $\frac{4}{3}$ de la ſuite oblique qui eſt formée par toutes les premières quantités et qui eſt identique à la ſuite ſupérieure. Mais cette dernière eſt égale à $-\frac{1}{3}\Delta$; par conſéquent toutes les ſuites enſemble ſont égales à $\frac{4}{3}$ de $-\frac{1}{3}\Delta$, ce qui fait $-\frac{4}{9}\Delta$. Ainſi donc les quantités de l'équation précédente, où Δ entre et qui ſont précédées de $-$, ont pour ſomme $-\frac{4}{9}\Delta$; mais celles-ci étaient à celles qui ſont précédées de $+$ comme 2 eſt à 1. Il s'enſuit que celles précédées par $+$ font enſemble $+\frac{2}{9}\Delta$. Si on les ſouſtrait de celles affectées du ſigne $-$, on obtient $-\frac{2}{9}\Delta$.

On a donc l'équation $-a = \frac{1}{2}a - \frac{2}{9}\Delta$, ou bien $-3a = -\frac{4}{9}\Delta$, ou enfin $a = \frac{4}{27}\Delta$, et il s'enſuit que A, qui jette le premier, perd $\frac{4}{27}$ d'un ducat [1]).

$-a$ of $-\frac{4}{27}\Delta \infty \frac{2}{27}\Delta - \frac{1}{2}b;\ b \infty \frac{4}{9}\Delta$

$-b$ of $-\frac{2}{9}\Delta \infty -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c;\ c \infty \frac{1}{9}\Delta$ de kans van die werpt als er een tegen een is ingeset.

$\frac{1}{4}c$ of $\frac{1}{36}\Delta \infty \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d;\ d \infty \frac{7}{9}\Delta$

$-\frac{1}{8}d$ of $\frac{7}{72}\Delta \infty \frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{16}e;\ e \infty \frac{4}{9}\Delta$ nota quod $e \infty b$.

Traduction:

$-a$ ou $-\frac{4}{27}\Delta \infty \frac{2}{27}\Delta - \frac{1}{2}b;\ b \infty \frac{4}{9}\Delta$

$-\frac{1}{2}b$ ou $-\frac{2}{9}\Delta \infty -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c;\ c \infty \frac{1}{9}\Delta$, avantage de celui qui jette quand on a mis 1 contre 1.

$\frac{1}{4}c$ ou $\frac{1}{36}\Delta \infty \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d;\ d \infty \frac{7}{9}\Delta$

$-\frac{1}{8}d$ ou $\frac{7}{27}\Delta \infty \frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{16}e;\ e \infty \frac{4}{9}\Delta$ notez que $e \infty b$.

---

[1]) Le problème est donc résolu. Ajoutons que quelques pages plus haut dans le même Manuscrit (p. 38—42) on rencontre des calculs, datés du 16 mars 1665, par lesquels Huygens, sans réussir à résoudre le problème, qu'il y appelle „quæstio difficillima", enferme la valeur a de l'avantage du second joueur B dans des limites de plus en plus rapprochées.

Or, à cause de leur rédaction confuse et incomplète, il aurait été très difficile de reproduire ces calculs. Nous nous bornons donc à en donner un résumé.

Remarquons, à cet effet, que les équations qu'on peut déduire des expressions successives pour $-a$ (p. 119) peuvent s'écrire:

$$-\frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c = -\frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d = -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{16}e = -\frac{6}{32}\Delta - \\ -\frac{1}{32}f = -\frac{15}{64}\Delta + \frac{1}{64}g = \text{etc.}$$

Il en résulte:

$b = 3a$; $c = \Delta - 6a$; $d = 12a - \Delta$; $e = 4\Delta - 24a$; $f = 48a - 6\Delta$; $g = 15\Delta - 96a$; $h = 192a - 27\Delta$; $i = 58\Delta - 384a$; $k = 768a - 112\Delta$; $l = 229\Delta - 1536a$; $m = 3072a - 453\Delta$; $n = 912\Delta - 6144a$; $o = 12288a - 1818\Delta$; $p = 3643\Delta - 24576a$.

Dans ces équations les coefficients de a constituent une suite géométrique et la formation des coefficients de Δ est facilement expliquée par l'algorithme suivant:

$$4 \times 2 - 2 = 6$$
$$6 \times 2 + 3 = 15$$
$$15 \times 2 - 3 = 27$$
$$27 \times 2 + 4 = 58, \text{etc.}$$

Voyons maintenant de quelle manière, entre autres, les deux limites les plus rapprochées

§ 2 [1]).

Naer defe Rekening is oock licht te verftaen die van de queftie pag. 1 voorgeftelt [2]) doch tot meerder verklaring fal dienen het volgende: als er ftaet 1.— b en 2. + k [3]), dat is kortelijck gefeght 1 kans tot —b en 2 kanffen tot + k. En foo in al d'andere. δ in defe rekening beteykent een ducaet of 't geen ieder reijfe werdt ingefet.

Traduction:

À l'aide du calcul qui précède on comprendra aifément auffi le calcul de la queftion pofée à la p. 1 [2]). Mais ce qui fuit fervira à expliquer plus en détail ce dernier calcul: lorfque nous écrivons „1. — b et 2. + k" [3]), cela exprime brièvement qu'on a „une chance d'avoir — b et deux chances d'avoir + k". Et ainfi partout. Dans ce calcul δ repréfente un ducat, ou bien ce qui fe met chaque fois.

ont été obtenues par Huygens. Nous considérons à cet effet d'abord l'avantage n de celui qui jette le premier quand il a mis à l'enjeu 6 ducats contre 6 qui ont été mis par l'autre joueur. Il est clair qu'on aura $n = 3\Delta + \frac{1}{2}(-o)$, et de même $o = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-p)$; par suite $n = \frac{5}{4}\Delta + \frac{1}{4}p$. Or, on a évidemment $p > n$, puisque l'enjeu est le plus grand dans le cas auquel l'avantage p se rapporte. Il en résulte $n > \frac{5}{4}\Delta + \frac{1}{4}n$ et par conséquent $n > \frac{5}{3}\Delta$; mais $o = 6\Delta - 2n$, donc $o < \frac{8}{3}\Delta$. On en déduit $12288a - 1818\Delta < \frac{8}{3}\Delta$, ou bien $a < \frac{5462}{36864}\Delta$.

En partant de la supposition $q > o$, on peut déduire de la même manière des équations $o = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-p)$ et $p = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-q)$ la relation $p < \frac{7}{3}\Delta$, d'où il s'ensuit $3643\Delta - - 24576a < \frac{7}{3}\Delta$, ou bien, $a > \frac{5461}{36864}\Delta$.

On trouve donc enfin:

$$\frac{5462}{36864}\Delta > a > \frac{5461}{36864}\Delta.$$

Il est vrai, qu'à la dernière des pages citées du Manuscrit, Huygens vérifie si, en effet:

$$\frac{5462}{36864} > \frac{4}{27} > \frac{5461}{36864};$$

mais ce petit calcul a probablement été ajouté après que la valeur $\frac{4}{27}$ avait été trouvée par une autre méthode.

D'ailleurs Huygens a calculé la limite supérieure $\frac{5462}{36864}\Delta > a$ encore d'une autre manière, c'est-à-dire en employant directement la relation $p > n$, qui peut s'écrire $3643\Delta - 24576a > > 912\Delta - 6144a$.

[1]) Ce paragraphe contient l'explication des calculs que nous avons reproduits dans l'Appendice III (p. 102—107).

De rekening vervolght pag. 2 en 3 [4]). In 't begin van pag. 2 blijckt dat a is $\infty \frac{2}{9}a$ en daerenboven al de quantiteijten der 2 neergaende ryen daar δ in komt [5]). Pag. 3 komt eerst het vervolg van de eerste suppositien pag. 1 begost en daer aldaar geen plaats toe en was [6]). Voorts werden pag. 3 de quantiteijten der rije B pag. 2 daer δ in komt met $+$ daer voor, opgesomt, volgens het theorema boven aen op deze pag. 3 gestelt [7]). Ende uijt de aengemerckte proportie deser quantiteijten tot die met $-$ geteijckent sijn in de selve rije B, en tot die met $-$ en $+$ staen in d'andere rije A, werden dese haere sommen oock gevonden. Waeruijt dan in plaats van de aequatie pag. 2 komt dese $\frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \infty a$ en eyndelijck $-a \infty \frac{207}{343}\delta$. dat is te seggen dat $-a$, 't welck was 't geen hadde J. die eerst werpt als noch niets was in geset, is $\frac{207}{343}\delta$. soo dat al hoewel dit met $-$ gestelt wierdt als of J. verloor, soo vind men nochtans dat hij wint $\frac{207}{343}$ van een ducaet.

Traduction:

Le calcul est continué p. 2 et 3 [4]). Au commencement de la p. 2 on trouve $a \infty \frac{2}{9}a$ augmenté de toutes les quantités des deux suites descendantes où entre δ [5]). La p. 3 contient en premier lieu la continuation des suppositions préalables qui commencent à la p. 1 et pour lesquelles il n'y avait pas assez de place à cette page [6]). Ensuite les quantités de la suite B de la p. 2, où entre δ et qui sont affectées du signe $+$, sont additionnées à la p. 3 à l'aide du théorème qu'on trouve en haut de cette page [7]). Or, en remarquant la proportion de ces quantités à celles marqués $-$ de la même suite B et à celles affectées du signe $-$ et du signe $+$ de l'autre suite A, on détermine aussi les sommes de ces dernières quantités. Il en résulte qu'on peut remplacer l'équation de la p. 2 par: $\frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \infty a$ et enfin par $-a \infty \frac{207}{343}\delta$. Ce qui veut dire que $-a$, c'est-à--dire l'avantage de J. qui jette le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, est égal à $\frac{207}{343}\delta$. Ainsi, quoique cet avantage fût supposé être négatif, c'est-à-dire que ce serait J. qui perdrait, on trouve néanmoins qu'il gagne $\frac{207}{343}$ d'un ducat.

---

[2]) Voir la p. 102 du présent Tome.
[3]) Voir la p. 103.
[4]) Voir les p. 104—107.
[5]) Voir à la p. 104 l'équation $a \infty \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}k$ et à la p. 105 les expressions pour $\frac{1}{3}b$ et $-\frac{2}{3}k$.
[6]) Voir les notes 4 et 5 de la p. 103.
[7]) Voir la p. 106.

§ 3 [1].

Pag. 10 [2]) werdt het getal der fchijven van B geftelt ∞ ω en daer van φ witte en ψ fwarte; zoo dat $\varphi + \psi \infty \omega$. Defe queftie is eerft volgens het voorgeftelde [3]) berekent op pag. 10. 11. 12. [4]) alwaer de proportie van φ tot ψ gedetermineert werdt door defe aequatie $\varphi \infty \frac{1}{6}\psi + \sqrt{37\psi\psi}$ [5]) foo dat fe in geen getalen kan gegeven werden [6]). In de aequatie die begint boven aen pag. 11 is a gelijck aan al de quantiteijten der neergaende 2 rijen daer Δ in komt en daerenboven aan $\frac{2\varphi a}{3\omega}$ ftaende boven aen de rije geteykent met B [7]). Maer om dat men

---

Traduction:

À la p. 10 [2]) le nombre des jetons de B fut pofé ∞ ω, dont ϕ blancs et ψ noirs; de forte que $\phi + \psi \infty \omega$. Cette queftion eft réfolue d'abord aux p. 10. 11. 12 [4]) fuivant ce qui fut propofé [4]). La proportion de ϕ à ψ y eft déterminée par l'équation $\phi \infty \frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{37\psi\psi}$ [5]), de forte qu'elle ne peut pas être définie par des nombres [6]). Dans l'équation qui commence en haut de la p. 11, a eft égal à toutes les quantités des deux fuites defcendantes, où entre Δ, augmentées de l'expreffion $\frac{2\phi a}{3\omega}$ qu'on trouve en haut de la fuite marquée B [7]). Mais parce qu'on défire que les chances des deux joueurs

---

[1]) Explication des calculs qu'on trouve dans l'Appendice IV, p. 108—115 du préfent Tome.

[2]) Voir la p. 109.

[3]) C'est-à-dire suivant la manière dont le problème fut posé par Hudde qui suppose que le joueur A doit choisir entre 2 jetons blancs et 1 noir; comparez les notes 1 et 2 de la p. 108.

[4]) Voir le § 1 (p. 108—113) de l'Appendice IV, où l'on doit substituer partout $\theta = 2$, $\lambda = 1$ pour retrouver les expressions qui se rapportent au problème tel qu'il fut posé par Hudde.

[5]) Lisez: $\frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{73\psi\psi}$ et comparez la p. 113 du présent Tome.

[6]) On retrouve cette manière d'indiquer l'incommensurabilité d'un rapport chez Euclide, voir p. e. la „Prop. 7" du „Lib. X", où on lit: „Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum" (p. 217 de l'édition de 1607 des „Elementa" par Clavius).

[7]) Voir à la p. 111 le premier terme du second membre de la suite pour $\frac{\theta k}{\varrho}$, où il faut toujours substituer $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $\varrho = 3$.

de kanſſen der 2 ſpeelders gelijckwaerdigh begeert, ſoo is dan $a \infty 0$. En daerom oock deſe voornoemde quantiteijt $\frac{2\varphi a}{3\omega} \infty 0$; daerom dan deze in de aequatie in fine pag. 11 [8]) voor o gehouden wordt. Ende is te weten dat in deſe aequatie alleen geſtelt werden de ſommen der quantiteijten daer Δ in komt van beijde de neergaende rijen A en B. Ende dewijl was $a \infty -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ [9]), en a moet ſijn $\infty 0$, ſoo moet dan oock $-\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ ſijn $\infty 0$, of $\frac{1}{3}b \infty \frac{2}{3}k$. daerom dan de pluſſen en minuſſen der quantiteijten met Δ der rije A, nae dat haere teijckens in contrarie verandert ſijn, moeten gelijck ſijn aen de pluſſen en minuſſen der quantiteijten Δ der rije B. gelijck geſtelt werd in de aequatie in fine pag. 11. welcke aequatie vervolght pag. 12 [10]).

Op de ſelfde pag. 10 en 11 werd begonnen de Rekening van de voorgaende queſtie in 't generael. ſoo dat in plaets van het getal der ſchijven daer A uijt treckt te weten 3 werdt geſtelt ρ, en het getal der witte ſchijven $2 \infty \theta$, en der ſwarte $1 \infty \lambda$. Soo dat $\theta + \lambda \infty \rho$. En tot deſe rekening behooren de quantiteijten die

---

Traduction:

ſoient égales, on a donc $a \infty 0$. Et, par ſuite, on a auſſi $\frac{2\Phi a}{3\omega} \infty 0$. C'eſt pourquoi cette expreſſion eſt ſuppoſée égale à zéro dans l'équation qu'on trouve au bas de la p. 11 [8]). Et l'on remarquera que cette équation contient ſeulement les ſommes des quantités, où entre Δ, des ſuites deſcendantes A et B. Et parce qu'on avait $a \infty -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ [9]) et que a doit être $\infty 0$, il s'enſuit qu'on doit avoir auſſi $-\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k \infty 0$, ou bien $\frac{1}{3}b \infty \frac{2}{3}k$. Par conſéquent, tous les + et les — des quantités, contenant Δ, de la ſuite A doivent être égaux après changement de ſigne aux + et aux — des quantités, contenant Δ, de la ſuite B, comme nous l'avons poſé dans l'équation au bas de la p. 11, laquelle équation eſt repriſe à la p. 12 [10]).

Aux mêmes pag. 10 et 11 on a commencé le Calcul de la queſtion générale, d'après laquelle le nombre des jetons, à ſavoir 3, dont A tire le ſien, fut poſé $\infty \rho$, et le nombre des jetons blancs (étant 2) $\infty \theta$, et des noirs (étant 1) $\infty \lambda$; de ſorte que $\theta + \lambda \infty \rho$. Et à ce calcul ſe rapportent les quantités que nous avons entourées de

---

8) Il s'agit de l'équation $-\lambda + \frac{\lambda\varphi\varrho}{\theta\psi} \infty \theta - \frac{\lambda\varphi}{\omega}$ (p. 112), ou plutôt de celle qu'on en déduit en posant $\theta = 2, \lambda = 1$.

9) Voir la dernière ligne de la p. 110.

10) Voir aux p. 112—113 les réductions successives de l'équation en question.

pag. 10 en 11 met ringen omgetrocken fijn [1]). En werd vervolght pag. 14 en 15. alwaer den Regel totte generale folutie van defe queftie, te weten om de kanfen gelijckwaerdigh te maecken gevonden werdt, namentlijck $\varphi\varphi \infty - \psi\varphi + \frac{\theta\theta\psi\varphi}{\lambda\lambda + \lambda\theta} + \frac{\theta\psi\psi}{\lambda}$ [2]),

Voorts heb ick oock in 't generael willen rekenen [3]), gegeven fijnde het getal der witte en fwarte fchijven van ieder der 2 fpeelders, ceteris pofitis ut prius, hoe haere kanffen ftaen dat is hoeveel A die eerft werpt verlieft of wint. Welcke rekening uyt de voorgaende aequatie pag. 14 [4]), oock licht gededuceert werdt, moetende nochtans hier foo gevonden werden de fommen der quantiteijten daer Δ in komt met + of — van een der neergaende rijen A of B. Gelijck in defe cafus ick gerekent hebbe de pluffen der rije B, welcke rekeningh begint pag. 15 in fin. [5]) en vervolght pag. 16. alwaer defe fomme gevonden fijnde door het theorema boven aen pag. 3 [6]); foo werden voorts daerdoor oock de pluffen en minuffen der andere quantiteijten met Δ der rijen A en B gevonden, dewijl haere

---

Traduction:

de cercles aux p. 10 et 11 [1]). Et le calcul eft continué aux p. 14 et 15, où la Règle eft déduite qui donne la folution générale de cette queftion, à favoir: de faire en forte que les chances deviennent égales, c'eft-à-dire $\Phi\Phi \infty - \psi\Phi + \frac{\theta\theta\psi\varphi}{\lambda\lambda + \lambda\theta} + \frac{\theta\psi\psi}{\lambda}$ [2]).

Enfuite j'ai voulu calculer auffi [3]), pour le cas général, quelles font les chances des deux joueurs quand le nombre des jetons blancs et noirs de chacun des 2 joueurs eft donné, ceteris pofitis ut prius, c'eft-à-dire: quel eft l'avantage ou le défavantage de A qui jette le premier. Ce calcul peut facilement être déduit de l'équation précédente de la p. 14 [4]), mais on doit néanmoins chercher alors, pour une des fuites defcendantes A ou B, la fomme des quantités où entre Δ qui font affectées du figne + ou du figne —. Ainfi j'ai déterminé dans le cas préfent les + de la fuite B. Ce calcul commence vers la fin de la p. 15 [5]) et continue à la p. 16, où cette fomme eft trouvée par le théorème qu'on rencontre en haut de la p. 3 [6]); on connaît alors auffi les fommes des + et des — des autres quantités des fuites A et B, puifque les proportions qu'elles ont les unes aux autres font connues et indiquées au côté droit

---

[1]) Ce sont ces quantités que nous avons reproduites aux p. 109—114 à l'exclusion de celles qui se rapportent à la solution particulière; voir la note 2 de la p. 108.

[2]) Voir la p. 112.

[3]) Il s'agit du § 2 de l'Appendice IV, p. 113—115.

[4]) Voir la dernière ligne de la p. 110.

[5]) Voir le début du § 2 à la p. 113.

[6]) Voir le „Theorema" de la p. 106.

proportiën onder malkander bekent ſijn pag. 14. aen de rechter handen [7]. Waer uijt dan voortkomt den regel pag. 16 in fine [8]. alwaer de quantiteijt $-\frac{\theta\varphi a}{\rho\omega}$ gehaelt is uyt de aequatie pag. 14 init. [9] want deſe quantiteijt hier nu niet en is ∞ o dewijl a geen o en is. De aequatie die deſen Regel in fin. pag. 16 begrijpt [8] ſoude miſſchien konnen gedivideert werden als men overal voor ρ ſtelde $\theta+\lambda$ en voor ω, $\varphi+\psi$, welcke volgens 't bovengeſtelde haer gelijck ſijn [10].

Traduction:

de la p. 14 [7]. D'où l'on déduit la règle de la p. 16 vers la fin [8], où la quantité $-\frac{\theta\Phi a}{\rho\omega}$ provient de l'équation en haut de la p. 14 [9]. En effet, ici cette quantité n'eſt plus égale à zéro, puiſqu'il n'en eſt pas ainſi pour a. Peut-être l'équation qui résume cette règle vers la fin de la p. 16 [8], pourrait-elle être diviſée, ſi l'on y remplaçait partout ρ par $\theta+\lambda$ et ω par $\Phi+\psi$; quantités qui leur ſont égales d'après ce que nous avons posé plus haut [10].

---

7) Voir la p. 112 après le premier alinéa.

8) Voir la première „Regula" de la p. 114.

9) L'équation $a \infty -\frac{\lambda b}{\varrho}+\frac{\theta k}{\varrho}$, où $\frac{\theta k}{\varrho} \infty \frac{\theta\varphi a}{\varrho\omega}+\frac{\theta\psi l}{\varrho\omega}$; voir les p. 110—111.

10) Voir la p. 109. Remarquons que dans le cas qu'une telle division serait possible le numérateur de la fraction qui est égal à $a-\frac{\theta\varphi a}{\delta\omega}$ d'après la première „Regula" de la p. 114 devrait contenir un facteur rationnel, mais qu'il est facile de constater qu'il n'en est pas ainsi.

En effet, si l'on suppose $a=0$, il faut que ce numérateur soit égal à zéro, c'est-à-dire qu'on ait:

$$\theta\theta\omega\psi-\lambda\varrho\omega\varphi+\theta\lambda\omega\psi-\lambda\theta\varphi\psi=0.$$

Cette équation doit donc amener, outre les solutions éventuelles qui dépendraient du facteur soupçonné, la solution irrationnelle du problème traité dans le § 1 de l'Appendice IV (p. 108—113). Or, cette dernière solution est exprimée par l'équation qui résume la „Regula" de la p. 112 et qui peut s'écrire:

$$\lambda\varrho\varphi\varphi+\lambda\varrho\varphi\psi-\theta\theta\varphi\psi-\theta\varrho\psi\psi=0.$$

L'égalité du degré des premiers membres de ces équations par rapport aux quantités $\theta, \lambda, \varrho, \varphi, \psi, \omega$ prouve déjà que le numérateur en question ne contient pas de facteur supplémentaire. D'ailleurs l'identité complète des deux équations est aisément vérifiée en substituant dans la première $\varphi+\psi$ à ω.

§ 4 [1]).

In de queftie van kruijs of munt pag. 21. [2]) wil men weten hoe veel dat ieder fpeelder van eerften aen foude moeten in fetten, (ieder even veel) om te maecken dat A die voorwerpt foo goede kans foude hebben als B. komt ieder $\frac{2}{3}$ van een ducaet [3]).

Sit z quod unufquifque deponit ab initio.

A die eerft werpt heeft 1 kans tot z, en 1 kans om in te zetten Δ [4]) behalven z, en den anderen te laeten werpen 't welck hem waert zij $-c$. Ergo aen B is het waert $+c$. En fal wefen $c \infty$ 1 kans tot $\Delta + z$ en 1 kans tot in te fetten $\Delta + z$ tegen $\Delta + z$ en laten den andere werpen 't welck aen B waert fij $-d$. En foo voort.

Traduction:

Dans la queftion de croix ou pile p. 21 [2]) on veut favoir combien chaque joueur devrait mettre au début (chacun la même fomme), afin que A, qui jette le premier, eût une chance auffi bonne que B. Il vient: chacun $\frac{2}{3}$ d'un ducat [3]).

Soit z ce que chacun met dès le commencement.

A, qui jette le premier, a 1 chance d'obtenir z, et 1 chance de mettre Δ [4]) en plus de fa mife z et de laiffer jeter l'autre; ce qui lui vaille $-c$. Par conféquent, cela vaut c à B. Et on aura $c \infty$ 1 chance d'obtenir $\Delta + z$ et 1 chance de mettre $\Delta + z$ contre $\Delta + z$ et de laiffer jeter l'autre; ce qui vaille $-d$ à B. Et ainfi de fuite:

---

[1]) Ce paragraphe, emprunté à la p. 63 du Manuscrit C (numérotée 19 par Huygens), contient la solution d'un problème posé par Huygens dans sa lettre à Hudde du 10 mai 1665; voir la p. 353 du T. V. On peut encore consulter sur ce problème la p. 38 de l'Avertissement.

[2]) Voir la p. 116.

[3]) Comparez le haut de la p. 394 du T. V.

[4]) C'est-à-dire „un ducat".

[5]) Par cette notation Huygens indique qu'on peut emplacer $-\frac{c}{2}$ par $\frac{-\Delta - z + d}{4}$.

[6]) La somme de ces quantités représente la suite „des $-\Delta$", c'est-à-dire des termes négatifs de l'expression pour $-a$.

[7]) Comparez les p. 121—122.

$$-a \infty \frac{z-c}{2}$$

$$\frac{-\Delta - z + d}{4}\ ^{5)}$$

$$\frac{\Delta + z - e}{8}$$

$$\frac{-2\Delta - z + f}{16}$$

$$\frac{2\Delta + z - g}{32}$$

$$\frac{-3\Delta - z + h}{64}$$

$$\frac{3\Delta + z - i}{128}$$

$$-\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}[\Delta]$$

$$-\frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}[\Delta]$$

$$-\frac{1}{64}[\Delta]\ ^{6)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{9}\Delta \infty \text{ les} - \Delta\ ^{7)} \\ \frac{2}{9}\Delta \infty \text{ les} + \Delta\end{array}\right\}\text{f.}$$

$$-\frac{2}{9}\Delta \infty \text{ les} + \text{et} - \Delta$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{4}\text{de } \frac{1}{4}[z] \infty \frac{1}{3}z \infty \text{ les} - z \\ \qquad\qquad\quad \frac{1}{6}z \infty \text{ les} + z\end{array}\right\}\text{f.}$$

$$-\frac{1}{6}z \text{ les} + \text{et} - z$$

Traduction:

$$-a \infty \frac{z-c}{2}$$

$$\frac{-\Delta - z + d}{4}\ ^{5)}$$

.

.

.

.

.

$$\frac{3\Delta + z - i}{128}$$

$$-\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta$$

$$-\frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta$$

$$-\frac{1}{64}\Delta\ ^{6)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{9}\Delta \infty \text{les} - \Delta\ ^{7)} \\ \frac{2}{9}\Delta \infty \text{les} + \Delta\end{array}\right\}\text{f.}$$

$$-\frac{2}{9}\Delta \infty \text{ les} + \text{et les} - \Delta$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{4}\text{de } \frac{1}{4}z \infty \frac{1}{3}z \infty \text{ les} - z \\ \qquad\qquad\quad \frac{1}{6}z \infty \text{les} + z\end{array}\right\}\text{f.}$$

$$-\frac{1}{6}z \text{ les} + \text{et} - z$$

$-a \infty \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z - \frac{2}{9}\Delta \infty 0$ [1]) nam $-a$ volumus eſſe ∞ o ut ſors utriuſqu æqualis ſit.

$$z \infty \frac{2}{3}\Delta$$

§ 5 [2]).

15 Jul. 1665.

Pag. 19 en 20 [3]) was getenteert de ſolutie van deſe queſtie die alhier ſal berekent werden, ſijnde als volght.

A en B werpen met beurten kruys of munt, op conditie dat die munt werpt een ducaet daer voor ieder reijſe ſal in ſetten, maer die kruijs werpt ſal ieder reijſe daer voor een ducaet trecken als er iets in geſet is. En A ſal eerſt werpen als noch niets is in geſet en het ſpel niet uijt ſijn eer er iets in geſet is, en men ſal ſoo lang ſpelen tot alles weder uijtgetrocken is. De vrage is hoe veel A hierdoor verlieſt. facit $\frac{1}{6}$ van een ducaet.

Traduction:

$-a \infty \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z - \frac{2}{9}\Delta \infty 0$ [1]) car nous ſuppoſons que $-a$ ſoit zéro, afin que la chance ſoit égale pour les deux joueurs.

$$z \infty \frac{2}{3}\Delta$$

§ 5 [2]).

15 juillet 1665.

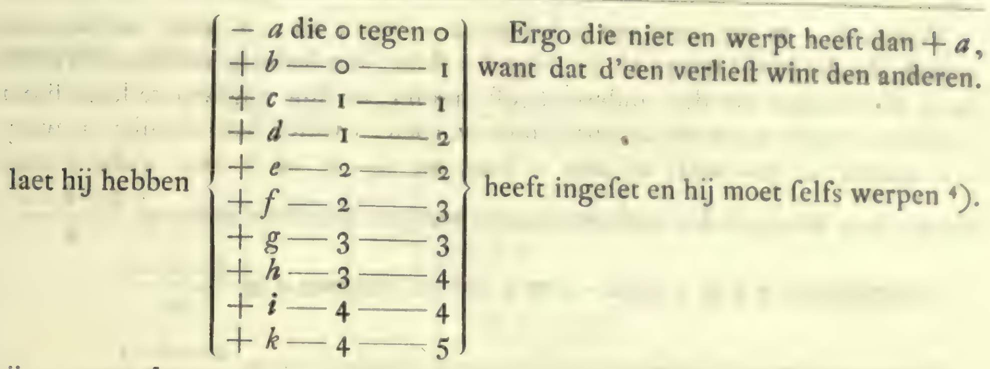
Aux p. 19 et 20 [3]) nous avons tenté la ſolution de la queſtion ſuivante, qui ſera réſolue ici:

A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque fois un ducat ſi quelque choſe a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque choſe ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout a été enlevé. On demande quel eſt le déſavantage de A. facit $\frac{1}{6}$ d'un ducat.

---

[1]) C'est-à-dire en supposant que le dernier terme, comme ici $\frac{i}{128}$, s'approche indéfiniment de zéro; comparez la p. 120.

[2]) Ce paragraphe contient la solution d'un problème dont Huygens et Hudde se sont occupés dans les mois de juillet et d'août 1665; voir la p. 463 du T. V et surtout la note 2 de la même page. On peut encore consulter sur ce problème les p. 38—48 de l'Avertissement.



laet hij hebben

$-a$	die 0	tegen 0	Ergo die niet en werpt heeft dan $+a$, want dat d'een verlieſt wint den anderen.
$+b$	0	1	
$+c$	1	1	
$+d$	1	2	
$+e$	2	2	heeft ingeſet en hij moet ſelfs werpen [4].
$+f$	2	3	
$+g$	3	3	
$+h$	3	4	
$+i$	4	4	
$+k$	4	5	

zij $\Delta \infty$ een ducaet.

$-a \infty$ 1 kans tot $+a$ en 1 kans tot $-b$ [5]) $b \infty$ 1. tot Δ en 1 tot $-c$ [6])

Ergo $-a \infty \frac{a-b}{2}$; $3a \infty b$ Ergo $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$

Traduction:

ſoit

$-a$ l'avantage de celui qui a mis 0 contre 0			Par ſuite, celui qui ne jette pas a l'avantage $+a$, car ce que l'un gagne, l'autre le perd.
$+b$	0	1	
....			et qui doit jeter [4])
....			
$+k$	4	5	

Soit $\Delta \infty$ un ducat.

$-a \infty$ 1 chance à $+a$ et 1 chance à $-b$ [5]) $b \infty$ 1. à Δ et 1. à $-c$ [6])

Par ſuite $-a \infty \frac{a-b}{2}$; $3a \infty b$ Par ſuite $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$

---

[3]) Ces pages contiennent des calculs qui correspondent en partie avec ceux qui vont suivre, mais qui n'ont pas été terminés.

[4]) Pour préciser dès l'abord le sens attaché par Huygens aux quantités b, c, d, etc., appelons x_m la part due à celui qui doit jeter le premier, lorsqu'il s'agit de partager, sans terminer la partie, un enjeu $m\Delta$ ($\Delta =$ un ducat), qui s'est formé durant le jeu. On aura alors: $b = x_1$, $c = x_2 - \Delta$, $d = x_3 - \Delta$, $e = x_4 - 2\Delta$, $f = x_5 - 2\Delta$, $g = x_6 - 3\Delta$, $h = x_7 - 3\Delta$, $i = x_8 - 4\Delta$, $k = x_9 - 4\Delta$. Au contraire les avantages (pris dans le sens de Huygens) de l'autre joueur seront respectivement $b' = (\Delta - x_1) - \Delta$ (puisqu'on doit retrancher le ducat mis par lui même) $= -b$; $c' = (2\Delta - x_2) - \Delta = -c$; $d' = (3\Delta - x_3) - 2\Delta = -d$; $e' = (4\Delta - x_4) - 2\Delta = -e$, etc; voir toutefois les p. 43—47 de l'Avertissement, où il est montré que l'hypothèse que la somme des espérances des deux joueurs est égale à la mise totale est sujette à caution à cause de la possibilité que le jeu se continue indéfiniment sans que la mise soit épuisée. Mais ici et dans les notes qui suivent nous accepterons cette hypothèse sans laquelle les raisonnements de Huygens perdent leur validité.

[5]) C'est-à-dire à b'; mais $b' = -b$.

[6]) Puisqu'on a $c' = -c$.

Voorts is $c \infty$ een kans om te hebben $\Delta - b$ en 1 tot $- d$, waer van de reden is dese, dat die kruijs werpt als er 1 tegen 1 staet, kan bedacht werden te trekken de Δ ofte ducaet die den anderen heeft ingeset, en sijne eijghene te laten staen, te weten 1 tegen 0, en den anderen moet werpen, 't welck hem die niet en werpt $- b$ weerdt is. soo heeft hij dan 1 kans tot $\Delta - b$, en 1 tot $- d$ dat is om 2 tegen 1 in te setten en den anderen te laten werpen. daerom dan is $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2}$.

Van gelijcken is $d \infty$ 1 tot $\Delta - c$ en 1 tot $- e$; daerom $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$

En soo werden dese volgende mede voort gevonden [1]) $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$

$$f \infty \frac{\Delta - e - g}{2}$$

$$g \infty \frac{\Delta - f - h}{2}$$

$$h \infty \frac{\Delta - g - i}{2}$$

$$i \infty \frac{\Delta - h - k}{2}$$

$$k \infty \frac{\Delta - i - l}{2}$$

Traduction:

Ensuite c est égale à une chance d'avoir $\Delta - b$ et 1 d'avoir $- d$, pour la raison que celui qui jette croix quand il y 1 contre 1 à l'enjeu peut être estimé avoir gagné le ducat que l'autre a mis et laisser son propre ducat à l'enjeu: ce qui est 1 contre 0, l'autre devant jeter, et cela vaut $- b$ à celui qui ne doit pas jeter; de sorte qu'il a donc 1 chance d'avoir $\Delta - b$, et 1 d'avoir $- d$, c'est-à-dire: de mettre 2 contre 1 et de laisser jeter l'autre. C'est pourquoi $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2}$.

De même $d \infty$ 1 à $\Delta - c$ et 1 à $- e$; ainsi $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$ et de la même façon on trouve ensuite [1]) $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$; $f \infty \frac{\Delta - e - g}{2}$; $g \infty \frac{\Delta - f - b}{2}$; $h \infty \frac{\Delta - g - i}{2}$; $i \infty \frac{\Delta - h - k}{2}$; $k \infty \frac{\Delta - i - l}{2}$.

Soo is dan $-a \infty \frac{a-b}{2}$

$\frac{-\Delta+c}{4}$; $-\frac{b}{2}$ is $\infty \frac{-\Delta+c}{4}$ boven gevonden [2])

$$\frac{+\Delta-b-a}{8}$$

$$\frac{-\Delta+c+e}{16}$$

$$\frac{+\Delta-d-f}{32}$$

$$\frac{-\Delta+e+g}{64}$$

$$\frac{+\Delta-f-h}{128}$$

$$\frac{-\Delta+g+i}{256}$$

$$\frac{+\Delta-h-k}{512}$$

Traduction:

On a donc $-a \infty \frac{a-b}{2}$

$\frac{-\Delta+c}{4}$; on a trouvé plus haut $-\frac{b}{2} \infty \frac{-\Delta+c}{4}$ [2]).

$$\frac{+\Delta-b-d}{8}$$

$$\frac{-\Delta+c+e}{16}$$

$$\frac{+\Delta-h-k}{512}$$

---

[1]) Sous la réserve que nous avons formulée dans la note 4 de la p. 133, le raisonnement qui conduit aux équations mentionnées est exact. Pour l'appliquer il suffit de supposer que le joueur qui jette croix prend toujours un des ducats qui appartiennent à la mise de l'autre joueur. Toutefois cette supposition peut sembler un peu artificielle. Il n'est donc peut-être pas inutile de faire remarquer que toutes ces équations, quand on y substitue les valeurs de b, c, d, etc. indiquées dans la même note 4 de la p. 133, se réduisent à des cas particuliers de l'équation $x_m = m\Delta - \frac{1}{2}x_{m-1} - \frac{1}{2}x_{m+1}$; équation qui découle de la définition de x_m telle que nous l'avons donnée dans la note citée, puisqu'on a évidemment par suite de cette définition $x_m = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\left\{(m-1)\Delta - x_{m-1}\right\} - \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\left\{(m+1)\Delta - x_{m+1}\right\}$.

[2]) Voir la p. 133.

dat is $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

maer $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$ en $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2}$

Ergo $d \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}d - \frac{1}{2}e$

$-\frac{1}{8}d \infty -\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$

wederom is $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$ en $d \infty \frac{1}{3}\Delta + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}e$

Ergo $e \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}\Delta - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}e - \frac{1}{2}f$

$\frac{1}{12}e \infty \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$

$f \infty \frac{\Delta - e - g}{2}$ en $e \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}f$

Ergo $f \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}b + \frac{3}{8}f - \frac{1}{2}g$

$-\frac{1}{16}f \infty -\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$

Traduction:

c'eſt-à-dire $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

mais $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$ et $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2}$

Donc $d \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}d - \frac{1}{2}e$

$-\frac{1}{8}d \infty -\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$

de même $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$ et $d \infty \frac{1}{3}\Delta + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}e$

Donc $e \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}\Delta - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}e - \frac{1}{2}f$

$\frac{1}{12}e \infty \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$

$f \infty \frac{\Delta - e - g}{2}$ et $e \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}f$

Donc $f \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}b + \frac{3}{8}f - \frac{1}{2}g$

$-\frac{1}{16}f \infty -\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$

$$g \infty \frac{\Delta - f - h}{2} \text{ en } f \infty \frac{2}{5}\Delta + \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}g$$

$$\text{Ergo } g \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{5}\Delta - \frac{1}{10}b + \frac{2}{5}g - \frac{1}{2}h$$

$$\frac{1}{20}g \infty \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$h \infty \frac{\Delta - g - i}{2} \text{ en } g \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}b - \frac{5}{6}h$$

$$\text{Ergo } h \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{12}b + \frac{5}{12}h - \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{24}h \infty -\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$i \infty \frac{\Delta - h - k}{2} \text{ en } h \infty \frac{3}{7}\Delta + \frac{1}{7}b - \frac{6}{7}i$$

$$\text{Ergo } i \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{3}{14}\Delta - \frac{1}{14}b + \frac{3}{7}i - \frac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{28}i \infty \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Traduction.

$$g \infty \frac{\Delta - f - h}{2} \text{ et } f \infty \frac{2}{5}\Delta + \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}g$$

$$\text{Donc } g \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{5}\Delta - \frac{1}{10}b + \frac{2}{5}g - \frac{1}{2}h$$

$$\frac{1}{20}g \infty \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$h \infty \frac{\Delta - g - i}{2} \text{ et } g \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}b - \frac{5}{6}h$$

$$\text{Donc } h \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{12}b + \frac{5}{12}h - \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{24}h \infty -\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$i \infty \frac{\Delta - h - k}{2} \text{ et } h \infty \frac{3}{7}\Delta + \frac{1}{7}b - \frac{6}{7}i$$

$$\text{Donc } i \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{3}{14}\Delta - \frac{1}{14}b + \frac{3}{7}i - \frac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{28}i \infty \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Soo is dan $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

$$-\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$$ [1])

$$\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$$

$$-\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$$

$[+ \frac{1}{20}g]$

$$\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$-\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Traduction:

On a donc $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

$$-\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$$ [1])

$$+\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b + \frac{1}{16}f$$

$$\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

[1]) Cette notation indique qu'on peut remplacer $-\frac{1}{8}d$ par sa valeur, trouvée plus haut à la p. 136.

[2]) Consultez sur la signification précise de k la note 4 de la p. 133. On peut encore définir $2k-\Delta$ comme la *différence* des espérances mathématiques des deux joueurs dans le cas où ils auraient à partager entre eux un enjeu de neuf ducats suivant les règles du jeu en question. D'autre part $2i$ est égal à la différence des espérances dans le cas où il y a huit ducats à l'enjeu.

A B

$$\text{dat is} - a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b$$
$$-\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b$$
$$+\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b$$
$$-\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b$$
$$+\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b$$
$$-\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b$$
$$+\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

De laetfte quantiteijt, als hier $\frac{1}{32}k$, wordt infinitè kleijn, dewijl k [2]) niet oneijndigh groot en werdt, om dat als den eenen maer een meer als den anderen

---

Traduction:

A B

$$\text{C'eft-à-dire} - a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b$$
$$-\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b$$
$$+\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b$$
$$-\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b$$
$$+\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b$$
$$-\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b$$
$$+\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

La dernière quantité, ici $\frac{1}{32}k$, devient infiniment petite, puifque k [2]) ne devient pas infiniment grand, parce que fi l'un n'a mis qu'un feul ducat de plus que

ingeset heeft, soo siet men wel dat hij in dit spel niet boven 1 of 2 en verliest, maer den divisor, (sijnde hier 32) werd oneindigh groot wassende met 4. Soo dat dan de laetste quantiteijt, (hier $\frac{1}{32}k$,) voor o moet gerekent werden, als men verstaet in infinitum voort gegaen te sijn, ende dienvolgens dat $-a$ is ∞ $\frac{1}{2}a$ — de rije onder A — de rije onder B.

maer in de rije onder A, sijn al de + gelijck al de —, behalve de bovenste $-\frac{1}{8}\Delta$. Soo is dan $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta$ — de rije onder B in infinitum vervolght.

maer de rije onder B is $\frac{1}{8}$ van dese rije $-\frac{1}{1}b - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}b - \frac{1}{10}b - \frac{1}{15}b - \frac{1}{21}b - \frac{1}{28}b$ &c. En dese rije is $\infty -2b$ gelijck hier nae gethoont sal werden (pag. 28, 29, 30 [1])), sijnde de divisores van dese gebrokens de triangulare getallen van

Traduction:

l'autre, il est assez évident que dans ce jeu il ne perd pas plus que 1 ou 2 ducats, mais le diviseur (étant ici 32) devient infiniment grand, augmentant chaque fois de 4. Par conséquent la dernière quantité (ici $\frac{1}{32}k$) doit être comptée pour o, si l'on suppose qu'on a continué le calcul jusqu'à l'infini. On trouve donc $-a \infty \frac{1}{2}a$ — la suite sous A — la suite sous B.

Mais dans la suite sous A tous les + sont égaux à tous les —, à l'exception du premier terme $-\frac{1}{8}\Delta$. On a donc $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta$ — la suite sous B qu'on doit continuer jusqu'à l'infini.

Mais la suite sous B est $\frac{1}{8}$ de la suite: $-\frac{1}{1}b - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}b - \frac{1}{10}b - \frac{1}{15}b - \frac{1}{21}b - \frac{1}{28}b$ &c. Et cette suite est égale à $-2b$ comme nous le montrerons plus bas (pag. 28, 29, 30 [1])), les diviseurs de ces fractions étant les nombres triangulaires à com-

[1]) Voir le §.6 qui suit (p. 144—150) et surtout la note 1 de la p. 144.

vooren af. En $\frac{1}{8}$ van $-2b$ is $\infty -\frac{1}{4}b$. Soo is dan

$$-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{4}b$$

$$-6a \infty -\frac{1}{2}\Delta - b;\ \text{sed } b \infty 3a.\ \text{vid. pag. } 25\ ^{2}).$$

$$a \infty \frac{1}{6}\Delta.$$

Soo verlieſt dan A die eerſt werpt $\frac{1}{6}$ van een ducaet.

Sijnde dan $a \infty \frac{1}{6}\Delta$ en $b \infty 3a$; $b \infty \frac{1}{2}\Delta$ ſed $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$. vid. pag. 25 [2]).

$\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c}{2}$; $\Delta \infty \Delta - c$, $c \infty 0$, ſoo dat als er 1 tegen 1 inſtaet de kanſen gelijck ſijn. ſed $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2} \infty 0$; $\Delta \infty b + d$, en $b \infty \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \infty d$, ſoo is $d \infty b$ dat is deſe kanſſen even goedt, te weten die van o tegen 1 of van 1 tegen 2 ingeſet te hebben en te moeten werpen.

Traduction:

mencer par le premier. Et $\frac{1}{8}$ de $-2b$ eſt $-\frac{1}{4}b$. On a donc $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{4}b$; $-6a \infty -\frac{1}{2}\Delta - b$; mais $b \infty 3a$. vid. pag. 25 [2]); $a \infty \frac{1}{6}\Delta$.

A, qui jette le premier, perd donc $\frac{1}{6}$ d'un ducat.

On a donc $a \infty \frac{1}{6}\Delta$ et $b \infty 3a$; $b \infty \frac{1}{2}\Delta$, mais $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$. vid. pag. 25 [2]).

$\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c}{2}$; $\Delta \infty \Delta - c$, $c \infty 0$; ainſi, ſi l'on a mis 1 contre 1 les chances ſont égales. Mais $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2} \infty 0$; $\Delta \infty b + d$, et $b \infty \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \infty d$, par ſuite $d \infty b$, c'eſt-à-dire: ces chances ſont égales; ſavoir: celle qu'on a lorſqu' on a mis o contre 1 ou 1 contre 2 et qu'on doit jeter.

---

[2]) Voir la p. 133.

ſed $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$; $\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$, ſed $c \infty 0$; $\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}e$, $e \infty 0$; ſoo dat als er 2 tegen 2 in ſtaet de kanſſen wederom gelijck ſijn.

ſed $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$; Ergo $\frac{\Delta - d - f}{2} \infty 0$; Ergo $\Delta \infty d + f$ ſed $d \infty \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \infty f$. Ergo $f \infty d \infty b$.

En ſoo konnen voorts oock d'andere kanſſen gevonden werden ſijnde overhands $\infty 0$ en gelijck $\frac{1}{2}\Delta$ [1]).

Men moeſt ſien of men in deſe queſtie door korter wegh tot ſeecker beſluit zoude konnen geraecken, 't welck ſoude ſijn indien men beſluiten konde dat als er 1 tegen 1 ingeſet is de kanſen gelijck ſijn [2]). Siet pag. præced [3]).

Traduction:

Mais $d \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$, $\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c - e}{2}$; mais $c \infty 0$; $\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}e$, $e \infty 0$; de ſorte que s'il y a 2 contre 2 à l'enjeu les chances ſont de nouveau égales.

Mais $e \infty \frac{\Delta - d - f}{2}$; par ſuite $\frac{\Delta - d - f}{2} \infty 0$; donc $\Delta \infty d + f$, mais $d \infty \frac{1}{2}\Delta$ $\frac{1}{2}\Delta \infty f$. Donc $f \infty d \infty b$.

Et l'on peut trouver enſuite les autres chances de la même manière. Elles ſont alternativement $\infty 0$ et égales à $\frac{1}{2}\Delta$ [1]).

Il faudrait examiner ſi dans cette queſtion on ne pourrait pas arriver à un réſultat certain par une voie plus courte. Cela ſerait ainſi ſi l'on pouvait conclure que les chances ſont égales quand on a mis 1 contre 1 [2]). Voir la page précédente [3]).

---

[1]) Comparez la note 4 de la p. 41 de l'Avertissement.

[2]) On peut, en effet, arriver à cette conclusion par une voie très courte. Reprenons à cet effet les notations de la note 4 de la p. 133. Soit donc x_2 l'espérance mathématique du joueur qui doit jeter (c'est à-dire la part qui lui est due des deux ducats qui se trouvent à l'enjeu) et soit A ce joueur. On peut partager le jeu en deux périodes dont la première s'étend jusqu'au moment où pour la première fois l'enjeu est réduit à un seul ducat. La deuxième période s'étend depuis cet instant jusqu'à la fin du jeu, et il est évident que l'espérance mathématique totale x_2 est égale à la somme des espérances mathématiques partielles concernant les deux périodes. Or, l'espérance concernant la première période est la même que s'il n'y avait qu'un seul ducat à l'enjeu et que l'on jouât jusqu'à l'épuisement de l'enjeu; elle est donc égale à x_1. Quant à la deuxième période, il est sûr que lorsqu'elle commence ce sera B qui doit jeter (puisque c'est toujours son tour de jeter quand le nombre des ducats à l'enjeu est impair). L'espé-

De kanſſen van 2 of meer ſpeelders ſijn gelijck ofte evenwaerdich, als het ſpel ſoodanigh is dat, even geluckigh ſpelende tot het eijnde van 't ſpel, niemandt winnen kan noch verlieſen: Ende dat een ſelfde exces van geluck aen d'een of d'ander evenveel gewin of avantage toebrengen ſoude.

Hier uijt volght dat als in 't ſpel daer van hier gehandelt werdt, 1 tegen 1 ingeſet is, (want als A kruijs werpt en B mede, ſoo treckt elk een en het ſpel is uijt [4])) of 2 tegen 2, of 3 tegen 3, &c. dat dan de kanſſen van de ſpeelders A en B gelijck ſijn [5]). Nu als o tegen o ingeset is, en A moet eerſt ſpelen, ſoo is ſijn verlies geſtelt te zijn $-a \infty <$ 1 kans tot $+a$ als hij kruijs werpt / 1 kans tot $-b$ als hij munt werpt en derhalve Δ moet inſetten

maar $-b$ is $<$ 1 kans tot $-\Delta$ als B komt kruijs te werpen. / 1 kans tot o dat is noch winſt noch verlies, als B munt werpt en 1 tegen 1 moet inſetten.

Traduction:

Les chances de 2 ou de pluſieurs joueurs ſont égales ou équivalentes ſi le jeu eſt tel que lorſqu'on joue jusqu'à la fin avec un ſuccès égal perſonne ne gagne ni ne perd: Et qu'un même excès de bonne chance apporte autant de gain ou d'avantage à l'un qu'il en apporte à l'autre.

Il en réſulte que ſi, dans le jeu dont nous traitons ici, on a mis 1 contre 1 (car ſi A jette croix et B de même, chacun prend un ducat et le jeu eſt fini [4])) ou 2 contre 2, ou 3 contre 3, etc., qu'alors les chances des joueurs A et B ſont égales [5]). Or, ſi l'on a mis o contre o et que A doit jouer le premier, nous avons poſé pour ſa perte:

$-a \infty <$ 1 chance à $+a$ s'il jette croix / 1 chance à $-b$ s'il jette pile et qu'il doit donc mettre Δ;

mais $-b$ eſt $<$ 1 chance à $-\Delta$ ſi B vient à jeter croix. / 1 chance à o, c'eſt-à-dire gain ni perte, ſi B jette pile et qu'il doit mettre 1 contre 1.

---

rance de B sera donc x_1, et $\Delta - x_1$ celle de A. Par suite, $x_2 = x_1 + \Delta - x_1 = \Delta$. L'avantage de A, dans le sens que Huygens y attache, est donc $c = x_2 - \Delta = 0$; ce qu'il fallait prouver.

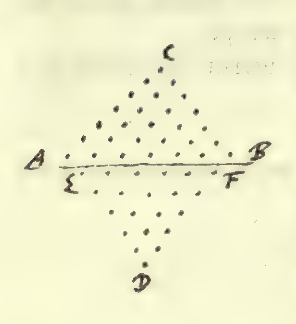
3) Le raisonnement qui va suivre fut écrit par Huygens sur la page précédente du Manuscrit dans un espace qui jusque là était resté vide.

4) Cette phrase se trouve en marge du Manuscrit.

5) Ce raisonnement n'a pu entièrement satisfaire Huygens. Il nous semble qu'on doit plutôt considérer cette partie de la présente Pièce comme une annotation provisoire sur laquelle il y aurait lieu peut-être de revenir. Comparez d'ailleurs les p. 43—48 de l'Avertissement, et surtout la note 1 de la p. 46, où nous avons voulu montrer qu'en effet les chances des deux joueurs sont égales dans les cas mentionnés, mais que l'enjeu doit être considéré comme perdu pour eux s'ils appliquent, sans en déroger en aucun cas, les règles du jeu, telles qu'elles sont formulées à la p. 132.

Soo is $-b \infty -\frac{1}{2}\Delta$. Ergo $-a \infty < \begin{matrix} 1 \text{ tot } + a \\ 1 \text{ tot } -\frac{1}{2}\Delta \end{matrix}$. Ergo $-a \infty \frac{a - \frac{1}{2}\Delta}{2}$. Ergo $3a \infty \frac{1}{2}\Delta$. En $a \infty \frac{1}{6}\Delta$. Even als in d'andere folutie.

§ 6 [1]).



1. Om den triangel van een gegeven getal te vinden foo addeert men het getal tot fijn quadraet, en de helft der fomme is den gefochten triangel twelck uijt defe figuur blijckt, want als men tot het getal ACBD, fijnde het quadraet des getals AB, noch eens bij doet het getal der rije AB, foo heeft men 2 mael het getal des triangels ACB, daerom de helft der voorzegde fomme moet wefen gelijck den triangel ACB, welck is den triangel des getals AB. Sijnde dan x de fijde foo is den triangel $\frac{xx+x}{2}$.

Traduction:

Donc $-b \infty -\frac{1}{2}\Delta$. Par fuite $-a \infty < \begin{matrix} 1 \text{ à } a \\ 1 \text{ à } -\frac{1}{2}\Delta \end{matrix}$. Donc $-a \infty \frac{a - \frac{1}{2}\Delta}{2}$. Donc $3a \infty \frac{1}{2}\Delta$.

Et $a \infty \frac{1}{6}\Delta$. Comme dans l'autre folution.

§ 6 [1]).

1. Pour trouver le triangle d'un nombre donné on ajoute ce nombre à fon carré; la moitié de cette fomme eft le triangle cherché ainfi qu'il réfulte de la figure à côté, car fi l'on ajoute au nombre ACBD, c'eft-à-dire au carré du nombre AB, encore une fois le nombre de la ligne AB, on a deux fois le nombre du triangle ACB. Par fuite, la moitié de la fomme prémentionnée doit être égale au triangle ACB qui eft le triangle du nombre AB. Soit donc x le côté, alors le triangle eft $\frac{xx+x}{2}$.

---

[1]) Ce paragraphe apprend à sommer la suite des valeurs réciproques des nombres triangulaires. Nous n'avons par voulu le supprimer puisqu'il fait connaître la manière dont cette somme a été obtenue par Huygens; mais on sait qu'on l'obtient bien plus facilement en remarquant que $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ et que, par conséquent, la suite se réduit à $1 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5}$ etc.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} & \frac{1}{45} & \frac{1}{55} & \frac{1}{66} & \frac{1}{78} & \frac{1}{91} & \frac{1}{105} & \frac{1}{120} \end{array}$$

2. dese rije van gebroocken getallen sijnde soo danigh dat al de tellers sijn 1, en de noemers de achtereenvolgende triangulen van de getallen daer boven geschreven beginnende van 1 en met 1 opgaende: indien men eenighe 2 achtereenvolgende deser gebroockens te samen addeert, nemende tot voorste soo een wiens noemer is den triangel van een even getal; soo sal de somme gelijck sijn aen de helft van het gebroocken deser rije wiens noemer den triangel is van de helft der sijde welckers triangel was den noemer van het voorste der 2 geaddeerde gebroockens. bij exempel adderende de gebroockens deser rije $\frac{1}{55}$ en $\frac{1}{66}$, soo sal haer somme sijn $\frac{1}{30}$, dat is de helft des gebroockens $\frac{1}{15}$, wiens noemer 15 den triangel is van 5, sijnde de helft van 10, wiens triangel 55 is den noemer des eersten der 2 gebroockens. want laet de sijde des noemers van 't eerste gebroken sijn ∞x, soo is sijn triangel, dat is, den noemer des eersten gebroockens,

Traduction:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} & \frac{1}{45} & \frac{1}{55} & \frac{1}{66} & \frac{1}{78} & \frac{1}{91} & \frac{1}{105} & \frac{1}{120} \end{array}$$

2. Cette suite de nombres fractionnaires est telle que tous les numérateurs sont égaux à l'unité, et que les dénominateurs sont les nombres trangulaires successifs des nombres qu'on a écrit au-dessus, en commençant par 1 et augmentant chaque fois de 1 : si de ces fractions on en additionne deux successives, dont la première est telle que le dénominateur est le triangle d'un nombre pair, alors la somme sera égale à la moitié d'une fraction de la même suite, dont le dénominateur est le triangle de la moitié du nombre duquel le triangle constitue le dénominateur de la première des deux fractions qu'on a additionnées. Par exemple, en additionnant les fractions $\frac{1}{55}$ et $\frac{1}{66}$, appartenant à cette suite, leur somme sera $\frac{1}{30}$, c'est-à-dire la moitié de la fraction $\frac{1}{15}$, dont le dénominateur est le triangle de 5, c'est-à-dire de la moitié de 10 dont le triangle 55 est le dénominateur de la première des 2 fractions; car: soit le côté du triangle qui constitue le dénominateur de la première fraction ∞x, alors son triangle, c'est-à-dire le

$\infty \frac{xx + x}{2}$ en het eerfte gebroken dan $\frac{2}{xx + x}$. Voorts fal de fijde des noemers van 't volgende gebroken fijn $x + 1$, en daerom fijn triangel, dat is den noemer des 2den gebrokens $\infty \frac{xx + 3x + 2}{2}$. En dienvolgens het volgende gebroken $\infty \frac{2}{xx + 3x + 2}$. om tot het welck te adderen het eerfte gebroken $\frac{2}{xx + x}$, foo is den gemeenen noemer $x^3 + 3xx + 2x$ ende haer fomme $\infty \frac{4x + 4}{x^3 + 3xx + 2x}$, dat is $\frac{1}{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}x}$. Nemende nu $\frac{1}{2}x$ voor fijde, welck een heel getal fal fijn, dewijl x een even getal geftelt werdt, foo is fijn triangel $\infty \frac{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}x}{2}$ ofte $\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x$. Ende diensvolgens $\frac{1}{\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x}$ fal fijn het gebroken, wiens noemer den triangel is

---

Traduction

dénominateur de la première fraction, eft égal à $\frac{xx + x}{2}$ et la première fraction à $\frac{2}{xx + x}$. Puis le côté du dénominateur de la fraction qui fuit fera $x + 1$. Donc fon triangle, qui eft le dénominateur de la feconde fraction, fera $\frac{xx + 3x + 2}{2}$. Par conféquent la fraction qui fuit fera $\frac{2}{xx + 3x + 2}$. Afin de faire l'addition de cette fraction à la première $\frac{2}{xx + x}$, on remarquera que leur dénominateur commun eft $x^3 + 3xx + 2x$ et leur fomme $\frac{4x + 4}{x^3 + 3xx + 2x}$, c'eft-à-dire $\frac{1}{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}}$. Or, en prenant le côté égal à $\frac{1}{2}x$, ce qui repréfentera un nombre entier puifque x a été fuppofé pair, fon triangle eft $\frac{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}x}{2}$ ou $\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x$. Par fuite $\frac{1}{\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x}$ conftituera la fraction dont le dénominateur eft le

van de helft der ſijde x, welckers triangel was den noemer des eerſte gebrokens $\frac{2}{xx+x}$. nu is oock $\frac{1}{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}$, de gevonden ſomme der 2 gebrokens gelijck de helft van $\frac{1}{\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x}$, quod erat demonſt.

3. Indien men nu oock een rije van gebroockens ſtelt die proportionael ſijn tot die van de voorgaende triangulare rije, het is ſeecker, dat gelijck de ſomme van 2 aan een volgende der triangulare rije gelijck is aan de helft van het gebroken in 't voorgaende voorſtel geſeght, alſoo oock de ſomme der 2 proportionale der ſelve 2 gebrokens, gelijck ſal ſijn aan de helft van het proportionale des geſeijden gebrokens.

1	2	3	4	5
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{60}$

Bij exempel dewijl $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ ſijn ∞ de helft van $\frac{1}{3}$, dat is gelijck $\frac{1}{6}$, ſo ſal oock in de onderſte proportionale rije weſen $\frac{1}{40}+\frac{1}{60}$ ∞ de helft van $\frac{1}{12}$ dat is gelijck $\frac{1}{24}$.

Traduction:

triangle de la moitié du côté x dont le triangle était le dénominateur de la première fraction $\frac{2}{xx+x}$. Or, en effet, $\frac{1}{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}$, c'eſt-à-dire la ſomme des deux fractions, eſt égale à la moitié de $\frac{1}{\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Si maintenant on forme de même une ſuite de fractions qui ſont proportionnelles à celles de la ſuite triangulaire précédente, il eſt certain que, puiſque la ſomme de deux fractions ſucceſſives de la suite triangulaire eſt égale à la moitié de la fraction indiquée plus haut, la ſomme des 2 fractions proportionnelles aux 2 dites fractions ſera égale à la moitié de la fraction proportionnelle à la fraction ſuſdite.

1	2	3	4	5
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{60}$

Par exemple, puiſque $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ ∞ la moitié de $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, égal à $\frac{1}{6}$, on aura auſſi dans la ſuite proportionnelle inférieure $\frac{1}{40}+\frac{1}{60}$ ∞ la moitié de $\frac{1}{12}$, c'eſt-à-dire égal à $\frac{1}{24}$.

4. In de rije der gebroockens welckers noemers ſijn de achter een volgende triangulare getallen en de tellers alle 1, is de ſomme der ganſche rije in infinitum gelijck 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Eerſte rije	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$
tweede rije		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
derde rije					$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{12}$				$\frac{1}{24}$		
4de rije											$\frac{1}{8}$				

Zij genomen de eerſte deſer rijen in infinitum te gaen. En laet de 2e rije beſtaen uijt de ſommen der gebrookens der eerſte rije, genomen 2 aan 2, van welcke twee ieder minſte ſijn noemer ſij den triangel van een even getal. Soo ſijn dan de getalen der 2e rije, door het 2e voorſtel [1]), ieder de helft der getalen van de eerſte

Traduction:

4. Dans la ſuite des fractions dont les dénominateurs ſont les nombres triangulaires ſucceſſifs et les numérateurs tous 1, la ſomme de la ſuite totale prolongée jusqu'à l'infini eſt égale à 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
première ſuite	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$
deuxième ſuite		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
troiſième ſuite					$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{12}$				$\frac{1}{24}$		
4e ſuite											$\frac{1}{8}$				

Suppoſons que la première ſuite continue jusqu'à l'infini et que la deuxième ſuite ſe compoſe des ſommes des fractions de la première ſuite, priſes 2 à 2, de manière que le plus petit dénominateur de chaque couple ſoit le triangle d'un nombre pair. Alors les nombres de la deuxième ſuite ſont, d'après la ſeconde propoſition [1]), les moitiés

[1]) Voir, à la p. 145, l'alinéa numéroté 2.

rije, als men de evenveelſte in de order neemt. laet men wederom de 3de rije beſtaen uijt de ſommen der getallen van de 2de rije, genomen 2 aen 2, en weder het eerſte overſlaende, ſoo ſijn dan, door het derde voorſtel [2]), de getallen der 3e rije ieder de helft van de getallen der 2de rije.

En van gelijcken ſoo de 4de rije beſtaet uijt de ſommen van ieder 2 getallen der 3de rije, overſlaende het eerſte. ſoo ſullen de getallen deſer 4de rije ieder de helft ſijn van die van de 3e rije.

En ſoo voorts met al de andere leegher rijen in infinitum te bedencken.

Nu ſoo blijckt dat het eerſte getal der tweede rije, te weten $\frac{1}{2}$, is de ſomme van de 2 getallen der eerſte rije die nae het eerſte getal volgen.

En dat het eerſte getal der 3de rije is de ſomme van de 4 volgende getallen der eerſte rije.

En dat het eerſte getal der 4de rije is de ſomme van de 8 volgende getallen der eerſte rije.

En van gelijcken dat het eerſte getal der 5e rije ſoude ſijn de ſomme van de 16 volgende getallen der eerſte rije en ſoo voort.

Traduction:

des nombres de la première ſuite, pris dans le même ordre. Si maintenant la 3me ſuite ſe compoſe de nouveau des ſommes des nombres de la 2me ſuite, pris 2 à 2, en laiſſant derechef de côté le premier de ces nombres, les nombres de la 3me ſuite ſeront, d'après la troiſième propoſition [2]), chacun la moitié des nombres de la 2me ſuite.

Et de même, ſi la 4me ſuite ſe compoſe des ſommes de chaque couple de 2 nombres de la 3me ſuite, laiſſant de côté le premier, les nombres de cette 4me ſuite ſeront chacun la moitié de ceux de la 3me ſuite. Et de la même manière on traitera toutes les ſuites inférieures jusqu'à l'infini.

Or, il s'enſuit que le premier nombre de la deuxième ſuite, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}$, eſt la ſomme des 2 nombres de la première ſuite qui ſuivent après le premier nombre.

Et que le premier nombre de la 3me ſuite eſt la ſomme des 4 nombres ſuivants de la première ſuite.

Et que le premier nombre de la 4me ſuite eſt la ſomme des 8 nombres ſuivants de la première ſuite.

Et de même que le premier nombre de la 5me ſuite ſerait la ſomme des 16 nombres ſuivants de la première ſuite, etc.

---

[2]) Voir, p. 146, l'alinéa numéroté 3.

Dewijl dan aldus de eerste getallen der rijen maecken de somme van al de getallen der eerste rije; en dat de selve eerste getallen der rijen ieder de helft bewesen sijn te sijn van het voorgaende, en dienvolgens al te samen in infinitum gelijck aen 2 mael het eerste $\frac{1}{1}$; soo sijn dan oock al de getallen der eerste rije te samen ∞ 2 mael $\frac{1}{1}$ dat is ∞ 2 quod erat dem.

Traduction

Puisque donc les premiers nombres des suites constituent la somme de tous les nombres de la première suite, et qu'on a démontré que ces premiers nombres des suites sont chacun la moitié de celui qui précède, et que, par conséquent, tous ensemble jusqu'à l'infini sont égaux à 2 fois le premier nombre $\frac{1}{1}$, il en résulte que tous les nombres de la première suite ensemble sont aussi ∞ 2 fois $\frac{1}{1}$, c'est-à-dire ∞ 2. Ce qu'il fallait démontrer.

APPENDICE VI [1]

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK."

1676.

Aug. 1676.

Quæſtio ultima mearum in iis quæ de Ratiociniis in ludo aleæ edidi; propoſita olim a Paſcalio [2]).

Luſores A et B accepto numero calculorum æquali ludunt tribus teſſeris hac conditione ut quoties eveniunt puncta 14, accipiat A calculum unum à B. Quoties vero 11 puncta eveniunt, contra accipiat B unum calculum ab A. Vincat autem qui prior omnes calculos collegerit. Quæritur quantum valeat ſpes utriuſque inter ſe comparatæ; ſeu quæ pars debeatur utrique ex eo quod depoſitum eſt. Hoc autem idem eſt ac ſi, evenientibus 14 punctis, A ſcribat punctum unum, et, evenientibus 11, B ſignet itidem punctum unum, et victoria cedat ei qui primus certo punctorum numero alterum ſuperaverit [3]).

---

[1]) Dans cette Pièce, qui fut écrite sur une feuille détachée, Huygens essaie de justifier et de généraliser la solution qu'il avait donnée (sans y ajouter l'analyse) du dernier des Exercices qu'on rencontre vers la fin de son Traité (voir la p. 91). Ajoutons qu'il ne réussit pas à démontrer à son entière satisfaction la solution généralisée qu'il trouve par induction.

[2]) Voir la note 1 de la p. 90.

[3]) En effet, si n représente le nombre des jetons que chaque joueur possède au commencement du jeu, il est évident que dans les deux suppositions mentionnées le jeu finira aussitôt que le nombre des coups favorables à l'un des joueurs surpasse de n unités celui des coups favorables à l'autre. Cependant on peut faire encore une troisième supposition, équivalente aux deux autres, d'après laquelle à chaque coup favorable le joueur efface un des points obtenus par son adversaire si celui-ci en possède, sauf à marquer un point pour lui-même si l'adversaire n'en possède plus ou pas encore. C'est la supposition choisie par Huygens dans les cas $n = 4$ et $n = 3$ qui suivent (voir encore la note 1 de la p. 152) et ce fut à l'aide de cette même supposition que Pascal formula primitivement le problème que Huygens lui emprunta (voir la p. 493 du T. I).

Puncta 14 eveniunt modis 15, cum tribus tesseris luditur. Puncta 11 vero modis 27. suntque 15 ad 27 ut 5 ad 9.

Si vincere ponatur qui primus punctum unum signaverit, apparet spem lusoris A ad spem B esse ut 5 ad 9.

Si vincat qui primus duobus punctis alterum præcesserit calculus ita se habebit. sit x portio debita lusori B ex eo quod depositum est, quod vocetur n.

o ad o (x) <
- 9(d) ad habendum 1 ad o (y) <
  - 9(d) [ad] 2 ad o (n)
  - 5(c) [ad] x
- 5(c) ad hab. —— o ad 1 (z) <
  - 9(d) [ad] x
  - 5(c) [ad] o

$$z \infty \frac{dx}{d+c}; \; y \infty \frac{dn+cx}{d+c}$$

o ad o (x) <
- d [ad] $\frac{dn+cx}{d+c}$
- c [ad] $\frac{dx}{d+c}$

$$\text{Ergo } x \infty \frac{ddn+2dcx}{cc+2dc+dd}$$

$$ccx+2dcx+ddx \infty ddn+2dcx$$

$$x \infty \frac{ddn}{cc+dd} \text{ portio lusoris B.}$$

Cum B habeat $\frac{ddn}{cc+dd}$, habebit A $\frac{ccn}{cc+dd}$ quia simul additæ partes debent facere n. Ergo spes B ad spem A ut dd ad cc.

Si vincat qui 4 punctis præcesserit facilè ex præcedenti calculo colligetur esse $x \infty \frac{d^4n}{c^4+d^4}$. Calculus enim sic se habebit [1]).

---

[1]) Le calcul qui suit s'explique le plus aisément lorsqu'on choisit la dernière des trois suppositions équivalentes mentionnées dans la note 3 de la p. 151. D'ailleurs Huygens lui-même a employé ici cette supposition, comme les notations „2 ad o, 4 ad o, o ad o, etc." le prouvent.

Remarquons donc d'abord qu'avant d'arriver à une décision (représentée par (4,0) ou par (0,4)) le jeu doit nécessairement passer par l'une ou l'autre des phases (2,0) ou (0,2). Or, les probabilités que l'une de ces phases, (2,0) ou (0,2), se réalise pour la première fois avant que l'autre se soit présentée sont dans le rapport de dd à cc. Cela résulte du cas déjà traité, où

$$\text{o ad o } (x) \propto \begin{cases} dd \text{ [ad habendum] 2 ad o } (y) < \begin{matrix} dd \text{ [ad] 4 ad o } (n) \\ cc \text{ [ad] o ad o } (x) \end{matrix} \\ cc \text{ [ad habendum] o ad 2 } (z) < \begin{matrix} dd \text{ [ad] o ad o } (x) \\ cc \text{ [ad] o ad 4 (o).} \end{matrix} \end{cases}$$

Eſt autem hic dd et cc ubi prius d et c, ac de cætero operatio eadem quæ prius. ergo neceſſario fiet $x \propto \frac{d^4 n}{c^4 + d^4}$. Et ſpes B ad ſpem A ut d^4 ad c^4.

Hinc rurſus ſi vincat qui 8 punctis præverterit, concludetur $x \propto \frac{d^8 n}{d^8 + c^8}$. Atque ita porro ſi continuo dupletur punctorum numerus.

Verum ſi vincat qui 3 punctis præceſſerit calculus inſtituendus eſt hoc modo [2])

$$x \propto \begin{cases} d \text{ [ad] 1 ad o } (l) < \begin{matrix} dd \text{ [ad] 3 ad o } (n) \\ cc \text{ [ad] o ad 1 } (k) \end{matrix} \\ c \text{ [ad] o ad 1 } (k) < \begin{matrix} dd \text{ [ad] 1 ad o } (l) \\ cc \text{ [ad] o ad 3 (o)} \end{matrix} \end{cases} \qquad k \propto \frac{ddl}{dd + cc}$$

$$l \propto \frac{ddn + \frac{ccddl}{dd + cc}}{dd + cc}; \; ddl + ccl \propto ddn + \frac{ccddl}{dd + cc}$$

$$d^4 l + 2ddccl + c^4 l \propto d^4 n + ccddn + ccddl$$

$$l \propto \frac{d^4 n + ccddn}{d^4 + ddcc + c^4}. \text{ Ergo } k \propto \frac{d^4 n}{d^4 + ddcc + c^4}$$

---

2 points suffisent pour gagner. Si nous partons maintenant de la phase (2,0), il est clair que B, pour gagner, doit pouvoir compter encore une fois deux coups favorables de plus que A. Si ce sera au contraire A qui gagne, le jeu doit passer premièrement par la phase (0,0). Or, les probabilités que l'un de ces évènements se réalise avant l'autre sont évidemment dans le même rapport que les probabilités correspondantes au commencement du jeu concernant l'arrivée des phases (2,0) et (0,2); c'est-à-dire elles sont dans le rapport de dd à cc, comme Huygens l'indique dans le calcul en question.

[2]) On peut comparer au calcul qui suit celui de Hudde (p. 470 du T. V.), qui se rapporte au même cas particulier, où $n = 3$. Remarquons que la méthode de Huygens s'applique à tous les cas où n est divisible par 3, c'est-à-dire en supposant connues les solutions des cas où le nombre des points à obtenir est $\frac{1}{3}n$ ou $\frac{2}{3}n$. Les cas intermédiaires qu'on doit choisir sont alors $(\frac{1}{3}n, 0)$ et $(0, \frac{1}{3}n)$.

$$x \left\langle \begin{array}{l} d\,[\text{ad}]\; l\,[\infty]\, \dfrac{d^4n + ccddn}{d^4 + ddcc + c^4} \\ c\,[\text{ad}]\, \dfrac{d^4n}{d^4 + ddcc + c^4} \end{array} \right. \qquad x \infty \frac{d^5n + ccd^3n + cd^4n}{(d+c)\text{in}(d^4 + ddcc + c^4)} \text{div. per } dd + dc + cc$$

$$x \infty \frac{d^3n}{(d+c)\text{ in }(dd - dc + cc)\text{ sed hoc } \infty\, d^3 + c^3} \qquad x \infty \frac{d^3n}{d^3 + c^3}$$

Ergo spes lusoris B ad spem A ut d^3 ad c^3.

Hinc autem rursus concluditur, si vincat qui 6 punctis præcesserit spem lusoris B ad A fore ut d^6 ad c^6 [1]).

---

[1]) De cette manière on peut donc aussi prouver rigoureusement l'exactitude de la solution (244140625 : 282429536481, c'est-à-dire $5^{12} : 9^{12}$) ajoutée à l'Exercice V (p. 91 du présent Tome), où $n = 12$.

[2]) En effet, avec les ressources mathématiques dont on disposait à l'époque de Huygens, il paraît avoir été difficile d'obtenir une démonstration rigoureuse valable pour le cas où n est un nombre quelconque. Bernoulli n'y réussit pas, car on ne peut pas accepter comme telle le raisonnement vague qu'il présente à ses lecteurs à la p. 70 de son „Ars conjectandi" pour le cas où ceux-ci n'accepteraient pas la conclusion par induction, qu'il fait précéder. De Monmort (voir les p. 222—223 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9 du présent Tome) se contente de traiter le cas $n = 12$, qu'il résoud à l'aide de 22 équations linéaires où entrent comme inconnues les probabilités diverses qui peuvent se présenter durant le jeu. Il est vrai que de Moivre (voir les p. 227—228 de son Mémoire de 1711, ou les p. 44—46 de sa „Doctrine of chances", cités dans la note 12 de la p. 9) arrive à une solution rigoureuse du problème général à l'aide d'une méthode extrêmement ingénieuse, mais bien artificielle. Afin d'exposer cette méthode, prenons le cas où A possède les trois jetons α, β, γ et B les trois autres δ, ϵ, ζ. On assigne alors à ces jetons respectivement les valeurs $v, \frac{c}{d}v, \frac{c^2}{d^2}v, \frac{c^3}{d^3}v, \frac{c^4}{d^4}v, \frac{c^5}{d^5}v$, où nous supposons $d > c$, et l'on convient qu'à chaque partie en particulier A engagera parmi tous les jetons qu'il possède celui dont la valeur est la plus petite et B de tous ses jetons celui qui a la plus grande valeur. Ces valeurs alors seront toujours dans le rapport de d à c, mais comme les chances des joueurs A et B sont dans le rapport réciproque de c à d, chaque partie en particulier sera une partie équitable, c'est-à-dire où les espérances des joueurs sont égales. Il en doit donc être de même pour le jeu entier, qui finit lorsque l'un des joueurs obtient tous les jetons. Or, puisque les sommes que les joueurs peuvent gagner sont dans le rapport de d^3 à c^3, il faut que leurs chances soient dans le rapport réciproque de c^3 à d^3.

Enfin, Struyck (p. 108—110 de l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9) donne une solution plus directe, que voici: Supposons que les $2n$ jetons soient des pièces de monnaie d'une valeur égale à l'unité, et soit e_p l'espérance mathématique du joueur A lorsqu'il possède p jetons. On a alors $e_p = \frac{c}{c+d}e_{p+1} + \frac{d}{c+d}e_{p-1}$; c'est-à-dire $e_{p+1} = e_p + \frac{d}{c}(e_p - e_{p-1})$. On en déduit successivement $e_2 = e_1 + \frac{d}{c}e_1$; $e_3 = e_1 + \frac{d}{c}e_1 + \frac{d^2}{c^2}e_1$; $e_n = \dfrac{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^n}{1 - \frac{d}{c}}e_1$; $e_{2n} = 2n = \dfrac{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^{2n}}{1 - \frac{d}{c}}e_1$. On trouve donc $e_1 = \dfrac{1 - \frac{d}{c}}{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^{2n}}2n$; $e_n =$

Si numerus punctorum præceſſionis ſit 5 erit ſpes B ad A ut d^5 at c^5, ſed hoc rurſus calculo opus habet qui paulo longior quam in punctis 3. nec video adhuc qui concludi poſſit in univerſum, ſpes luſorum B ad A eſſe inter ſe ſemper ut poteſtates d et c numerorum, quæ habeant exponentes æquales numero punctorum quibus alter alterum debet præcedere [2]).

$= \frac{c^n}{c^n + d^n} 2n$ et il reste pour l'espérance de l'autre joueur $\frac{d^n}{c^n + d^n} 2n$, d'où il suit que leurs chances au début du jeu étaient dans le rapport de c^n à d^n.

Inutile de dire qu'à l'aide des méthodes modernes la solution générale du problème s'obtient sans aucune difficulté. En représentant par $\varphi(p)$ la probabilité que A gagne le jeu quand le nombre des coups qui ont été favorables à A, diminué de celui des coups favorables à B, est devenu égal à p, il ne s'agit que de résoudre l'équation fonctionnelle $c\varphi(p+1) - (c+d)\varphi(p) + d\varphi(p-1) = 0$ sous les conditions $\varphi(n) = 1$, $\varphi(-n) = 0$. On trouve pour la solution générale de cette équation $\varphi(p) = C\left(\frac{d}{c}\right)^p + C'$ et, par conséquent, pour celle qui satisfait aux conditions mentionnées: $\varphi(p) = \frac{c^{n-p}(d^{n+p} - c^{n+p})}{d^{2n} - c^{2n}}$. Il en résulte pour la chance de A au début du jeu: $\varphi(0) = \frac{c^n}{c^n + d^n}$.

APPENDICE VII [1]

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1676] [2].

Elck heeft $\frac{1}{2}a$ ingeſet. die ten eerſten een 6 met eene ſteen neemt te werpen

heeft 1 tot a $\quad a$
$b-1$ tot 0 $\quad 0$

$$\frac{a+0}{b} \qquad b \infty 6$$

Traduction:

Chacun a mis $\frac{1}{2}a$. Celui qui accepte de jeter au premier coup un 6 avec un ſeul dé a 1 chance à a, $b-1$ à zéro, ce qui vaut $\frac{a+0}{b}$, $b \infty 6$. Qui accepte de le faire en

[1] Cet Appendice contient des solutions, à l'aide de logarithmes, de „problèmes des dés" identiques ou analogues à ceux dont Huygens s'occupe dans les Prop X et XI de son Traité (voir les p. 79—83 du présent Tome). Il a servi évidemment d'avant-projet à la Pièce, destinée à Dierkens, qu'on trouve aux p. 16—18 du T. VIII. Il nous montre que Huygens n'a pas réussi au premier coup à donner à ses solutions la forme simple qu'elles ont obtenues dans la Pièce mentionnée.

[2] La Pièce n'est pas datée, mais il est très probable qu'elle fut composée en 1676. Les feuilles détachées sur lesquelles elle est écrite ont le même aspect, quant à l'écriture, l'encre et le format, que la feuille dont nous avons emprunté l'Appendice VI, daté d'août 1676. Et ce format diffère de celui dont Huygens se servait ordinairement. Ce n'est que le Livre

die in 2 reijsen het neemt heeft 1 tot a $\quad a$

$$b-1 \text{ tot } \frac{a}{b} \quad a-\frac{a}{b}$$

$$\frac{2a-\frac{a}{b}}{b} \infty \frac{2a}{b}-\frac{a}{bb}$$

van 3^{en} 1 tot a

$$b-1 \text{ tot } \frac{2a}{b}-\frac{a}{bb} \Big\} \infty \frac{3a}{b}-\frac{3a}{bb}+\frac{a}{b^3}$$

[van 4^{en}] 1 [tot] a

$$b-1 \text{ [tot] } \frac{3a}{b}-\frac{3a}{bb}+\frac{a}{b^3} \Big\} \infty \frac{4a}{b}-\frac{6a}{bb}+\frac{4a}{bbb}-\frac{a}{b^4}$$

$b-1 \infty c$ [3]), $a \infty 1$ hebbende elck $\frac{1}{2}$ ingeset

1 tot a $\quad a$
c tot o $\quad$ o
$\frac{a}{b}$

van 2^{en} 1 [tot] a
c [tot] $\frac{a}{b}$ $\Big\} \frac{a}{b}+\frac{ac}{bb}$

van 3^{en} 1 [tot] a
c [tot] $\frac{a}{b}+\frac{ac}{bb}$ $\Big\} \frac{a}{b}+\frac{ca}{bb}+\frac{cca}{bbb}$

Traduction:

deux coups a 1 chance à a, $b-1$ à $\frac{a}{b}$, ce qui vaut $\frac{2a}{b}-\frac{a}{bb}$, etc.....

Soit $b-1 \infty c$ [3]), $a \infty 1$, en supposant que chacun a mis $\frac{1}{2}$. [On trouve au cas d'un seul coup] 1 à a, c à zéro, ce qui vaut $\frac{a}{b}$, au cas de deux coups........., au cas de trois

des Adversaria E qui le présente et ce Livre était employé de 1674 à 1680; plusieurs feuilles en ont été enlevées, parmi lesquelles se trouvaient peut-être celles sur lesquelles cet Appendice VII fut écrite.

[3]) La solution menaçant de devenir inutilement compliquée pour le cas d'un plus grand nombre de coups, Huygens la reprend avec une légère modification. À l'aide de cette modification il réussit en effet à la rendre plus maniable. Ce n'est que vers la fin de la Pièce (voir la note 5 de la p. 161) qu'il s'aperçoit combien la question se simplifie si l'on se met à calculer la chance de celui qui donne à jeter au lieu de celle de celui qui jette. Comparez les solutions des prop. X et XI (p. 79—83) du Traité de Huygens où l'on retrouve la même complication inutile.

$$\left.\begin{array}{r}\text{van } 4^{\text{en}}\ 1\ [\text{tot}]\ a \\ c\ [\text{tot}]\ \frac{a}{b}+\frac{ca}{bb}+\frac{cca}{b^3}\end{array}\right\} \frac{a}{b}+\frac{ca}{bb}+\frac{cca}{bbb}+\frac{c^3a}{b^4}$$

maer a is ∞ 1, ergo $\frac{1}{b}+\frac{c}{bb}+\frac{cc}{b^3}+\frac{c^3}{b^4}$ [... ∞] $\frac{1}{2}$, dat is men moet sien wanneer de somme van de progressie gelijck werdt aen $\frac{1}{2}$, want dan is de kans gelijck van die het in soo veel reijsen genomen heeft.

Om de somme der proportionalen te vinden. $z \infty$ summa proport.

b [ad] c [ut] $z-u$ [ad] $z-\frac{1}{b}$. u ultima et minima proport. $\frac{1}{b}$ prima.

$bz-1 \infty cz-cu$

$z \infty \frac{1-cu}{b-c} \infty \frac{1}{2} \infty \frac{1}{2}a$ nam $a \infty 1$. Volo scire quanta sit ultima prop. u ut summa prop.^{um} sit $\infty \frac{1}{2}$

$1-cu \infty \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$ sed $b-c$ mihi est ∞ 1

$1-cu \infty \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2c} \infty u$ $\qquad z \infty 1-cu$. Ergo contra certandi remanet cu quod hic est $\frac{c^4}{b^4}$ [1]).

Traduction:

coups......, au cas de 4 coups 1 à a, c à $\frac{a}{b}+\frac{ca}{bb}+\frac{cca}{b^3}$, ce qui vaut $\frac{a}{b}+\frac{ca}{bb}+$ $+\frac{cca}{bbb}+\frac{c^3a}{b^4}$, mais a est ∞ 1, par conséquent, $\frac{1}{b}+\frac{c}{bb}+\frac{cc}{b^3}+\frac{c^3}{b^4}\ldots \infty \frac{1}{2}$, c'est-à-dire on doit rechercher quand la somme de la progression devient égale à $\frac{1}{2}$, car alors celui qui a accepté de le faire en ce nombre de coups a une chance égale.

Manière de trouver la somme des quantités proportionnelles. $z \infty$ summa proport., etc...

Quoto jactu duarum tesserarum duos senarios me daturum certare possum cum lucro? Sunt jactus 36. Ergo hic b est 36. et $c \propto 35$. prima proportionalium $\frac{1}{b} \propto \frac{1}{36}$. Quærendum ergo quot proportionales statuendæ sint in ratione 36 ad 35 ut ultima u sit minor quam $\frac{1}{2c}$ hoc est hic quam $\frac{1}{70}$. tunc enim summa proportionalium (quæ significat partem quam ex unitate seu (a) mihi arrogare possum) excedet $\frac{1}{2}$. adeo ut illo jactuum numero potior esse incipiat conditio mea.

Quod si fiat ut 36 ad 35 ita $\frac{1}{36}$ ad aliam ea erit secunda proportionalis et sic deinceps faciendum donec proportionalis inveniatur quæ sit minor quam $\frac{1}{70}$.

Hoc autem per logarithmos facile est [2]), nam si ab log. $\frac{1}{36}$ qui est -1.5563025 auferatur differentia log. 35 et 36, quæ est 0.0122345, habebitur log. dictæ secundæ proportionalis. Invenio autem 24ter dictam differentiam auferendam a logarithmo $\frac{1}{36}$ priusquam habeatur logarithm. minoris fractionis quam $\frac{1}{70}$, quia dividendo differentiam logg. $\frac{1}{70}$ et $\frac{1}{36}$ quæ est -0.2887955 per dictam differ. logg. 36 et 35 quæ est 0.0122345, fiunt plus quam 23, ideoque 24 sumendum ut perveniatur ad fractionem minorem quam $\frac{1}{70}$. Itaque 24 proportionales statuendæ præter primam $\frac{1}{36}$. adeo ut omnino sint 25. ac proinde 25° jactu certare possum eventuros duos senarios, idque conditione potiori quam sit contra certantis.

---

[1]) Cette phrase, écrite avec une encre différente, à commencer par $z \propto 1 - cu$, fut sans doute ajoutée après que ce même résultat avait été obtenu dans le dernier alinéa de la p. 161, où il donna lieu alors à la remarque de la note 5 de cette p. 161.

[2]) De ce qui précède l'on déduit aisément:

$$n > \frac{\log \frac{1}{b} - \log \frac{1}{2c}}{\log b - \log c} + 1$$

où n désigne le nombre des quantités proportionnelles qu'il s'agit de déterminer.

C'est la règle que Huygens va appliquer dans ce qui suit.

Quoto jactu 3um tesserarum tres senarios jacturum me certare possum. Resp. 150.

$216 \infty b$ prima proport.um $\frac{1}{216}$

$215 \infty c$ $\quad u \infty \frac{1}{2c} \infty \frac{1}{430}$ L[og]. − 2.6334685
ex $\frac{1}{216}$ L[og]. − 2.3344537 } s.

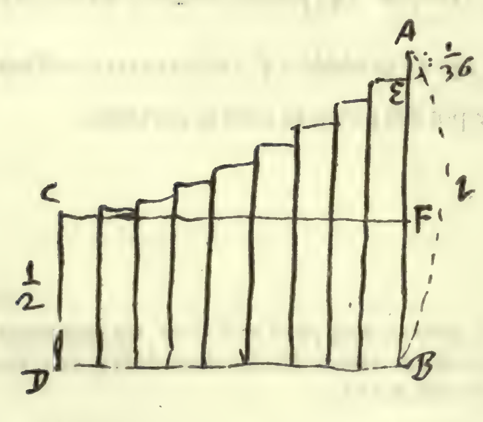
0.2990148

216 L. 2.3344537 $\quad$ 149 [1])
215 L. 2.3324385 $\quad \frac{1}{150}$
0.0020152

Quoto jactu 4or tesserarum quatuor senarios? Resp. 899 [2]).

b 1296 L. 3.1126050 $\quad$ prima prop. $\frac{1}{1296}$ L. − 3.1126050

c 1295 L. 3.1122698 $\quad u \infty \frac{1}{2}c \infty \frac{1}{2590}$ $\quad$ − 3.4132998 $\quad$ 898 [2])
3352 $\quad$ 0.3006948 $\quad \frac{1}{899}$ [2])



Brevius hæc omnia peragi possunt [3]). Exempli gratia cum queritur quoto jactu duarum tesserarum possint duo senarij haberi, ita ut certetur cum lucro. Tantummodo quærendum quoties ratio 36 ad 35 continentur in ratione 2 ad 1 [4]). dividendo nempe logarithmum binarij 0,30103 per differ. logarithmorum 36 et 35, qui est 0,01223. fit 24 et aliquid superest. Tum addenda 1. et fit 25 numerus proportionalium quarum summa superabit $\frac{1}{2}$. Ideoque 25 jactibus cum lucro certatur obventuros duos senarios.

---

[1]) C'est le premier nombre entier qui excède le quotient de 0,2990148 par 0,0020152. Ajoutons que la division, que nous n'avons pas reproduite, fut faite à l'aide de l'algorithme expliqué dans la note 3 de la p. 152 du T. XIII.

Simili ratione si quæratur quot jactibus quatuor senarij quatuor tesseris possint obtineri ut certetur cum lucro: quia sunt jactus diversi quatuor tesserarum 1296; oportet dividere logarithmum binarij, (qui est logar. rationis 2 ad 1) per differentiam logarithmorum 1296 et 1295, quæ differentia est 3352. Quotienti addenda unitas. 898 + 1 ∞ 899 vicibus cum lucro certatur.

Ut sciatur quantum valeat spes utriusque, sive quæ pars ejus quod depositum est utrique debeatur, cum certo numero jactuum omnibus tesseris senarius eventurus certatur. tantummodo fractio constituenda est cujus denominator sit numerus diversorum jactuum qui dato tesserarum numero conveniunt, nominator vero numerus unitate minor illo jam dicto. Hujus fractionis potestas ea quæ convenit numero jactuum, (veluti quadratoquadratum si quatuor jactibus senarij eventuri certantur) designabit partem quæ contra certanti debetur ex eo quod depositum est.

Ex. gr. si duabus tesseris quarto jactu duos senarios mihi venturos certem, quia duarum tesserarum jactus diversi sunt 36 erit fractio constituenda $\frac{35}{36}$. Porro quia numerus jactuum datorum est 4 hinc quarta potestas positæ nempe $\frac{35 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 35}{36 . 36 . 36 . 36}$ sive $\frac{1500625}{1679616} a$ (si a vocetur quod depositum est) est pars debita contra certanti; ut proinde mihi restent $\frac{178991}{1679616} a$. Et valor meæ spei ad illius ut 178991 ad 1500625.

Ratio horum hæc est quod fol. præc. inventa fuit z summa proportionalium, (quæ etiam est fractio designans partem certantis) æqualis $1 - cu$. unde contra certanti relinqui apparet cu, Est autem cu productum ultimæ proportionalium in c, unde si ultima proportionalis sit $\frac{c^3}{b^4}$, ut in hoc exemplo sit productum illud $\frac{c^4}{b^4}$ [5]).

[2]) Il est vrai que, plus tard, Huygens a diminué ce nombre d'une unité. Probablement il avait oublié l'addition d'une unité exigée par la formule de la note 2 de la p. 159.

[3]) De la relation $u < \frac{1}{2c}$ (voir la p. 159), ou bien $\frac{c^{n-1}}{b^n} < \frac{1}{2c}$, on déduit $\left(\frac{b}{c}\right)^n > 2$; c'est la relation dont Huygens va se servir dans ce qui suit sous la forme $n > \frac{\log 2}{\log b - \log c}$.

[4]) Voir la figure à côté par laquelle Huygens représente géométriquement le procédé qu'il va suivre.

[5]) Ici Huygens annota en marge: „Melius adhuc ratio hic queritur examinando in principio sortem contra certantis". C'est la méthode qu'il va suivre dans la Pièce destinée à Dierkens, dont nous avons parlé dans la note 1 de la p. 156. Voici, en effet, la

Eſt autem logarithmorum etiam hic uſus, cum abſque his longum futurum ſit poteſtates iſtas fractionis formare, cum magnus numerus jactuum certanti conceditur. Sic in exemplo ſuperiori, ſi datis jactibus 899 quatuor teſſerarum, quibus quatuor ſenarios evenire oporteat, ſcire velim quantum valeant ſpes utriusque; fractio hic erit $\frac{1295}{1296}$; cujus ut ſciatur poteſtas 899.ma

Primum logar. 1295 qui eſt	3,1122698	
multipl. in	899	
	28,0104282	
	280,104282	
	2489,81584	
	2797,9305502	l. num.i 8522
Rurſus log. 1296 qui eſt	3,1126050	
	899	
	28,0134450	
	280,134450	
	2490,08400	
	2798,2318950	log. num.i 17060 } ſ.
		8522 }
		8538

Et habetur pars contracertantis $\frac{8522}{17060}a$; unde certanti $\frac{8538}{17060}a$.

Et ſpes certantis ad alterius ſpem ut 8538 ad 8522 proximè.

Qui vicibus continuis, quarum numerus ſit a, eventurum certat ad quod ut eveniat ſunt caſus b, ut autem non eveniat ſunt caſus c; ejus ſors (poſito $d \infty b + c$) ad ſortem contra certantis ut b^a ad $d^a - b^a$. hoc eſt ut b toties in ſe ductum quot ſunt unitates in a, ad ſummam $b + c$ toties in ſe ductam minus b toties in ſe ducto.

Ex. gr. [1]) ſi quis, duabus teſſeris, ſeſe ſupra 5 puncta jacturum certet, idque

traduction du troisième alinéa de cette Pièce: „La meilleure manière de résoudre cette question consiste dans le calcul de la chance de celui qui donne à jeter, ou bien de la part de ce qui lui revient de l'enjeu. Alors on connaît aussi la part de celui qui entreprend de jeter, laquelle est égale à ce qui reste".

[1]) On retrouve cet exemple dans la Pièce destinée à Dierkens; voir la p. 18 du T. VIII.

3 continuis vicibus. Hic 26 casus sunt punctorum supra quinque; 10 vero casus quinorum vel infra. Ergo hic $a \infty 3$; $b \infty 26$; $c \infty 10$. $b + c \infty d \infty 36$. unde sors certantis erit ad sortem contra certantis ut cubus à 26, ad cubum a 36 — cubo a 26: hoc est ut 17576 ad 29180. Hujus facilis est demonstratio. Nam qui semel supra 5 se jacturum certat habet cas. 26 ad n, 10 ad o. Ergo $\frac{26n}{36}$. Qui bis habet cas. 26 ad $\frac{26}{36}n$, 10 ad o. Ergo $\frac{26.26.n}{36.36}$. qui ter habet casus 26 ad $\frac{26.26.n}{36.36}$ et 10 ad o. Ergo $\frac{26.26.26n}{36.36.36}$. atque ita porro.

APPENDICE VIII [1])

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK."

[1679] [2])

Avantages du Banquier au jeu de la Baſſette [3]).

la carte y eſtant 1 fois mais le fermier ne paie rien ſi elle vient toute la derniere.

2 [4]) $$\left\{\begin{array}{l}1 \text{———} N \\ 1 \text{———} 0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} N \\ 0 \\ \hline \frac{N}{2}\end{array}$$

3 [5]) $$\left\{\begin{array}{l}1 \text{———} -N \\ 2 \text{———} \frac{1}{2}N\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} -N \\ +N \\ \hline 0\end{array}$$

$$4\left\{\begin{array}{l}1 \text{———} N \\ 3 \text{———} 0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} N \\ 0 \\ \hline \frac{1}{4}N\end{array}$$

$$5\left\{\begin{array}{l}1 \text{———} -N \\ 4 \text{———} \frac{1}{4}N\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} -N \\ +N \\ \hline 0\end{array}$$

---

1) La Pièce occupe les p. 169—171 du Manuscrit E. Ajoutons qu'à la p. 168 on trouve encore les annotations suivantes qui se rapportent au jeu de la Bassette: „Si les 2 premieres estant semblables à la carte en jeu, le banquier gagne l'entier ou les $\frac{2}{3}$ seulement? R. les 2 tiers. Et la deuxième alors n'est point considerée, si l'on ne reva [ſic!].

Si ce desavantage du Banquier des $\frac{2}{3}$ au lieu du tout, a lieu autrement qu'à la première carte de tout le jeu? R. à toutes."

Il nous semble qu'il résulte de ces annotations que Huygens s'est informé sur les particularités du jeu chez quelque personne compétente. Or, on lit en effet à la p. 169 du Manuscrit l'annotation suivante: „demand. à m.e le Cocq. de la Baſſette". Voir encore les deux derniers alinéas de la note 1 de la p. 168.

$$6\begin{cases}1 \text{———} N & N\\ 5 \text{———} o & o\end{cases}$$

$$\frac{1}{6}N$$

avantage du Banquier quand la carte eſt une fois dans les reſtantes

$$\frac{1}{r}N$$

la carte 2 fois

$$3\begin{cases}2 \text{———} -N & -2N\\ 1 \text{———} +N & N\end{cases}$$

$$-\frac{1}{3}N$$

$$4\begin{cases}2 \text{———} +N & 2N\\ 2 \text{———} -\frac{1}{3}N & -\frac{2}{3}N\end{cases}$$

$$+\frac{1}{3}N$$

---

[2]) D'après le lieu d'où nous avons emprunté la Pièce.

[3]) Les règles de ce jeu, telles qu'on les trouve exposées par M. Sauveur dans le „Journal des Sçavans" du lundi 13 février 1679 aux p. 45—46 de l'édition d'Amsterdam, sont assez compliquées; mais puisque Huygens ne les applique pas toutes dans les calculs qui suivent, nous nous bornerons ici à celles qu'on doit connaître pour comprendre ces calculs. À cet effet nous citons de l'article de Sauveur les passages suivants: „Celuy qui taille qu'on nomme *Banquier* ou *Tailleur* a un Jeu entier de cinquante deux cartes & ceux qui joüent contre luy ont chacun en main treize Cartes d'une couleur, *qu'on appelle le livre.* Apres que le Tailleur a battu ses Cartes, les Joüeurs découvrent devant eux telles cartes de leur livre qu'ils veulent, sur lesquelles ils couchent de l'argent à discretion; ensuite le Tailleur tourne son jeu de Cartes, ensorte qu'il voit la premiere qui estoit dessous. Apres cela il tire ses cartes deux à deux jusqu'à la fin du Jeu en commençant par celle qu'il voit; & par la nature de ce jeu, la premiere de chaque couple ou main, est toûjours pour luy, & la seconde *ordinairement* pour le Joüeur, de sorte que si la premiere est par exemple un Roy, le banquier gaigne tout ce qui a esté coûché sur les Rois, mais si la seconde est un Roy, le Banquier donne aux joüeurs autant qu'ils ont couché sur les Rois, *& en cela precisement l'avantage du Banquier n'est pas plus grand que celuy du joüeur. Mais il faut remarquer.*

1. *Que si* la premiere & la seconde carte sont, par exemple des Rois (ce qu'on appelle *doublets*) *le coup devroit estre nul*, *cependant* le Banquier gaigne ce qui a esté couché sur les Rois.

2. Chaque joüeur a la liberté de coucher de l'argent sur telle carte qu'il veut lors que le jeu est commencé, *de sorte que s'il couchoit de l'argent*, *par exemple sur une Dame lorsque le jeu est commencé*, *il pourroit arriver que dans le reste des cartes*, *il y auroit* 4, *ou* 3, *ou* 2, *ou enfin* 1 *Dame*: *ce qui diversifie les avantages du Banquier* . . . . .

3. . . . . la derniere carte est nulle, *laquelle devroit estre pour le Joüeur* . . . . ."

[4]) Ce chiffre représente le nombre des cartes qui sont encore dans le jeu tenu par le banquier. Il va les tirer deux à deux, les mises N étant faites auparavant par les joueurs. Or, il est évident que dans le cas présent de deux cartes qui restent le banquier a *une* chance à gagner, c'est-à-dire si la première carte est la carte en question, et *une* à être quitte, quand cette carte vient comme deuxième, c'est-à-dire comme la dernière du jeu.

[5]) À propos des calculs qui se rapportent aux cas où le nombre des cartes restantes est impair on doit remarquer que le compte entre le banquier et le joueur n'est réglé qu'après que les *deux* cartes ont été tirées. Par suite les désavantages du banquier, qui se présentent à commencer par la deuxième colonne de la p. 165 toutes les fois que le nombre des cartes est

$$5\left\{\begin{array}{lll} 2 \text{———} & -N & -2N \\ 3 \text{———} & \frac{1}{3}N & N \\ \hline & & -\frac{1}{5}N \end{array}\right.$$

$$6\left\{\begin{array}{lll} 2 \text{———} & N & 2N \\ 4 \text{———} & -\frac{1}{5}N & -\frac{4}{5}N \\ \hline & & +\frac{1}{5}N \end{array}\right.$$

$$7\left\{\begin{array}{lll} 2 \text{———} & -N & -2N \\ 5 \text{———} & \frac{1}{5}N & N \\ \hline & & -\frac{1}{7}N \end{array}\right.$$

$$8\left\{\begin{array}{lll} 2 \text{———} & N & 2N \\ 6 \text{———} & -\frac{1}{7}N & -\frac{6}{7}N \\ \hline & & +\frac{1}{7}N \end{array}\right.$$

avantage du Banquier quand la carte eſt 2 fois dans les reſtantes

$$\frac{1}{r-1}N$$

quand la carte en jeu y est 3 fois

3 { — N pour le banquier quand il ne reſte que 3 cartes car il a perdu

4 { 3 —— N quand vient un des 3 rois
1 —— — N quand vient l'àutre carte
$\frac{1}{2}$ N quand il reſte 4 cartes

$$5\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{———} & -N & -3N \\ 2 \text{———} & \frac{1}{2}N & N \\ \hline & & -\frac{2}{5}N \text{ a 5 cartes} \end{array}\right.$$

$$6\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{———} & N & 3N \\ 3 \text{———} & -\frac{2}{5}N & -\frac{6}{5}N \\ \hline & & \frac{3}{10}N \text{ a 6 cartes} \end{array}\right.$$

$$7\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{———} & -N & -3N \\ 4 \text{———} & \frac{3}{10}N & \frac{6}{5} \\ \hline & & -\frac{9}{35} \end{array}\right.$$

---

impair, n'existent pas en réalité; ce qui n'empêche pas que Huygens ne puisse se servir dans ses calculs de ces cas. Considérons, pour le montrer, le deuxième cas de la deuxième colonne de la p. 165, où il y a 4 cartes restantes, a_1, a_2, b, c, dont deux, a_1 et a_2, soient conformes à celle sur laquelle la mise est faite. Il y a alors deux chances que la première carte est a_1 ou a_2, auquel cas le banquier gagne la mise, et deux autres où elle est b ou c. Dans ces derniers cas le jeu continue avec trois cartes restantes et il s'agit de calculer les avantages et désavantages qui peuvent se présenter encore. C'est ce que Huygens a fait par le premier calcul de cette deuxième colonne et il est évident qu'il doit supposer dans ce calcul, et dans tous ceux qui se rapportent aux cas d'un nombre impair de cartes, que *la carte qui a précédé n'était pas conforme à celle sur laquelle la mise a été faite*, de sorte que si la première du nombre impair des cartes restantes est conforme à cette carte il n'y a jamais de „doublet", mais c'est le joueur qui gagne.

$$8\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & \text{N} & 3\,\text{N} \\ 5 \text{ ——— } & -\frac{9}{35}\,\text{N} & -\frac{9}{7}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad \frac{12}{56} \Big| \frac{3}{14} \Big| \frac{6}{28}$$

$$9\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & -\text{N} & -3\,\text{N} \\ 6 \text{ ——— } & \frac{3}{14}\,\text{N} & \frac{9}{7}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad -\frac{12}{63} \Big| -\frac{4}{21}$$

$$10\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & \text{N} & 3\,\text{N} \\ 7 \text{ ——— } & -\frac{4}{21}\,\text{N} & -\frac{4}{3}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad \frac{1}{6} \Big| \frac{9}{54}$$

$$11\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & -\text{N} & -3\,\text{N} \\ 8 \text{ ——— } & \frac{1}{6}\,\text{N} & \frac{8}{6}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad -\frac{5}{33} \Big| -\frac{15}{99}$$

$$12\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & \text{N} & 3\,\text{N} \\ 9 \text{ ——— } & -\frac{5}{33}\,\text{N} & -\frac{15}{11}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad \frac{18}{11.12} \Big| \frac{3}{22} \Big| \frac{12}{88}$$

$$13\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & -\text{N} & -3\,\text{N} \\ 10 \text{ ——— } & \frac{3}{22}\,\text{N} & \frac{15}{11}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad -\frac{18}{143}$$

$$14\left\{\begin{array}{lll} 3 \text{ ——— } & \text{N} & 3\,\text{N} \\ 11 \text{ ——— } & -\frac{18}{143}\,\text{N} & -\frac{18}{13}\,\text{N} \end{array}\right. \qquad \frac{21}{182}\,\text{N}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{6}{28} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{12}{88} \quad \frac{15}{130}$$

avantage du Banquier quand la carte y eſt 3 fois

r nombre pair des cartes reſtantes

$$\frac{\frac{3}{2}r - 6}{\text{qu. } r - 2 - r}$$

quand il ne reſte que 4 cartes l'avantage eſt $\frac{1}{2}$ N.

quand la carte y eſt 3 fois. *r* nombre impair

$\frac{3r - 3}{2rr - 4r}$ deſavantage du Banq.

[la carte 4 fois]

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } -\text{N} & \\ 1 \quad +\text{N} & \\ \hline -\frac{3}{5}\,\text{N} & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } & \text{N} \\ 2 \text{ ——— } & -\frac{3}{5}\,\text{N} \\ \hline & \frac{14}{30}\,\text{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } & -\text{N} \\ 3 \text{ ——— } & \frac{14}{30}\,\text{N} \\ \hline & -\frac{78}{210}\,\text{N} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } & \text{N} \\ 4 \text{ ——— } & -\frac{13}{35}\,\text{N} \\ \hline & \frac{88}{280} \Big| \frac{11}{35} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } & -\text{N} \\ 5 \text{ ——— } & +\frac{11}{35}\,\text{N} \\ \hline & -\frac{17}{63}\,\text{N} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 4 \text{ ——— } & \text{N} \\ 6 \text{ ——— } & -\frac{17}{63}\,\text{N} \\ \hline & \frac{150}{630} \Big| \frac{15}{63} \Big| \frac{5}{21} \end{array}$$

$-\frac{49}{231}$; $\frac{19}{99}$; $-\frac{25}{143}$; $\frac{23}{143}$; $[-]\frac{29}{195}$; $\frac{9}{65}$; $[-]\frac{11}{85}$; $\frac{31}{255}$; $[-]\frac{37}{323}$; $\frac{35}{323}$; $[-]\frac{41}{399}$; $\frac{39}{399}$; $[-]\frac{45}{483}$; $\frac{43}{483}$; $[-]\frac{49}{575}$; $\frac{47}{575}$; $[-]\frac{53}{675}$; $\frac{51}{675}$

$$\frac{2r-5}{\text{qu.}\,\overline{r-2}-1}\,N$$

$$r-1$$

$$\text{qu.}\,\overline{r-2}-1 \infty \frac{r-3}{rr-4r+3}$$

Soit r le nombre pair des cartes qui reſtent, et que la carte en jeu y ſoit 4 fois. alors l'avantage du Banquier eſt cette fraction de N, c'eſt a dire de ce qui a eſtè mis ſur la carte en jeu [1]).

[1]) En résumé Huygens a donc trouvé dans les quatre cas différents pour les avantages du banquier, respectivement: $\frac{1}{r}N, \frac{1}{r-1}N, \frac{\frac{3}{2}r-6}{(r-2)^2-r}N, \frac{2r-5}{(r-2)^2-1}N$. Or, dans l'article cité de Sauveur (voir la note 3 de la p. 165) celui-ci donne (sans démonstration) pour ces mêmes avantages, si on les exprime dans la notation de Huygens: $\frac{1}{r}N, \frac{1}{r-1}N, \frac{3}{2r-2}N, \frac{2r-5}{r^2-4r+3}N$.

On voit donc facilement que les résultats de Huygens et de Sauveur sont identiques; mais la forme sous laquelle Huygens présente le troisième résultat nous semble indiquer que l'article de Sauveur lui était inconnu lorsqu'il composa la présente Pièce.

D'ailleurs Sauveur donne encore d'autres résultats qui se rapportent aux règles plus compliquées qu'il expose dans son article. Parmi ces règles il y a celle *de la face*, qu'il explique comme il suit: „*Cependant parce que l'avantage du Banquier seroit trop grand, on l'a diminué en faisant que* lorsqu'il gagne à la première main dans laquelle il peut gagner une carte découverte, il face pour lors, c'est à dire qu'il ne prend que les deux tiers de ce qui a esté couché sur cette carte, *de sorte qu'il y perd un tiers*".

C'est évidemment à propos de cette règle que Huygens a pris les informations que nous avons reproduites dans la note 1 de la p. 164. Nous y trouvons une preuve de plus que Huygens ne connaissait pas encore l'article de Sauveur, où les questions qu'il pose sont résolues assez clairement.

APPENDICE IX [1]

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1688] [2]

§ 1 [3].

A, B, C ſpelen piquet ſettende ieder een ducaet. Altijdt ſpeelen er twee van de drie en die verlieſt ſet noch een ducaet in. En die beijde de ſpeelders achtereen afwint, ſtrijckt alles ſoo dat de laetſt verlieſende oock noch een ducaet moet geven.

de queſtie is hoe veel A wint, als hij voor eerſt zich vrij werpt.

Traduction:

A, B, C jouent au piquet mettant chacun un ducat. Ce ſont toujours deux des trois qui jouent. Celui qui perd met de nouveau un ducat. Et celui qui fait perdre ſes deux adverſaires conſécutivement prend tout, de ſorte que celui qui perd la dernière fois doit auſſi donner encore un ducat. On demande combien eſt l'avantage de A, s'il a jeté de manière à reſter libre pendant la première partie.

---

[1]) Cet Appendice, emprunté aux pp. 176 et 322—324 du Manuscrit F, contient les recherches de Huygens à propos du problème énoncé à cette page-ci et de deux autres problèmes analogues. Nous l'avons divisé en paragraphes.

[2]) D'après le lieu occupé dans le manuscrit F le § 1 devrait dater de 1683 et les autres paragraphes de 1688, mais nous ne pouvons pas admettre qu'il y aurait un intervalle de cinq années entre ces deux tentatives pour parvenir à la solution d'un même problème. Nous croyons plutôt que le § 1 fut écrit dans la même année que les autres §§ sur une page restée vide en 1683.

[3]) Ce paragraphe nous fait connaître la première tentative de Huygens de résoudre le problème en question.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ x & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x \end{array}$$

A, B, C ieder een duc. in.

A vrij als 3 d. in ſtaen. valeat ſijn winſt x.

A dan ſal tegens een der twee andere ſpelen, met gelijcke kans om tegen hem te verlieſen en de 5e ducaet in te ſetten [1]), of te winnen en gelijcke kans te hebben tegen den laetſten ſpelende tot 3 ducaten te winnen, of om ſelfs de vijfde ducaet [2]) in te ſetten.

A ingeſet 2 duc. van de 5 en B, C, moeten ſpelen. ſit $-b$.

$$x \begin{cases} \text{een kans tot } -b \\ \text{een kans tot } \begin{cases} 3 \text{ duc.} \\ \text{of } -b\ ^{3)} \end{cases} \end{cases} \quad x \begin{cases} \frac{3-b}{2} \\ -b \end{cases} \infty \frac{3-3b}{4} \infty x$$

B ſpelende tegen C als 3 inſtaen, valet $-\frac{1}{2}x$.

Traduction:

Que les avantages de A, B, C ſoient reſpectivement: x, $-\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{2}x$. Chacun met un ducat à l'enjeu. A eſt libre lorſque l'enjeu eſt de 3 ducats. Soit x ſon avantage.

A jouera alors contre l'un des deux autres joueurs avec une chance égale de perdre et de mettre le 5me ducat [1]) ou de gagner et d'avoir une chance égale, en jouant contre le dernier des joueurs, de gagner 3 ducats ou de devoir mettre lui-même le cinquième ducat [2]).

A ayant mis 2 ducats des 5, B et C doivent jouer. Soit $-b$ ſon avantage.

$$x \begin{cases} \text{une chance à } -b \\ \text{une chance à } \begin{cases} 3 \text{ duc.} \\ \text{ou} -b\ ^{3)} \end{cases} \end{cases} \quad x \begin{cases} \frac{3-b}{2} \\ -b \end{cases} \infty \frac{3-3b}{4} \infty x$$

B jouant contre C quand la miſe eſt de 3 ducats, cela vaut $-\frac{1}{2}x$.

---

[1]) Il semble que d'après les règles formulées au début de cette Pièce le jeu serait alors terminé. En effet, A ayant perdu contre le gagnant de la première partie, celui-ci a fait perdre consécutivement ses deux adversaires. Toutefois Huygens suppose dans l'alinéa qui suit que dans ces circonstances le jeu se continue. Ajoutons que nous ne savons pas résoudre les contradictions que nous signalons dans cette note-ci et dans les deux suivantes.

[2]) Ce serait, en vérité, le sixième ducat.

[3]) A ayant gagné la deuxième partie et perdu la troisième (la première ayant été jouée par B et C) la mise totale sera montée à 6 ducats. L'avantage de A ne peut donc pas être représenté par $-b$.

$$-\frac{1}{2}x \text{ is } \left|\begin{array}{l} \text{of 2 van de 4 in te ſetten als hij verliest, quod valeat } -c \\ \text{of } \left|\begin{array}{l} \text{3 te winnen als hij van A oock wint.} \\ \text{2 van de 5 in te ſetten dat is } -b \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{ergo} -\frac{1}{2}x \infty \left|\begin{array}{l} -c \\ \dfrac{3-b}{2} \end{array}\right. \infty \frac{3-b-2c}{4} \infty -\frac{1}{2}x.$$

$$\frac{-3+b+2c}{2} \infty x \infty \frac{3-3b}{4};\ c \infty \frac{9}{4} - \frac{5}{4}b$$

$$-c \left|\begin{array}{l} -2 \text{ ſoo C oock van A wint} \\ \text{2 van de 5 te hebben ingeſet en te moeten ſpelen tegen A quod valeat } -d \end{array}\right.$$

$$-d \left|\begin{array}{l} \text{3 van 6 te hebben ingeſet en niet te ſpelen} \\ \text{2 van 6 ingeſet en moeten ſpelen tegen C. quod ſit } -e \end{array}\right.$$

$$-e \left|\begin{array}{l} +5 \\ \text{3 van 7 ingeſet en niet te ſpelen} \end{array}\right.$$

Soude op een progreſſie uytkomen.

Traduction:

$$-\frac{1}{2}x \text{ eſt } \left|\begin{array}{l} \text{ou de mettre 2 des 4 s'il perd, ce qui vaille } -c \\ \text{ou } \left|\begin{array}{l} \text{de gagner 3 s'il gagne auſſi de A} \\ \text{de mettre 2 des 5, c'eſt } -b \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{par conſéquent} -\frac{1}{2}x \infty \left|\begin{array}{l} -c \\ \dfrac{3-b}{2} \end{array}\right. \infty \frac{3-b-2c}{4} \infty -\frac{1}{2}x.$$

$$\frac{-3+b+2c}{2} \infty x \infty \frac{3-3b}{4};\ c \infty \frac{9}{4} - \frac{5}{4}b$$

$$-c \left|\begin{array}{l} -2 \text{ ſi C gagne auſſi de A} \\ \text{d'avoir mis 2 des 5 et de devoir jouer contre A, ce qui vaille } -d \end{array}\right.$$

$$-d \left|\begin{array}{l} \text{d'avoir mis 3 des 6 et de ne pas jouer} \\ \text{d'avoir mis 2 des 6 et de devoir jouer contre C, ce qui ſoit } -e \end{array}\right.$$

$$-e \left|\begin{array}{l} +5 \\ \text{d'avoir mis 3 des 7 et de ne pas jouer.} \end{array}\right.$$

Cela mènerait à une progreſſion.

§ 2 [1]).

A, B, C fpelende fetten ieder een ducaet in. A fpeelt eerft tegen B en die van beijde wint, fpeelt tegens C. en C winnende fpeelt weer tegen de derde, tot dat iemandt 2 mael achtereen wint, welcke dan het ingefette ftrijckt. en daer en boven de ducaet die ieder die een fpel verlieft noch bij moet fetten, te weten 1 ducaet voor ieder verloren fpel. tot de laetft verliefende inclus. Vraeghe naer de waerde haerder kanffen [2]).

De kans van A fij z. Van B fij y. Van C fij x. Den ducaet fij d.

Soo A van B wint foo moet hij met C fpelen, en B noch een ducaet infetten. laet die kans alfdan van A fijn p. maer foo A tegen B verlieft foo fij de kans van A ∞q.

Soo heeft dan in 't eerfte A een kans tot p en een kans tot q dat is $\frac{p+q}{2}$.

p is een kans tot $5d$ te weten foo A van B en C achtereen wint want daer fijn eerft $3d$ ingefet en noch $1d$ door B ingefet, en C verliefende moet noch aan A $1d$ geven.

en een kans tot [3])

Traduction:

§ 2 [1]).

A, B, C qui jouent mettent chacun un ducat. A joue d'abord contre B et celui des deux qui gagne joue contre C. Et fi C gagne il joue de nouveau contre le troifième, jufqu'à ce que quelqu'un gagne 2 fois confécutivement, lequel prend alors l'enjeu et en outre le ducat que chacun qui perd une partie doit ajouter encore à l'enjeu, à favoir un ducat pour chaque partie que l'on perd, inclufivement celui qui perd la dernière partie. On demande la valeur de leurs chances [2]).

Que la chance de A foit z; celle de B y; celle de C x. Le ducat foit repréfenté par d.

Si A gagne de B il doit jouer avec C, et B doit ajouter un ducat à l'enjeu. Que la chance de A foit alors p, mais fi A perd contre B que la chance de A foit ∞ q.

Il s'enfuit que A a d'abord une chance à p et une à q; cela vaut $\frac{p+q}{2}$.

p eft une chance à $5d$, à favoir fi A gagne confécutivement de B et de C car il a été mis d'abord $3d$ et encore $1d$ mis par B et fi C perd il doit encore donner $1d$ à A, et une chance à [3])

---

[1]) Ce paragraphe nous fait voir comment Huygens a attaqué de nouveau le problème du § 1 sans réussir, cette fois encore, à le résoudre.

[2]) On voit que ce problème ne diffère pas essentiellement de celui du § 1.

[3]) Huygens n'achève pas la phrase. Il préfère recommencer sa tentative d'une façon un peu différente.

Soo A 't eerſte ſpel verlieſt laet ſijn kans weerdt ſijn p.
Soo A 't eerſte ſpel wint laet ſijn kans weerd ſijn q.
Soo A 't eerſte en tweede ſpel wint ſoo heeft hij $5d$.
Soo A 't eerſte wint en het tweede verlieſt, laet ſijn kans weerdt ſijn r.
maer A het eerſte gewonnen hebbende, heeft 1 kans tot $5d$, en 1 kans tot r. Soo is $\frac{5d+r}{2} \infty q$.

A beginnende te ſpelen heeft 1 kans tot p en 1 kans tot q, ſoo is dan ſijn kans van eerſten aen weerdt $\frac{p+q}{2}$.

Soo is de kans van C van eerſten aen waerdt $3d-p-q$, of A of B 't eerſte wint ſoo heeft C deſelfde kans. te weten 1 kans om van A of B te winnen, wanneer de waerde van de kans van C ſij s. ende 1 kans om tegen A of B te verlieſen, dat is om te hebben $0-d$, want C moet dan noch $1d$ geven.
Nu s is een kans om te hebben $6d$ of om [4])

§ 3 [5]).

Eerst genomen dat niet meer als de eerſte 3 ducaten werdt ingeſet.

Traduction:

Si A perd la première partie, que ſa chance vaille p.
Si A gagne la première partie, que ſa chance vaille q.
Si A gagne la première et la deuxième partie il a $5d$.
Si A gagne la première et perd la deuxième partie, que ſa chance vaille r.
mais A ayant gagné la première partie a 1 chance à $5d$, et 1 chance à r; donc $\frac{5d+r}{2} \infty q$.

Quand A commence à jouer il a 1 chance à p et 1 chance à q, par ſuite ſa chance vaut au début $\frac{p+q}{2}$.

La chance de C vaut donc au début $3d-p-q$. Que ce ſoit A ou B qui gagne la première partie, la chance de C eſt la même, à ſavoir 1 chance de gagner de A ou B, auquel cas ſa chance vaille s, et 1 chance de perdre contre A ou B, c'eſt-à-dire d'avoir $0-d$, car C doit alors donner encore $1d$.
Or, s vaut une chance d'avoir $6d$ ou de [4])

§ 3 [5]).

Suppoſons d'abord qu'on ne met rien que les 3 premiers ducats.

---

[4]) Huygens suspend de nouveau sa tentative pour la reprendre plus loin (au § 4). Il se propose de résoudre d'abord (comme pour se faire la main) un problème analogue, mais bien plus facile; voir le § 3 qui suit.

[5]) Dans ce paragraphe Huygens parvient à résoudre le problème plus facile qu'il s'est proposé.

A en B ſpelende laet de kans van C waerdt ſijn x; ſoo is die van A of B waerdt $\frac{3d-x}{2}$.

als A wint van B ſoo heeft C een kans tot o te weten, verlieſende tegen A. en een kans tot y dat is $\infty \frac{1}{2}y$, ſtellende y voor de waerde van de kans van C als hij tegen A gewonnen hebbende moet ſpelen tegen B.

ſoo is y gelijck 1 kans tot $3d$ winnende C tegen B en 1 kans tot z, C tegen B verlieſende. Ergo $y \infty \frac{3d+z}{2}$ ſtellende z voor de waerde van de kans van C in dit geval.

als A wint tegen B, ſoo heeft A 1 kans tot $3d$ winnende A tegen C en 1 kans tot z verlieſende A tegen C, dat is $\frac{3d+z}{2}$; als A wint tegen B ſoo is oock B ſijn kans z waerdt [1]).

Traduction:

Lorſque A et B jouent la chance de C vaille x, alors celle de A ou B vaut $\frac{3d-x}{2}$.

Si A gagne de B, C a une chance à o, à ſavoir quand il perd contre A, et une à y, ce qui vaut $\frac{1}{2}y$, ſi nous appelons y la valeur de la chance de C quand il a gagné contre A et qu'il doit jouer contre B.

Par ſuite y équivaut à 1 chance à $3d$, ſi C gagne contre B et 1 chance à z, ſi C perd contre B. On a donc $y \infty \frac{3d+z}{2}$ appelant z la valeur de la chance de C dans ce cas.

Si A gagne contre B, A a 1 chance à $3d$, lorſque A gagne contre C, et 1 chance à z, lorſque A perd contre C; ce qui vaut $\frac{3d+z}{2}$; ſi A gagne contre B la chance de B vaut également z [1]).

---

[1]) Puisque B se trouve alors exactement dans la même position où était C lorsque sa chance fut posée égale à z.

[2]) C'est-à-dire s'il gagne.

[3]) C'est-à-dire au début du jeu.

[4]) Les chances des trois joueurs A, B, C d'obtenir l'enjeu $3d$ valent donc respectivement au commencement du jeu: $\frac{15}{14}d$, $\frac{15}{14}d$ et $\frac{6}{7}d$, et leurs avantages ou désavantages (qu'on trouve en ôtant de la valeur de ces chances la mise d): $\frac{1}{14}d$, $\frac{1}{14}d$ et $-\frac{1}{7}d$. Le problème est donc résolu.

Ergo A winnende tegens B soo sijn haer drijen kanssen $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}y \\ +\frac{3d+z}{2} \\ +z\end{matrix}\right\} \infty\ 3d$

$$y+3d+3z \infty 6d;\ y+3z \infty 3d;\ y \infty 3d-3z \text{ sed } y \infty \frac{3d+z}{2} \text{ hoc ergo } \infty\ 3d-3z$$

$$3d+z \infty 6d-6z. \text{ Ergo } \frac{3}{7}d \infty z.$$

A tegen B spelende heeft 1 kans tot y want hij dan tegen C moet spelen [2]) en 1 kans tot z, dat is $\frac{y+z}{2} \infty \frac{3d-x}{2}$ want dat was de kans van A [3]).

$$y \infty 3d-x-z \infty 3d-3z;\ x \infty 2z;\ \text{sed } z \infty \frac{3}{7}d. \text{ Ergo } x \infty \frac{6}{7}d\ ^{4}).$$

y is de waerde der kans van die d'eene gewonnen hebbende tegen den anderen moet spelen.

z is de waerde der kans van die tegen d'een gewonnen hebbende, tegens den anderen verliest.

Traduction:

Si donc A gagne contre B les chances des trois joueurs feront $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}y \\ +\frac{3d+z}{2} \\ +z\end{matrix}\right\} \infty\ 3d$

$$y+3d+3z \infty 6d;\ y+3z \infty 3d;\ y \infty 3d-3z \text{ mais } y \infty \frac{3d+z}{2} \text{ ce qui est donc égal à } 3d-3z.$$

$$3d+z \infty 6d-6z. \text{ Par conséquent } \frac{3}{7}d \infty z.$$

A jouant contre B a une chance à y puisqu'il doit jouer alors contre C [2]) et 1 chance à z; ce qui vaut $\frac{y-z}{2} \infty \frac{3d+x}{2}$, car telle était la chance de A [3]).

$$y \infty 3d-x-z \infty 3d-3z;\ x \infty 2z \text{ mais } z \infty \frac{3}{7}d. \text{ Donc } x \infty \frac{6}{7}d\ ^{4}).$$

est la valeur de la chance de celui qui ayant gagné contre l'un des joueurs doit jouer contre l'autre.

z est la valeur de la chance de celui qui ayant gagné contre l'un perd contre l'autre.

§ 4 [1]).

…,B't eerste spel spe-…ende of C tegen A …et 2e spel zij de kans …an C waerdt x [2])

- 1 tot — $2d$. A w[erpt] spel uijt. C verlieft sijn ingesette d en noch een d.
- 1 tot y. C, B A 1 in.
  - 1 tot $5d$. B 1 in. C w. spel uijt
  - 1 tot z. B, A C 1 in
    - 1 tot — $2d$ B w. spel uijt
    - 1 tot e. A, C B 1 in
      - 1 tot — $3d$ A w. spel uijt
      - 1 tot f. C, B A 1 in
        - 1 tot 7 [3]) d uijt
        - 1 tot g. B, A C 1 in
          - 1 tot — $3d$
          - 1 tot h. A, C B 1 in
            - 1 tot — $4d$
            - 1 tot i. C, B A 1 in
              - 1 tot 9 [4]) a
              - 1 tot k. B, A C 1 in
                - 1 tot -- $4d$
                - 1 tot l. A, C C 1 in
                  - 1 tot — $5d$
                  - 1 tot m C, B A 1 in
                    - 1 tot $11d$

$\infty \frac{-2d+y}{2}$; $y \infty \frac{5d+z}{2}$; $z \infty \frac{-2d+e}{2}$; $e \infty \frac{-3d+f}{2}$; $f \infty \frac{7^{3)}d+g}{2}$; $g \infty \frac{-3d+h}{2}$;

$\infty \frac{-4d+i}{2}$; $i \infty \frac{9^{4)}d+k}{2}$; $k \infty \frac{-4d+l}{2}$; $l \infty \frac{-5d+m}{2}$

$$x \infty \frac{-2d+\frac{5}{2}d-\frac{1}{2}d-\frac{3}{8}d+\frac{3}{8}d-\frac{3}{32}d-\frac{1}{16}d+\frac{1}{16}d-\frac{1}{64}d-\frac{5}{512}d+\frac{1}{512}m\ ^{5)}}{2}$$

Traduction:

§ 4 [1]).

… et B jouant la pre-…ière partie, ou C …ontre A la 2me partie; …oit x ce que vaut la …hance de C [2])

- 1 à — $2d$. A termine le jeu. C perd le d qu'il a mis et encore un d.
- 1 à y. C, B A met 1.
  - 1 à $5d$. B met 1. C termine le jeu
  - 1 à z. B, A C met 1
    - 1 à — $2d$. B termine le jeu.
    - 1 à e. A, C B met 1
      - 1 à — $3d$ A termine le jeu
      - 1 à f. C, B A met 1
        - 1 à 7 [3]) d; jeu terminé
        - 1 à g. B, A C met 1
          - 1 à — $3d$
          - 1 à h. A, C B met 1
            - 1 à — $4d$
            - 1 à i. C, B A met 1
              - 1 à 9 [4]) d
              - 1 à k. B, A C met 1
                - 1 à — $4a$
                - 1 à l. A, C C met 1
                  - 1 à — $5a$
                  - 1 à m. C, B A met 1
                    - 1 à $11d$

$\infty \frac{-2a+y}{2}$; $y \infty \frac{5d+z}{2}$; $z \infty \frac{-2d+e}{2}$; $e \infty \frac{-3d+f}{2}$; $f \infty \frac{7^{3)}d+g}{2}$; $g \infty \frac{-3d+h}{2}$;

$\infty \frac{-4d+i}{2}$; $i \infty \frac{9^{4)}d+k}{2}$; $k \infty \frac{-4d+l}{2}$; $l \infty \frac{-5d+m}{2}$

$$x \infty \frac{-2d+\frac{5}{2}d-\frac{1}{2}d-\frac{3}{8}d+\frac{3}{8}d-\frac{3}{32}d-\frac{1}{16}d+\frac{1}{16}d-\frac{1}{64}d-\frac{5}{512}d+\frac{1}{512}m\ ^{5)}}{2}$$

---

[1]) Dans ce paragraphe le problème du § 2 est repris et réduit à la sommation d'une suite infinie; comparez la dernière ligne de la p. 171 et les p. 17.. 18 de

$$x \infty -\frac{2}{2}d+\frac{5}{4}d-\frac{2}{8}d-\frac{3}{16}d+\frac{7}{32}d-\frac{3}{64}d-\frac{4}{128}d+\frac{9}{256}d-\frac{4}{512}d-\frac{5}{1024}d+\frac{11}{2048}d+\dots$$

comme on le vérifie facilement en consultant le petit tableau qui suit:

Numéro de la partie	Joueurs participants	Joueur en repos	Mise de chacun des joueurs en ducats			Gain ou perte de C quand le jeu finit avec cette partie	Chance que le jeu finit de cette façon	Contribution à l'avantage ou au désavantage de C
			A	B	C			
1	A, B	C	1	1	1			
2	A, C	B	1	2	1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$
3	C, B	A	2	2	1	$+5$	$\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{4}$
4	B, A	C	2	2	2	-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{2}{8}$
5	A, C	B	2	3	2	-3	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$
6	C, B	A	3	3	2	$+7$	$\frac{1}{32}$	$+\frac{7}{32}$
7	B, A	C	3	3	3	-3	$\frac{1}{64}$	$-\frac{3}{64}$
8	A, C	B	3	4	3	-4	$\frac{1}{128}$	$-\frac{4}{128}$
9	C, B	A	4	4	3	$+9$	$\frac{1}{256}$	$+\frac{9}{256}$
10	B, A	C	4	4	4	-4	$\frac{1}{512}$	$-\frac{4}{512}$
11	A, C	B	4	5	4	-5	$\frac{1}{1024}$	$-\frac{5}{512}$
12	C, B	A	5	5	4	$+11$	$\frac{1}{2048}$	$+\frac{11}{2048}$

Quant à la sommation de la suite, on peut observer d'abord que la somme des trois premiers termes est zéro, celle des trois suivantes $-\frac{1}{64}d$; continuant ainsi on trouve facilement:

$$x=-\frac{1}{64}d\left(1+\frac{2}{8}+\frac{3}{64}+\frac{4}{512}+\dots\right).$$

En appliquant ensuite l'artifice employé par Huygens en 1665 (voir la p. 106) on a:

$$1+\frac{2}{8}+\frac{3}{64}+\frac{4}{512}\dots=\left\{\begin{array}{r} 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\dots=\frac{8}{7} \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\dots=\frac{8}{7}\times\frac{1}{8} \\ \frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\dots=\frac{8}{7}\times\frac{1}{64} \\ \frac{1}{512}+\dots=\frac{8}{7}\times\frac{1}{512} \\ \dots\quad\dots \end{array}\right\}=\frac{8}{7}\times\frac{8}{7};$$

d'où il résulte que le désavantage de C au commencement du jeu est égal à $\frac{1}{49}$ d'un ducat.

§ 5 [1]).

in d'eerste 3 spullen { A B spelende / A C / C B } kans van C { x / y / z } al of er in 't eerst niets ingeset waer.

1e A B of 2de A C spelende

- is x: A, C; B 1 in { 1 tot $-d$ / 1 tot z }
  - z: C, B; A 1 in { 1 tot $3d$ / 1 tot e }
  - e: B, A; C 1 in { 1 tot $-d$ / 1 tot f }
  - f: A, C; B 1 in { 1 tot $-2d$ / 1 tot g }
  - g: C, B; A 1 in { 1 tot $5d$ / 1 tot h }
  - h: B, A; C 1 in { 1 tot $-2d$ / 1 tot i }
  - i: A, C; B 1 in { 1 tot $-3d$ / 1 tot k }
  - k: C, B; A 1 in { 1 tot $7d$ / 1 tot l }
  - l: B, A; C 1 in { 1 tot $-3d$ / 1 tot m }
  - m: A, C; B 1 in

$$x \infty \frac{-d+z}{2};\ z \infty \frac{3d+e}{2};\ e \infty \frac{-d+f}{2};$$

$$f \infty \frac{-2d+g}{2};\ g \infty \frac{5d+h}{2};\ h \infty \frac{-2d+i}{2};\ i \infty \frac{-3d+k}{2};$$

$$k \infty \frac{7d+l}{2};\ l \infty \frac{-3d+m}{2};\ m \infty \frac{-4d+n}{2}$$

$$x \infty \frac{-d+\frac{3}{2}d-\frac{1}{4}d-\frac{1}{4}d+\frac{5}{16}d-\frac{1}{16}d-\frac{3}{64}d+\frac{7}{128}d-\frac{3}{256}d-\frac{1}{128}d+\frac{1}{512}n}{2}$$ [2])

Traduction:

§ 5 [1]).

dans les 3 premières parties { A B jouant / A C / C B } chance de C { x / y / z } supposant qu'on n'ait rien mis

1e A B ou 2me A C jouant

- valeur de x: A, C; B met 1 { 1 à $-d$ / 1 à z }
  - z: C, B; A met 1 { 1 à $3d$ / 1 à e }
  - e: B, A; C met 1 { 1 à $-d$ / 1 à f }
  - f: A, C; B met 1 { 1 à $-2a$ / 1 à g }
  - g: C, B; A met 1 { 1 à $5d$ / 1 à h }
  - h: B, A; C met 1 { 1 à $-2a$ / 1 à i }
  - i: A, C; B met 1 { 1 à $-3d$ / 1 à k }
  - k: C, B; A met 1 { 1 à $7d$ / 1 à l }
  - l: B, A; C met 1 { 1 à $-3d$ / 1 à m }
  - m: A, C; B met 1

$$x \infty \frac{-d+z}{2};\ z \infty \frac{3d+e}{2};\ e \infty \frac{-d+f}{2};$$

$$f \infty \frac{-2d+g}{2};\ g \infty \frac{5d+h}{2};\ h \infty \frac{-2d+i}{2};\ i \infty \frac{-3d+k}{2};$$

$$\frac{7d+l}{} \quad \frac{-3d+m}{} \quad \frac{-4d+n}{}$$

[1]) Ce paragraphe s'occupe de la solution d'un problème qui ne diffère de celui des §§ 1 et 2 que par la circonstance que le jeu commence sans qu'il y ait une mise. Comparez encore la p. 18 de l'Avertissement.

[2]) En sommant les termes de cette suite trois à trois on trouve $\frac{1}{8}d - \frac{1}{512}d - \frac{2}{4096}d - \frac{3}{32768}d - \cdots$, c'est-à-dire (par l'artifice exposé dans la note 5 de la p. 177) $\frac{1}{8}d - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49}d = \frac{6}{49}d$; l'avantage de C est donc $\frac{6}{49}$ d'un ducat.

Voici d'ailleurs une solution générale qui s'applique à tous les problèmes traités dans cet Appendice: Soit m la mise de chacun des trois joueurs au début du jeu et n ce que le perdant doit ajouter chaque fois à l'enjeu. Supposons d'abord qu'une ou plusieurs parties aient déjà été jouées, de sorte que l'enjeu est devenu égal à e. Nous allons calculer les espérances mathématiques des joueurs à compter de cet instant. À cet effet nous faisons remarquer que chacune de ces espérances peut être considérée comme formée par la somme de deux parties dont l'une dépend de l'enjeu actuel e et l'autre des mises éventuelles qui peuvent encore y être ajoutées avant la fin du jeu, c'est-à-dire avant que l'un des joueurs ait gagné deux parties consécutives. La première partie de ces espérances est donc proportionnelle à l'enjeu, l'autre est une constante parce que, d'après les règles du jeu, la chance que le jeu finit à un moment donné à l'avantage de l'un des joueurs est indépendante de la grandeur de l'enjeu. On peut donc poser pour l'espérance de celui qui vient de gagner: $a_1e + a_2$, pour celle de celui qui vient de perdre: $b_1e + b_2$ et, enfin, pour l'espérance de celui qui n'a pas participé à la dernière partie: $c_1e + c_2$. Or, le gagnant a une chance égale de gagner la nouvelle partie qu'il va engager et de la perdre. Au premier cas il recevra l'enjeu et la nouvelle mise n de celui qui perd cette partie; au second cas il devra mettre n et il sera ensuite dans la situation de celui qui vient de perdre, mais l'enjeu sera maintenant $e + n$. On a donc $a_1e + a_2 = \frac{1}{2}(e+n) + \frac{1}{2}[b_1(e+n) + b_2 - n] = \frac{1}{2}(b_1 + 1)e + \frac{1}{2}b_1n + \frac{1}{2}b_2$. On trouve de même: $b_1e + b_2 = \frac{1}{2}[c_1(e+n) + c_2] = \frac{1}{2}c_1e + \frac{1}{2}c_1n + \frac{1}{2}c_2$, et enfin: $c_1e + c_2 = \frac{1}{2}[a_1(e+n) + a_2] - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}a_1e + \frac{1}{2}a_1n + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}n$. On en déduit les six équations: $a_1 = \frac{1}{2}(b_1 + 1)$; $b_1 = \frac{1}{2}c_1$; $c_1 = \frac{1}{2}a_1$; $a_2 = \frac{1}{2}b_1n + \frac{1}{2}b_2$; $b_2 = \frac{1}{2}c_1n + \frac{1}{2}c_2$; $c_2 = \frac{1}{2}a_1n + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}n$; ce qui donne $a_1 = \frac{4}{7}$; $b_1 = \frac{1}{7}$; $c_1 = \frac{2}{7}$; $a_2 = \frac{5}{49}n$; $b_2 = \frac{3}{49}n$; $c_2 = -\frac{8}{49}n$. Il en résulte que l'espérance du gagnant est représentée par $\frac{4}{7}e + \frac{5}{49}n$; celle du perdant par $\frac{1}{7}e + \frac{3}{49}n$, et celle du troisième joueur par $\frac{2}{7}e - \frac{8}{49}n$. Reportons nous maintenant au commencement du jeu et soient A et B les joueurs qui engageront la première partie, C le troisième joueur, qui jouera avec le gagnant. Il est certain qu'après la première partie C sera dans la situation du joueur qui n'a pas participé à la partie et que l'enjeu sera alors $3m + n$. Son espérance mathématique au début du jeu est donc égale à $\frac{2}{7}(3m + n) - \frac{8}{49}n = \frac{6}{7}m + \frac{6}{49}n$. Pour trouver son avantage ou désavantage, dans le sens que Huygens attache à ces expressions, on doit déduire de son espérance sa mise m. On obtient donc pour cet avantage: $-\frac{1}{7}m + \frac{6}{49}n$, et, par conséquent, pour celui des autres joueurs $\frac{1}{14}m - \frac{3}{49}n$. En posant $m = d$, $n = 0$, on retrouve la solution du problème simplifié du § 3; voir la note 4 de la p. 174. Prenant $m = d$, $n = a$, on obtient la solution du problème principal proposé au § 2; voir les dernières lignes de la note 5 de la p. 177. Enfin, en supposant $m = 0$, $n = d$, on trouve l'avantage de C égal à $\frac{6}{49}d$, comme dans le premier alinéa de cette note.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1655 À 1659.

Problèmes et théorèmes d'arithmétique, de stéréométrie et de géométrie analytique.

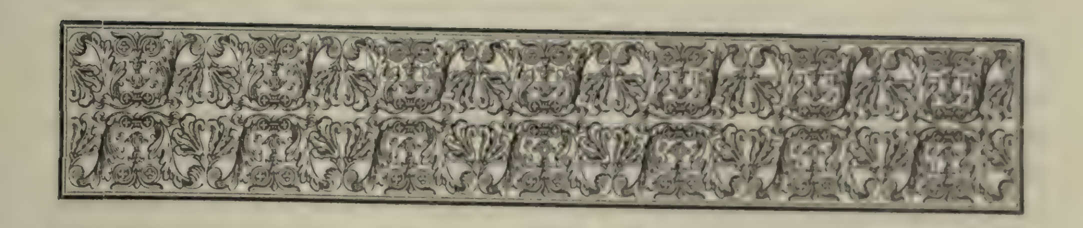
Recherches sur la théorie des nombres. Équation de Pell.

Rectification de la parabole et quadratures des surfaces courbes des conoïdes parabolique, elliptique et hyperbolique.

Courbes diverses. Quadratures. Cubatures des solides de révolution. Centres de gravité.

Propriétés de la cycloïde. Application à un théorème de cyclométrie.

Théorie des développées et des courbes parallèles.



Avertiſſement.

Aperçu général des travaux mathématiques de 1655 à 1659.

Les années 1655—1659 ont été fertiles, pour Huygens, en recherches mathématiques de genres très différents. Parmi les travaux qui datent de cette période on en trouve qui ſe rapportent à la théorie des nombres et ſurtout à l'équation dite de Pell [1]; d'autres contiennent la rectification de la parabole et la quadrature des ſurfaces courbes des conoïdes parabolique, elliptique et hyperbolique [2], ou la diſcuſſion d'un certain nombre de courbes diverſes, de leur quadrature, de la cubature de leurs ſurfaces de révolution et de divers centres de gravité qui ſe préſentent dans leur étude [3]; d'autres encore traitent, à l'occaſion des problèmes ſur la cycloïde propoſés par Paſcal, des propriétés de cette courbe [4]) et d'une application cyclométrique de l'une de ces propriétés [5]. Il y en a de très

---

[1]) Voir la Pièce N°. III (p. 212—224) avec les Appendices I (p. 225—288) et II (p. 229).

[2]) Voir les Pièces N°. VI (p. 234—270) et N°. X (p. 314—346).

[3]) Voir la Pièce N°. VIII (p. 273—282) qui traite des paraboles et hyperboles de divers ordres, représentées par les équations $y^a = kx^b$ et $x^a y^b = k$, avec les Appendices I (p. 283—287) et II (p. 288—293); la Pièce N°. IX (p. 294—313) qui traite de la conchoïde, de la cissoïde, du folium de Descartes et de quelques autres courbes moins célèbres, et enfin la Pièce N°. XVI qui se rapporte à la quadratice de Dinostrate (p. 407).

[4]) Voir la Pièce N°. XI (p. 347—376) avec l'Appendice (p. 377—378).

[5]) Voir la Pièce N°. XIII (p. 381—383).

importants qui exposent et appliquent la théorie des développées et des courbes parallèles [1]) et d'autres plus élémentaires qui donnent la solution d'un problème, ou bien la démonstration d'un théorème, d'arithmétique [2]), de planimétrie [3]), de stéréométrie [4]) ou de géométrie analytique [5]).

Il ne semble pas nécessaire d'analyser ici toutes ces Pièces. Nous nous bornerons donc à parler des principales. D'ailleurs pour les autres les notes que nous y avons ajoutées suffiront pour en faire connaître la genèse et la portée.

Disons encore que beaucoup des résultats les plus importants trouvés par Huygens pendant l'époque qui nous occupe ont été publiés par lui dans son „Horologium oscillatorium" de 1673; mais sans démonstrations et sans faire connaître aucunement la manière dont ils furent obtenus. Or, les Pièces qui suivent fournissent les démonstrations qui manquent dans cet ouvrage, et jettent une vive lumière sur les méthodes employées par Huygens pour découvrir les résultats qu'il y énonce.

Recherches sur la théorie des nombres. Équation dite de Pell.

Huygens n'a été que rarement sous l'influence du charme que la théorie des nombres a exercé sur tant de mathématiciens célèbres. On peut même dire que s'il s'est occupé quelquefois de cette théorie, c'était un peu malgré lui.

Ainsi, en mai 1656, Huygens écrit à Mylon [6]), qui lui fait parvenir deux problèmes de Fermat sur les nombres, que ces problèmes „sont tout a fait beaux dans le gendre, et mal aisez à resoudre," qu',,au moins ils me semblent tels a moy qui

---

[1]) Voir la Pièce N°. XV (p. 387—405) et l'Appendice (p. 406).

[2]) Voir la Pièce N°. XIV (p. 384—386), où Huygens s'occupe d'un problème d'arithmétique publié par Eversdyck.

[3]) Voir dans la Pièce N°. I (p. 208—209) la solution d'un problème élémentaire sur le triangle, proposé par Johan de Witt; dans la Pièce N°. VII (p. 271—272) celle d'un cas particulier, proposé par Pascal, du problème de décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés; enfin dans la Pièce N°. V (p. 232—233) une démonstration du théorème de Pythagore qui diffère de toutes les démonstrations connues en 1914, date où elle fut publiée dans l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 232.

[4]) Voir la Pièce N°. XII (p. 379—380), où Huygens donne la démonstration d'un théorème de Wallis sur le volume d'un tronc de pyramide ou de cône.

[5]) Voir la Pièce N°. II (p. 210—211) qui traite du problème de Pappus pour quatre lignes, et la Pièce N°. IV (p. 230—231) de nature très élémentaire, qui analyse l'équation cartésienne de la ligne droite et du cercle.

ne me ſuis gueres exercè dans les queſtions des nombres, parce que j'ay toujours pris plus de plaiſir à celles de Geometrie. Toutefois j'eſſayeray encore ſi j'en puis devenir maiſtre". Deux années plus tard, en ſeptembre 1658, il s'exprime bien plus fortement dans une lettre à Wallis en diſant qu'il ne comprend pas qu'on s'occupe avec tant d'animation de ces ſortes de problèmes auxquels on ne devrait conſacrer „ſes bonnes heures" que lorſque les queſtions importantes comme on en trouve tant dans la géométrie viendraient à manquer [7]). Et Huygens a perſévéré longtemps dans cette attitude [8]). C'eſt ſeulement vers la fin de ſa vie qu'il communique à Leibniz un jugement plus favorable lorſqu'il lui écrit [9]): „Dans la recherche des nombres, le plus utile feroit de s'arreſter aux Theoremes dont il y en a des beaux et qui peuvent ſervir dans des rencontres".

Quel eſt donc le motif qui a pouſſé Huygens en 1657 et 1658 à s'occuper plus activement de problèmes ſur les nombres? Il nous le révèle dans une de ſes lettres [10]), où l'on lit: „Je n'adjouſteray rien touchant le traitè de Monſieur Frenicle [11]) ſi non que je ſuis marry de n'avoir pas ſceu, auparavant que de veoir la ſolution de ces problemes, que Monſieur de Fermat la jugeoit de telle importance. Car encore que je ne me ſois jamais guere appliquè aux queſtions purement arithmetiques je n'aurais pas laiſſè d'entreprendre celles cy, afin de meriter s'il m'euſt eſtè poſſible l'eſtime de ce grand homme" [12]).

---

6) Voir la p. 426 du T. I.

7) „Nesciveram equidem de Problematis illis Arithmeticis tantis animis inter vos decertari. Quin imo idem de ijs sentiebam quod te quoque sæpius expressisse video, non debere bonas horas talibus impendi nisi cum potiora deessent, quæ sane in geometricis offeruntur plurima" (p. 211 du T. II).

8) Voir encore une lettre du 31 août 1662 où on lit (p. 215 du T. IV). „Les questions que vous m'avez envoiees ne meritent pas qu'on s'y amuse n'estant aucunement belles ny utiles a rien. cela vient de quelque arithmeticien et non pas d'un Geometre". Il est vrai que les questions, qu'on trouve à la p. 211 du T. IV, n'avaient pas beaucoup d'importance.

9) Voir la lettre du 16 novembre 1691, p. 190 du T. X.

10) Voir la lettre du 7 mars 1658, p. 146 du T. II.

11) Il s'agit d'un petit traité de Frenicle, mentionné plusieurs fois dans le „Commercium epistolicum" de Wallis (voir les pp. 802, 807, 821 et 832 du „Volumen alterum", cité dans la note 10, p. 9 du présent Tome) et qui semble perdu. D'après Cantor, p. 784 du T. II des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", édition de 1900, il fut imprimé à Paris en 1657 et portait le titre „Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos quæ tanquam insolubilia Universis Europæ Mathematicis a clarissimo viro D. Fermat sunt proposita et a D. B[ernard] F[renicle] D[e] B[essy] inventa".

12) On trouve un jugement plus réservé de Huygens sur Fermat dans une lettre du 4 octobre 1658 à Van Schooten (p. 235 du T. II) où Huygens s'associe à l'opinion exprimée sur lui par van Schooten et Descartes (voir les p. 221—222 du T. II).

Ajoutons qu'une fois lancé dans cette voie, qui n'était pas de celles qu'il préférait ſuivre mais où ſes relations avec les géomètres français de ſon époque l'avaient pouſſé, il n'a pas manqué de faire des remarques ingénieuſes ſur l'équation de Pell, d'inventer un bel algorithme pour trouver le réſidu de la diviſion d'un grand nombre p. e. par le nombre 7 [1]) et d'indiquer de nouveaux caractères pour reconnaître ſi un nombre donné eſt un non-carré [2]).

Déjà en 1646 le père Merſenne tâcha, mais avec peu de ſuccès, d'intéreſſer le jeune Huygens, âgé alors de dix-ſept ans, aux problèmes ſur les nombres [3]).

En 1656, après ſon premier ſéjour à Paris [4]), l'influence des mathématiciens français commence à ſe faire ſentir. Il croit être agréable à Mylon en lui mandant [5]) que van Schooten lui a „monſtrè une reigle de Monſieur des Cartes [6]) pour trouver des nombres qu'on appelle *amicabiles*". Il s'eſt lui-même appliqué à cette recherche et il veut ſavoir ſi Mylon a quelque règle ſemblable [7]).

Nous ne ſavons pas quels étaient ces deux problèmes de Fermat envoyés en mai 1656 dont il fut queſtion plus haut [8]). Ce ne fut qu'en mars de l'année ſuivante

---

[1]) Voir les p. 218—224 et comparez la méthode de Pascal décrite dans la note 1 de la p. 220.

[2]) Voir les pp. 217, 218, 220—223 et 229.

[3]) Voir les lettres de Mersenne de septembre 1646 (p. 19—20 du T. I), du 8 décembre 1646 (p. 46—47) et du 8 janvier 1647 (p. 53—54 du même Tome) et la réponse de Huygens à l'une d'elles du 23 décembre 1646 (p. 557—558 du T. II). On trouve les premières recherches, peu importantes, de Huygens sur des questions de nombres aux pp. 9, 45 et 259—260 du T. XI. Elles datent de 1646 et de 1650.

[4]) Voir sur ce séjour les p. 3—4 du présent Tome.

[5]) Voir sa lettre du 15 mars 1656, p. 391 du T. I.

[6]) On trouve cette règle aux p. 423—424 de l'ouvrage de van Schooten mentionné à la p. 5 du présent Tome.

[7]) Voyez la réponse de Mylon et la règle qui l'accompagnait aux pp. 400 et 405—406 du T. I et consultez encore la p. 438 du même Tome. Ajoutons que les deux règles ne diffèrent pas essentiellement puisqu'on a $(3.2^n-1)(6.2^n-1)+(3.2^n-1)+(6.2^n-1)$ [Frenicle] $=$ $= 18.2^{2n}-1$ [Descartes].

[8]) Voir le dernier alinéa de la p. 184. Il serait intéressant de connaître ces problèmes. Huygens écrit encore à leur propos à de Carcavy (p. 428 du T. I) qu'ils „sont de bien difficile recherche" et qu'il douterait „presque s'il y auroit moyen de trouver d'autres tels nombres autrement que par hazard, si l'on ne m'asseuroit que Monsieur de Fermat en a des regles certaines, lesquelles je croy pourtant estre de cette sorte, qu'il faille premierement chercher

que Huygens reçut le célèbre problème qui a occupé tant de mathématiciens [9]), ſavoir celui de trouver des nombres entiers ſatiſfaiſant à l'équation $au^2 + 1 = v^2$, où a eſt un nombre entier donné; équation à laquelle on a aſſocié bien à tort le nom de Pell [10]).

Voici les réſultats obtenus par Huygens dans ſes recherches ſur cette équation: 1°. il montra que chaque ſolution de l'une des équations $au^2 - 1 = v^2$; $au^2 - 2 = v^2$; $au^2 + 2 = v^2$ en amène une autre de l'équation en queſtion [11]); 2° il remarqua qu'il en eſt de même pour chaque ſolution d'une équation $au^2 \pm k = v^2$, pourvu que k ſatiſfaſſe à une certaine condition [12]); 3°. il indiqua une ſolution dans les cas particuliers où $a = p^2 \pm 1$, ou $p^2 \pm 2$ [13]); 4°. il montra qu'ayant trouvé une ſolution quelconque de l'équation de Pell on en peut déduire une infinité d'autres [14]).

On voit donc, qu'excepté dans les cas particuliers prémentionnés, Huygens n'avait d'autre moyen, pour trouver une ſolution d'une équation de Pell donnée, que d'eſſayer diverſes valeurs de u l'une après l'autre afin d'examiner ſi elles ſatisfaiſaient à l'équation de Pell elle-même ou à l'une des équations auxiliaires. Il eſt vrai que, dans cette beſogne, les caractères qu'il avait trouvés [15]) pour reconnaître très vite dans un grand nombre de cas qu'un nombre donné eſt un non-carré, lui pouvaient être utiles; mais cela n'empêchait pas que ſa méthode ne fût très laborieuſe et ne pût pas ſervir dans les cas fréquents [16]) où la plus petite

---

quelque nombre a l'avanture, comme dans les reigles qu'on a donné pour les nombres parfaits et amicables."

Ou bien étaient-ce après tout les deux problèmes du premier défi de Fermat aux mathématiciens du 3 janvier 1657? Voir les p. 12—13 de notre T. II, ou les p. 332—333 du T. II des „Œuvres de Fermat", citées dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome.

[9]) Comparez la note 5 de la p. 213.

[10]) Voir p. e. la p. 777 de l'ouvrage de Cantor cité dans la note 9 de la p. 21.

[11]) Voir les pp. 214 et 215.

[12]) On doit prendre pour cette condition que k soit un facteur de $2uv$ (et non de $2u^2$ comme Huygens l'indique). En effet, soient u_1 et v_1 des nombres entiers qui satisfont à l'équation $au^2 \pm k = v^2$, il sera satisfait à l'équation $au^2 + 1 = v^2$ par les valeurs $u = \frac{2u_1v_1}{k}$; $v = \frac{2v_1^2}{k} \mp 1$. Comparez la note 1 de la p. 214.

[13]) Voir la p. 215.

[14]) Voir la p. 215—216.

[15]) Comparez la note 2.

[16]) Comparez la table de Frenicle aux p. 30—32 du T. II.

ſolution eſt un nombre aſſez grand. Sans doute Fermat et Frenicle poſſédaient des méthodes plus puiſſantes, mais ils ont eu le tort de ne pas les faire connaître [1]).

Or, ayant reçu, en ſeptembre 1658, le „Commercium epiſtolicum" de Wallis [2]), Huygens y trouva une méthode due à Brounker qui conduit au but avec ſûreté, même dans les cas les plus compliqués, comme p. e. dans celui de $a = 109$, où la plus petite ſolution égale 15140424455100 [3]).

Quoique cette méthode ſoit encore loin de l'élégance et de la perfection obtenues plus tard dans cette matière par les mathématiciens modernes [4]), on comprend que Huygens, après en avoir éprouvé l'efficacité, ne manqua pas de témoigner à Wallis de ſon admiration pour cette invention, tout en y apportant, bien à raiſon, cette reſtriction: qu'il n'en reſulte pas, comme Wallis le prétendait, que chaque équation de Pell doit admettre une ſolution [2]).

Rectification de la parabole et quadrature des ſurfaces des conoïdes parabolique, elliptique et hyperbolique.

Les problèmes de la rectification de la parabole et de la quadrature de la ſurface du conoïde parabolique étaient préſents dans les eſprits des mathématiciens au temps où Huygens commença ſa carrière ſcientifique.

En 1646 déjà, lorſqu'il était âgé de 17 ans, il rencontra dans les „Cogitata phyſico-mathematica" de Merſenne [5]) une fauſſe quadrature de la ſurface du conoïde parabolique [6]).

De même, en 1656, Huygens reconnut la fauſſeté de la rectification de la parabole, propoſée par Hobbes [7]).

---

[1]) Fermat n'a donné sur sa méthode qu'une indication vague qu'on trouve à la p. 460 du T. II. Quant à Frenicle, Wallis nous dit expressément (p. 832 du „Volumen alterum", cité dans la note 10 de la p. 9) que dans le traité mentionné dans la note 11 de la p. 185, Frenicle ne révéla pas sa méthode, quoiqu'on y trouvât (voir la p. 821 du „Volumen alterum") la table citée dans la note précédente qu'il y prolongea jusqu'au nombre 150.

[2]) Voir la p. 211 du T. II.

[3]) Voir sur cette méthode les p. 227—228.

[4]) Voir p. e. les p. 600—602 du T. I de l'„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Leipzig, Teubner, 1900—1904".

[5]) Voir la p. 99 de l'ouvrage de 1644, cité dans la note 2 de la p. 34 du T. I.

[6]) Voir la minute d'une lettre à Mersenne, p. 34 du T. I.

[7]) Consultez les pp. 392 et 440 du T. I.

Ainſi l'on comprend que, lorſque, le 27 octobre 1657, il trouva la ſolution des deux problèmes pour autant qu'elle était poſſible, ſavoir leur réduction reſpectivement à la quadrature de l'hyperbole et à celle du cercle, il fit ſortir de ſa plume le fameux „εὕρηκα" [8]) dont il avait coutume de marquer dans ſes manuſcrits les endroits où il venait d'expoſer une découverte importante. Enſuite il ſe mit à rédiger à la mode archimédienne les démonſtrations des théorèmes qu'il avait trouvés [9]); ſans doute avec l'intention de les faire paraître dans un nouveau traité géométrique du genre de ceux qu'il avait déjà publiés. Vers le même temps il communiqua à de Sluſe [10]) et à van Schooten [11]) les réſultats de ſa quadrature de la ſurface du conoïde parabolique pour quelques cas particuliers, ſans toutefois leur faire connaître ni ſa méthode, ni la ſolution du cas général.

De la lettre qu'il avait reçue, van Schooten donna lecture à van Heuraet [12]). Huygens nous aſſure [13]), et il n'y a pas lieu d'en douter, que ce fut cette lecture qui inſpira à van Heuraet ſon article „De tranſmutatione curvarum linearum in rectas" [14]), où, en trois pages, il expoſe une méthode générale pour réduire la rectification d'une courbe à la quadrature d'une autre et l'applique à la rectification de la parabole cubique et à la réduction de celle de la parabole ordinaire à la quadrature de l'hyperbole.

À la ſuite de cette communication, van Heuraet fit bientôt parvenir à Huygens ſa ſolution à lui du problème de la quadrature de la ſurface du conoïde parabolique [15]). Elle correſpond à celle de Huygens pour le fond, mais en diffère beaucoup par la forme [16]). Or, Huygens avait obtenu ſon réſultat d'une manière aſſez détournée, moitié algébrique, moitié géométrique, ſe baſant ſur une propriété

8) Voir les p. 234—236 du préſent Tome et ſurtout la Fig. 1 de la p. 234 où l'εὕρηκα et la date de la découverte furent inſcrits.

9) Voir ſa lettre à de Sluſe du 2 novembre 1657, p. 80 du T. II, où l'on lit: „Circa parabolam ante paucos dies duobus novis, ut mihi quidem videntur ac præclaris inventis potitus ſum, quibus conſcribendis ſummo ſtudio nunc incumbo". On trouve le réſultat de ce travail aux p. 237—270 du préſent Tome,

10) Voir ſa lettre du 20 déc. 1657, p. 104 du T. II.

11) Voir ſa lettre du 28 déc. 1657, p. 112—113 du T. II.

12) Voir la lettre de Van Schooten à Huygens du 4 février 1658, p. 129—130 du T. II.

13) Voir la p. 72 de l'édition originale de l'„Horologium oſcillatorium."

14) L'article parut dans l'édition de 1659 de la „Geometria" de Deſcartes par van Schooten; voir les p. 518—520.

15) Voir la p. 131 du T. II.

16) Comparez la note 6 de la p. 265 et la note 5 de la p. 315.

de la ſuite des nombres carrés impairs 1, 9, 25, etc., et, en fin de compte, ſur la cubature du conoïde hyperbolique obtenue déjà par Archimède [1]). Il n'était pas probable que van Heuraet eût ſuivi la même voie. Il fallait donc qu'il en exiſtât une autre plus directe et Huygens ne tarda pas à la découvrir; en la ſuivant il retrouva le réſultat de van Heuraet dans la forme même dans laquelle celui-ci l'avait énoncé [2]). De plus, il aperçut que la méthode qu'il venait de trouver pouvait s'appliquer également à la quadrature des ſurfaces des conoïdes hyperboliques et elliptiques.

En effet, la nouvelle méthode apprenait à réduire la quadrature de la ſurface de révolution engendrée par une courbe méridienne donnée à la quadrature d'une courbe plane. Lorſque la première courbe était une parabole, la courbe adjointe l'était également [3]); lorſqu'elle était une hyperbole ou une ellipſe l'adjointe était, dans le premier cas une hyperbole [4]), dans le ſecond, ſelon les circonſtances, une hyperbole [5]) ou une ellipſe [6]). Cela ſignifiait qu'on pouvait réduire la détermination du rayon d'un cercle dont l'aire eſt égale à celle de la ſurface d'un conoïde hyperbolique ou elliptique, ou bien à la quadrature de l'hyperbole et, par conſéquent, auſſi à la rectification de la parabole, ou bien à la quadrature du cercle. C'était là une invention importante qui valait la peine d'être pourſuivie en détail. Et, en effet, Huygens réuſſit bientôt à trouver des conſtructions très élégantes pour le rayon de ce cercle d'aire égale [7]).

Évidemment ces nouvelles découvertes méritaient d'être inſérées dans le traité que Huygens avait projeté. Mais une difficulté ſe préſenta. Juſqu' ici, en rédigeant ſes ouvrages géométriques, Huygens avait toujours ſuivi ſcrupuleuſement dans ſes démonſtrations la méthode des anciens de laquelle il donne, dans une annotation de 1659 [8]), une analyſe, remarquable par ſa généralité. Or, pour appliquer cette méthode on devait circonſcrire aux grandeurs en queſtion (longueurs, aires ou volumes) d'autres qui ne les ſurpaſſent que d'une quantité

---

[1]) Voir la note 4 de la p. 235 et la note 2 de la p. 236.
[2]) Voir la p. 314.
[3]) Voir le § 1 de la pièce N.° X, p. 314.
[4]) Voir le § 2, p. 315—316.
[5]) Voir le § 3, p. 317—319.
[6]) Voir le § 4, p. 320—324. Le cas intermédiaire est celui où la courbe méridienne est un cercle auquel cas la courbe adjointe est formée par deux droites parallèles.
[7]) Voir les pp. 319, 323 et 336.
[8]) Voir le premier alinéa de la p. 338.

auſſi petite qu'on le veut, et on devait prouver rigoureuſement qu'il en eſt ainſi, en partant de postulats bien définis[9]). Par des artifices ſouvent très ingénieux [10]), Huygens avait réuſſi juſqu' à préſent à ſatisfaire à ces exigences, mais il prévoyait que pour les réſultats nouvellement obtenus cela demanderait un travail très pénible et d'une valeur douteuſe. Il ſe décida donc à une ſorte de compromis [11]); c'eſt-à-dire il réſolut de ſe ſervir quelquefois des „indiviſibles" [12]), ſe bornant en ce cas à fournir non pas une démonſtration rigoureuſe, mais ſeulement „le fondement d'une telle démonſtration, de ſorte qu'apres l'avoir examiné ceux qui s'y connaiſſent ne ſauraient douter de la poſſibilité d'une démonſtration rigoureuſe". Toutefois il ne changera pas les parties qu'il a déjà rédigées [13]). Elles pourront „ſervir de preuve et en quelque ſorte d'exemple pour montrer que les autres parties auraient pu être arrangées de la même façon [14])".

---

[9]) Dans ses recherches sur les longueurs des lignes courbes et les aires des surfaces courbes, Huygens se sert constamment des postulats d'Archimède sur les courbes qui ont les mêmes points terminaux, et les surfaces qui se terminent à un même contour. On trouve ces postulats dans les notes 5 des pp. 237 et 255. Certes, les mathématiciens modernes n'acceptent pas volontiers des postulats si compliqués. Ils les réduisent à de plus simples. Mais on n'en admire pas moins ce qu'Archimède et d'autres ont bâti sur ces fondements.

[10]) Voir par exemple le „Lemme II," p. 247 où Huygens démontre que les segments successifs GHA, etc. de l'Hyperbole de la Fig. 9 deviennent de plus en plus petits à mesure qu'on s'éloigne du sommet A.

[11]) Voir la p. 337.

[12]) On peut consulter sur l'opinion de Huygens concernant la méthode des indivisibles de Cavalieri les pp. 131, 561, 132 et 133 du T. I.

[13]) Outre les p. 237—270, qui traitent de la rectification de la parabole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique, Huygens avait probablement en vue les parties les plus élaborées de la Pièce N°. VIII et de ses deux Appendices (p. 273—293) qui traitent des paraboles et des hyperboles de divers degrés.

[14]) Voici, en entier, la traduction de l'annotation latine de la p. 337, d'où nous avons cité ces passages: „Quelquefois par les indivisibles. Mais on se trompe, lorsqu'on veut faire passer leur emploi pour une démonstration. D'ailleurs, pour convaincre ceux qui s'y connaissent il revient presque au même de donner une démonstration formelle ou bien le fondement d'une telle démonstration, de sorte, qu'après l'avoir examiné, ils ne sauraient douter de la possibilité d'une démonstration rigoureuse. J'avoue, il est vrai, que c'est aussi à la façon de donner à cette dernière une forme convenable afin qu'elle soit claire, élégante, et plus appropriée que toute autre, qu'on reconnaît la science et la sagacité de l'auteur, comme dans toutes les œuvres d'Archimède. Néanmoins, ce qui vient en premier lieu, et ce qui importe surtout, c'est la manière même dont l'invention a été obtenue. C'est cette connaissance qui réjouit le plus et qu'on demande aux savants. Il semble donc préférable de suivre la méthode par laquelle elle est aperçue le plus vite et le plus clairement, et comme posée devant les yeux. Nous nous épargnons ainsi du travail en écrivant, et les autres en lisant; il faut consi-

Conformément à ces intentions Huygens rédigea la partie du traité projeté qui ſe rapporte à l'étude détaillée des courbes adjointes de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipſe [1]). Enſuite il ceſſa de s'en occuper; probablement parce que la première ardeur de l'invention était paſſée et qu'il était attiré par d'autres travaux [2]). Enfin, en 1673, il ſe contenta de donner dans ſon „Horologium oſcillatorium" [3]) les principaux réſultats qu'il avait obtenus, ſans y joindre de démonſtrations; ce qu'il jugea alors d'autant moins néceſſaire que Wallis avait publié dans ſes „Tractatus duo" de 1659, les quadratures de ſurfaces courbes de conoïdes avec les déductions [4]).

Nous n'avons pas encore parlé de la deuxième Partie (p. 324—334) de la Pièce N.° X; elle occupe une place à part dans les recherches de Huygens ſur la quadrature des ſurfaces des conoïdes hyperboliques et elliptiques.

Soit, afin d'en montrer la portée, h_1 la hauteur, S_1 l'aire de la ſurface courbe d'un conoïde elliptique découpé d'un ſphéroïde aplati dont $2a_1$ eſt le plus grand axe et $2b_1$ le plus petit, qui eſt l'axe de révolution; ſoit de plus h_2 la hauteur d'un

---

dérer, en effet, que les savants finiront par ne plus trouver le temps de prendre connaissance de la grande quantité des inventions des Géomètres (quantité qui va en croissant de jour en jour et qui semble dans cet âge de science devoir prendre des développements immenses) si les auteurs continuent à se servir de la méthode prolixe et rigoureuse des anciens.

Dans les parties précédentes, qui furent déjà rédigées autrefois, nous avons pourtant conservé cette méthode; elles peuvent servir de preuve et en quelque sorte d'exemple pour montrer que les autres parties auraient pu être arrangées de la même façon".

Il est intérressant de comparer cette annotation de Huygens à la préface du „Traité de la Méthode" d'Archimède, découvert en 1906 par Heiberg; voir les p. 426—431 du Vol. 2 de l'ouvrage: „Archimedis Opera omnia iterum edidit J. L. Heiberg, 1910—1913, Lipsiæ, Teubner.

[1]) Voir les p. 338—346.

[2]) Dans la même année 1658 Huygens publia son „Horologium" et prépara le „Systema Saturnium". Comparez encore sa lettre à Kinner à Löwenthurn du 30 octobre 1659 (p. 503 du T. II) et celle à Léopoldo de Medicis du 19 novembre 1667 (p. 162 du T. VI).

[3]) Consultez les p. 73—79 de l'édition originale.

[4]) Voir l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 518 du T. II. On trouve les quadratures en question aux pp. 555—556 et 558—559 du „Volumen primum" des „Opera mathematica" de Wallis, „Oxoniæ, 1695. E Theatro Sheldoniano". Remarquons que la méthode de Wallis est beaucoup plus compliquée que celle des courbes adjointes, suivie par Huygens, et que ses résultats sont formulés tout autrement que ceux de Huygens.

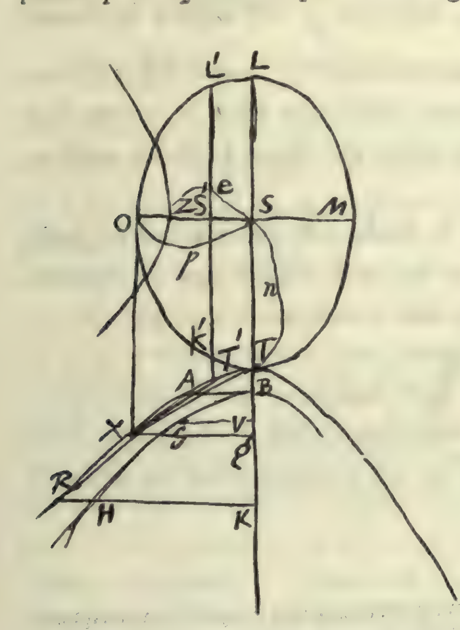
conoïde hyperbolique, S_2 l'aire de ſa ſurface courbe appartenant à un hyperboloïde dont $2a_2$ eſt l'axe réel et de révolution, et $2b_2$ l'axe imaginaire.

Poſons encore $x_1 = b_1 - h_1$; $c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$; $x_2 = a_2 + h_2$; $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2$. On a alors:

$$S_1 = \pi\left[a_1^2 - \frac{a_1 x_1}{b_1^2}\sqrt{c_1^2 x_1^2 + b_1^4} - \frac{a_1 b_1^2}{c_1}\,\mathrm{l.}\,\frac{c_1 x_1 + \sqrt{c_1^2 x_1^2 + b_1^4}}{b_1(c_1 + a_1)}\right],$$

$$S_2 = \pi\left[\frac{b_2 x_2}{a_2^2}\sqrt{c_2^2 x_2^2 - a_2^4} - b_2^2 + \frac{a_2^2 b_2}{c_2}\,\mathrm{l.}\,\frac{c_2 x_2 - \sqrt{c_2^2 x_2^2 - a_2^4}}{a_2(c_2 - b_2)}\right].$$

Si l'on prend la ſomme $S_1 + S_2$ de ces expreſſions, il eſt évident que dans certains cas les termes logarithmiques peuvent diſparaître, de ſorte que l'expreſſion pour $S_1 + S_2$ devient purement algébrique.



Or, dans la Partie qui nous occupe, Huygens a réuſſi à découvrir un de ces cas par des raiſonnements géométriques. Pour y parvenir, il ſuppoſe en premier lieu que la courbe méridienne LOTM [5]) du ſphéroïde aplati, de révolution autour de OM, et celle HGB du conoïde hyperbolique, de révolution autour de TK, poſſèdent la même courbe adjointe RXT.

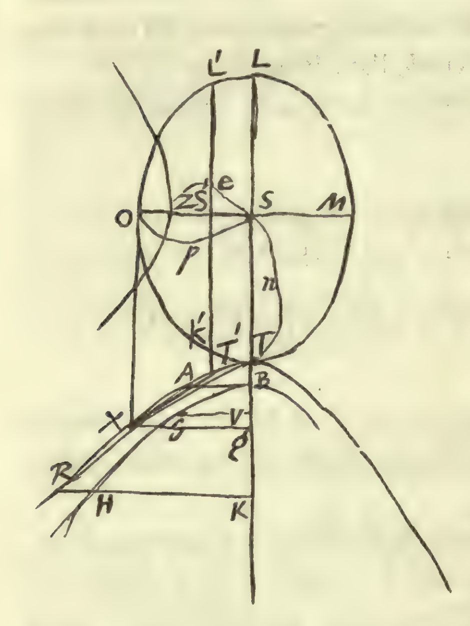
Dans nos notations cela conduit aux relations:

$$a_1 = \frac{a_2^2}{c_2}, \quad \frac{b_1^2}{c_1} = b_2,$$

et l'on remarquera que ces relations amènent l'égalité des coefficients $\frac{a_1 b_1^2}{c_1}$ et $\frac{a_2^2 b_2}{c_2}$ des termes logarithmiques dans les expreſſions pour S_1 et S_2.

Enſuite Huygens emploie une conſtruction que nous allons expliquer. Conſi-

[5]) La figure à côté correspond à la Fig. 8, p. 324, de Huygens; mais nous y avons ajouté la ligne XT' et la ligne L'S'K'T' qui se termine au point T' de l'hyperbole TR et qui coupe l'ellipse LL'OT au point K'.



dérons à cet effet le conoïde correſpondant au ſegment OL′K′O. Sa ſurface courbe eſt égale à l'eſpace mixtiligne OXAT′S′O multiplié par 2π. De même la ſurface courbe du conoïde hyperbolique engendré par HGBK eſt égale à l'eſpace KRXABK multiplié également par 2π. Or, le premier de ces eſpaces eſt égal à un trapèze *moins* le ſegment hyperbolique XAT′X, et le ſecond à un trapèze *plus* le ſegment RXAR. On peut donc, lorque ces ſegments ſont égaux, conſtruire avec la règle et le compas une ligne ρ, telle que $\frac{1}{2}\rho^2$ eſt égal à la ſomme des eſpaces OXAT′S′O et KRXABK, et cette ligne conſtituera alors le rayon d'un cercle dont l'aire eſt égale à la ſomme des aires des deux ſurfaces courbes conoïdales.

Tout dépend ainſi de la conſtruction de la corde AR qui, partant du point donné A, découpe de l'hyperbole TT′AXR un ſegment ARXA égal au ſegment donné T′AXT′; conſtruction que Huygens apprend à exécuter à la p. 327 [1]).

C'eſt là en principe la découverte de Huygens; mais il reſte à dire 1° qu'il ſe borne au cas du demi-ſphéroïde LOTL, 2° qu'il remplace vers la fin ce demi-ſphéroïde par un ſphéroïde entier dont les axes ſont à ceux du demi-ſphéroïde comme 1 à $\sqrt{2}$ [2]), 3° qu'il s'occupe ſurtout du cas particulier où les points X et A de la préſente figure coïncident [3]).

---

[1]) Voir le „Problema I" de la p. 327. La construction est basée sur une propriété remarquable de l'hyperbole qui semble un peu oubliée aujourd'hui mais qui était connue à Grégoire de St. Vincent, comme cela résulte de la Prop. CXXIII, p. 593, de son „Opus geometricum"; ouvrage cité dans la note 6, p. 53 du T. I. Toutefois on cherchera vainement dans cet ouvrage la démonstration de cette propriété, sur laquelle on peut consulter la note 7 de la p. 326.

[2]) Voir la Fig. 13 de la p. 330.

[3]) Ce cas est traité dans le § 2 de la deuxième Partie de la Pièce N°. X (p. 329—334). Dans ce cas la construction se simplifie notablement.

[4]) Voir plus haut à la p. 193.

[5]) Voir les p. 76—77 de l'édition originale.

Ce cas exige BS = OX, c'eſt-à-dire $a_2 = \frac{a_1^2}{b_1}$. Combinée avec $b_2 = \frac{b_1^2}{c_1}$ et avec $a_1 = \frac{a_2^2}{c_2}$ [4]), cette relation nous donne:

$$a_2^2 + b_2^2 = \frac{a_1^4}{b_1^2} + \frac{b_1^4}{c_1^2} = c_2^2 = \frac{a_2^4}{a_1^2} = \frac{a_1^6}{b_1^4},$$

ou bien:

$$a_1^4 b_1^2 c_1^2 + b_1^8 = a_1^6 c_1^2,$$

ou enfin:

$$b_1^8 = a_1^4 c_1^4.$$

De cette derniere équation on déduit $b_1^4 = a_1^4 - a_1^2 b_1^2$; ce qui donne $b_1^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})a_1^2$.

Si l'on écrit cette dernière équation ſous la forme: $\frac{b_1^2}{a_1} = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})a_1$, elle nous dit que le „latus rectum" de l'ellipſe LOTM (par rapport à l'axe LT) eſt le plus grand ſegment de cet axe diviſé en extrême et moyenne raiſon; réſultat dont Huygens ne manqua pas de faire mention dans l'„Horologium oſcillatorium" [5]).

Ajoutons encore, avant de paſſer à d'autres ſujets, que déjà le 15 février 1658 [6]), Huygens donna à de Sluſe un aperçu de ſes nouvelles découvertes, y compriſe celle que nous venons d'expliquer. Il fit ſuivre cet aperçu le 26 février [7]) par une deſcription des constructions qui ſervent à la quadrature des ſphéroïdes avec la recommandation de ne pas les montrer à d'autres perſonnes. Toutefois, l'année ſuivante, il réſolut de faire „connaître partout" ſon théorème ſur la rectification de la parabole [8]). Il le fit, en effet, en y joignant ſes inventions ſur la quadrature des ſurfaces des conoïdes et ſphéroïdes, en janvier et février 1659, à de Carcavy, à Wallis, à Paſcal, à van Schooten et à Boulliau [9]) et, encore, en ſeptembre et octobre 1659, à Grégoire de St. Vincent et à Kinner à Löwen-

[6]) Voir la p. 134 du T. II.
[7]) Voir la p. 141 du T. II.
[8]) Comparez sa lettre à de Sluse du 14 janvier 1659, p. 313 du T. II.
[9]) Voir les pp. 316, 330, 341, 344 et 366 du T. II.

thurn [1]). Évidemment Huygens croyait avoir trouvé ainſi le moyen le plus efficace de ſe réſerver la priorité de ſes découvertes, en attendant qu'il aurait le loiſir de les publier. Auſſi fait-il un appel, dans l'„Horologium oſcillatorium" [2]), à ſa correſpondance avec de Sluſe, Paſcal, Wallis et d'autres pour conſtater cette priorité.

Nous avons déjà vu quel a été l'effet de la communication à Wallis [3]). Paſcal loua beaucoup les inventions de Huygens dans une lettre à de Carcavy [4]) et dans la „Lettre de A. Dettonville a Monſieur Hugguens de Zulichem" [5]) qu'il publia en février 1659. En même temps il fit parvenir à Huygens une eſquiſſe de ſa méthode pour la ſolution du cas du conoïde parabolique, en y ajoutant que les cas du conoïde hyperbolique et des ſphéroïdes lui ſemblaient bien difficiles; „ainſy" pourſuivit-il „ie n'y penſeray pas ſeulement car ie ſuis perſuadé qu'il y a pluſtot du blame que de l'honneur a accquerir en trauaillant ſur les ouurages d'autruy et principalement quand ils ſont traittez par des perſonnes excellentes comme Monſieur Hugguens" [6]).

À Fermat Huygens avait ſeulement fait demander par l'intermédiaire de de Carcavy [7]) ſi ſa méthode s'étendait à trouver la dimenſion des ſurfaces courbes des conoïdes et des ſphéroïdes. Fermat répondit affirmativement et afin que Huygens n'en pût douter il donna quelques indications ſur les réſultats, aſſurant qu'il les avait obtenus ſans connaître ceux de Huygens [8]). Il ajouta qu'il avait trouvé de même la quadrature de la ſurface courbe engendrée par la révolution d'une parabole autour de ſon appliquée [9]); ſavoir qu'elle ſe réduit à la quadrature de l'hyperbole.

---

1) Voir les pp. 485 et 500—503 du T. II.
2) Voir les p. 72—73 de l'édition originale.
3) Voir le premier alinea de la p. 192.
4) Voir la p. 348 du T. II où la p. 182 du T. 9 des „Œuvres de Blaise Pascal publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introductions et notes par Léon Brunschvigg et Pierre Boutroux, Paris, Hachette, 14 vol., 1908—1914". On y lit: „Pour ces autres problemes touchant la dimension des surfaces des conoides Je les admire au dela de tout ce que ie puis vous dire, ce sont certainement d'admirablement belles choses".
5) Voir les p. 396—397 du T. II, ou la p. 189 du T. 9 des „Œuvres" de Pascal. Il s'agit de l'ouvrage cité sous la lettre β dans la note 32 de la p. 307 du T. II.
6) Voir les p. 349—350 du T. II ou bien les p. 183—186 du T. 9 des „Œuvres" de Pascal.
7) Probablement dans la lettre de 4 septembre 1659, dont nous ne possédons que le sommaire; voir la p. 474 du T. II.
8) Voir les p. 539—540 du T. II.
9) Comme p. e. la parabole ABC de la Fig. 7 de la p. 244 autour de la corde AC.

À ce propos Huygens écrivit à de Carcavy [10]) qu'il croyait bien que „Monſieur de Fermat n'avoit veu" aucune de ſes propoſitions „puis qu'il l'aſſure", mais que „d'autres peut eſtre ſeraient plus incredules, ſi en les donnant au public il n'allegue celuy a qui il les aie fait veoir auparavant. La meſure de la ſuperficie du conoide que fait la parabole autour de l'appliquée laquelle il promet en ſuppoſant la quadrature de l'hyperbole ſera quelque choſe de nouveau ſi elle eſt vraye".

En réponſe de Carcavy raſſura Huygens ſur les intentions de Fermat [11]) et lui fit parvenir [12]) de la part de celui-ci le réſultat de la quadrature en queſtion, laquelle fut trouvée „ſubtile" par Huygens qui pria de Carcavy d'exhorter Fermat à publier ſa méthode ſi elle était nouvelle [13]).

Recherches ſur les paraboles et hyperboles de divers degrés, ſur la conchoïde, la ciſſoïde et ſur d'autres courbes. Tangentes, quadratures, cubatures des ſolides de révolution, centres de gravité.

Nous ne dirons que peu de mots à propos des recherches qu'on trouve dans les Pièces N°. VIII et N°. IX [14]).

Dans la „Præfatio" du „Tractatus mechanicus" de Merſenne [15]) Huygens avait rencontré un grand nombre de réſultats concernant les tangentes et les quadratures des courbes $y^a = kx^b$, les cubatures des ſolides de révolution, engendrés par leurs ſegments, et les centres de gravité de ces ſegments [16]) et de ces ſolides; mais tout cela ſans démonſtrations ni déductions. Ces reſultats étaient dus, comme Merſenne l'aſſure, à deux ſavants qu'il ne nomme pas, mais dont l'un était probablement Roberval et l'autre certainement Fermat [17]).

Or, dans la Pièce N°. VIII, Huygens s'applique à verifier et à étendre ces

---

[10]) Voir ſa lettre du 26 février 1660 à la p. 27 du T. III.
[11]) Voir la lettre du 6 mars 1660 à la p. 38 du T. III.
[12]) Voir les pp. 85 et 88 du T III.
[13]) Voir ſa lettre du 15 juillet 1660 p. 97 du T. III. La quadrature est, en effet, très compliquée.
[14]) Voir les p. 273—313.
[15]) Voir l'ouvrage de 1644 que nous avons cité dans la note 6 de la p. 111 du T. II.
[16]) Aux cas où a est impair le contour de ces segments était complété à l'aide de la courbe symétrique par rapport à l'axe des x ($y^a = -kx^b$) voir p. e. la Fig. 2 de Huygens de la p. 274.
[17]) Comparez les p. 195—198 du T. I des „Œuvres de Fermat" citées dans la note 1, p. 3 du préſent Tome.

réfultats [1]), et auffi à en donner des démonftrations „Euclideo more" [2]). Il commence, à cet effet, par déterminer les tangentes des courbes prémentionnées qu'il appelle „paraboloïdes." Enfuite il emploie d'une manière ingénieufe les propriétés de ces tangentes pour obtenir les quadratures [3]) et les cubatures cherchées dont il fait déduire enfin la fituation des centres de gravité. Il réfume fes réfultats en fix règles [4]) dont les trois premières correfpondent exactement aux règles générales empruntées par Merfenne à Fermat qui, à ce qu'il paraît, était auffi en poffeffion des autres règles [5]).

Après donc avoir trouvé à fa fatisfaction les règles pour les „paraboloïdes", Huygens s'aperçut que fes raifonnements étaient applicables avec peu de modifications aux „hyperboloïdes", favoir aux courbes $x^b y^a = k$. Il étudia donc ces courbes et s'occupa furtout de ce qui les diftingue des „paraboloïdes", c'eft-à-dire des efpaces qui s'étendent jufqu'à l'infini entre les courbes et leurs asymptotes [6]).

Ajoutons encore que Huygens mentionne fes recherches fur les „paraboloïdes" et les „hyperboloïdes" dans l'„Horologium ofcillatorium", p. 90 de l'édition originale.

Les travaux de la Pièce N°. IX doivent pour la plupart leur origine à la correfpondance affidue qui eut lieu entre Huygens et de Slufe dans les années 1657 et 1658. Ils peuvent fervir à expliquer plufieurs paffages dans les lettres de Huygens à fon ami.

---

[1]) De sa lettre à Mersenne du 23 décembre 1646 (p. 557 du T. II) il résulte qu'alors Huygens avait déjà pris connaissance de la „Præfatio" et trouvé une partie des résultats dont nous traitons ici; mais il ne nous est rien resté de ce travail de jeunesse. Comparez les p. 4—5 de notre T. XI.

[2]) Voir, p. 115 du T. 2, sa lettre à de Sluse du 3 janvier 1658, où on lit: „Sed et quadraturas omnium, et solidorum ex conversionibus ipsarum ortorum ad cylindros relationem eodem Euclideo more deduxi, earumque omnium regularum quæ apud Mersennium in præfatione Mechanicorum leguntur scripsi demonstrationem".

[3]) On peut comparer, quant aux quadratures, la méthode de démonstration de Huygens du „Theorema II" (p. 285—287) à celle de Fermat, très différente, qui fut publiée en 1679, comme œuvre posthume, dans ses „Varia opera mathematica", ouvrage cité dans la note 1 de la p. 326 de notre T. I; voir les p. 255 – 266 du T. I des „Œuvres de Fermat", mentionnées dans la note 17 de la p. 197.

[4]) Voir les p. 280—282.

[5]) Mersenne ne donne pas les résultats qui correspondent à ces dernières règles; il dit seulement que le savant en question les avait obtenus. On ne les trouve pas non plus dans la lettre

D'abord [7]) les deux correfpondants s'occupent des „perles de de Slufe", favoir des courbes dont les équations font comprifes dans l'équation générale $y^p = kx^q(a-x)^r$. Ils les complètent, fi c'eft néceffaire, par leurs symétriques [8]) $y^p = -kx^q(a-x)^r$, afin d'obtenir des boucles fermées dont ils déterminent les tangentes, les points d'inflexion, les quadratures et les centres de gravité, comme auffi les cubatures de leurs folides de révolution. Enfuite c'eft le tour de la conchoïde [9]) et de la ciffoïde [10]). Quelquefois d'autres mathématiciens, van Schooten [11]), Hudde [12]), van Heuraet [13]), Wallis [14]) et Mylon [15]), participent à la difcuffion de ces mêmes fujets.

Ce qui intéreffe beaucoup Huygens et de Slufe, ce font ces efpaces dont nous avons déja parlé à propos des „hyperboloïdes", qui s'étendent à l'infini entre les courbes et leurs afymptotes et dont toutefois les aires, ou les volumes des folides de révolution, font parfois finis [16]). C'eft de Slufe qui donne à cet intérêt l'expreffion la plus pittorefque lorfqu'il fe vante de pouvoir donner la mefure d'un vafe de poids médiocre mais que, cependant, le plus grand glouton ne pourrait vider [17]).

---

de Fermat à Cavalieri où Mersenne avait puisé ses renseignements; voir les pages mentionnées dans la note 17 de la. p. 197.

Quant à l'autre savant dont les travaux sont mentionnés par Mersenne, il s'était borné au cas $b = 1$; mais, sous cette réserve, ses résultats s'étendent aux quatre premières règles de Huygens et à la construction des tangentes.

6) Voir l'Appendice II, p. 288—293; Fermat aussi, au lieu indiqué dans la note 3, donne la quadrature de ces „hyperboloïdes".

7) Voir les §§ 1 et 5 de la Pièce N°. IX, pp. 294—300 et 303—305.

8) Voir p. e. la Fig. 1 de la p. 294.

9) Voir le § 6, p. 306—309.

10) Voir le § 7, p. 309—312.

11) Voir les pp. 62, 73—75, 89, 94—95 et 353 du T. II.

12) Voir les p. 97—101 du T. II.

13) Voir les pp. 96—97 et 116 du T. II.

14) Voir les pp. 298—304 et 358—359 du T. II.

15) Voir les pp. 337—338 et 374 du T. II.

16) Voir, outre les pages du Tome présent citées dans les notes 9 et 10, les pp. 164, 168 et 212 du T. II. Nous relevons en particulier les deux manières ingénieuses dont Huygens démontre que l'aire de l'espace comprise entre la conchoïde et son asymptote est de grandeur infinie; voir les pp. 306 et 308—309.

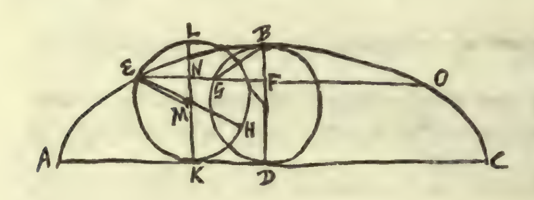
17) Voir les p. 167—168 du T. II, où l'on lit: „dici enim vix potest quam inuentis tuis delectatus sim, sed eo maxime quo spatium inter Asymptoton et Cissoidem (quando ita vocari jubes) meam, dimensus es. Non quod infinito spatio æquale finitum inveneris, (hoc enim iam sæpe factum est) sed quod ex inventis tuo meoque simul compositis, et centrum grauitatis et cylindroidis illius vasculj mensura, levj operâ deducatur, vasculi inquam, pondere

Remarquons encore l'importance que Huygens et de Slufe, et furtout ce dernier, attachent aux réductions à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. Chaque problème dont la folution amènerait en même temps une de fes quadratures eft appelé par de Slufe une „ἀπαγωγὴν"; et les nombreufes quadratures et cubatures de ce genre qui fe préfentent dans fa correfpondance avec Huygens, il les confidère principalement comme des „ἀπαγωγάς" plus ou moins intéreffantes [1]).

Recherches fur les propriétés géométriques de la cycloïde.

C'était le père Merfenne qui, comme fur tant d'autres fujets, fournit à Huygens, en 1646, les premiers renfeignements [2]) en partie inexacts [3]) fur des travaux exiftants concernant la cycloïde; mais ces communications ne femblent pas avoir donné lieu du côté du jeune Huygens à des recherches originales.

Il en fut autrement, lorfque, douze années plus tard, Boulliau lui envoya [4]) les deux lettres circulaires dans lefquelles Pafcal, fous le pfeudonyme Dettonville, propofa „à tous les géomètres de l'univers" les problèmes fuivants: Trouver l'aire d'un demi-fegment cycloïdal EBF [5]) et la fituation de fon centre de gravité, les volumes des folides engendrés par la révolution de ce fegment autour de BF et autour de EF, ainfi que



non magni, quod interim helluo nullus ebibat." Voici l'explication de ce passage: De Sluse avait donné le volume du solide engendré par la révolution de l'espace cissoïdal AR ∞QDA de la Fig. 22 de la p. 310 autour de l'asymptote DQ (voir sa lettre du 14 mars 1658, p. 151—152 du T. II, où il trouve ce volume égal à celui du solide engendré par la rotation du demi-cercle AGC de la figure de la p. 151 autour de sa tangente en A, puisqu'on a $AL \times LK = ML \times LC$). Huygens de son côté lui communiqua dans une lettre du 12 avril 1658 (p. 164 du T. II) la quadrature de ce même espace. De ces données on pouvait donc, à l'aide du théorème de Guldin, déduire la distance du centre de gravité à la droite DQ. Appliquant ensuite de nouveau le théorème de Guldin, on pouvait évaluer le volume, de grandeur finie, du solide engendré par la révolution de l'espace en question autour de l'axe AX. Or, c'est ce dernier solide qui forme la paroi duv ase de de Sluse.

Voir encore les p. 238—239 du T. IV où Huygens décrit une courbe à l'aide de laquelle on peut obtenir un autre vase possédant la même propriété.

[1]) Voir la p. 107 du T. II où de Sluse préfère l'ἀπαγωγὴν concernant la surface courbe du conoïde parabolique, réduite par Huygens à la quadrature du cercle, à toutes les siennes qui se rapportent à des aires planes; voir aussi les pp. 122, 132, 134, 135, 140, 144, 149, 151 et 154 du même Tome.

les centres de gravité de ces ſolides et auſſi des ſolides partiels qu'on obtient en les coupant par un plan paſſant par leur axe de révolution.

Paſcal, d'ailleurs, n'exigeait pas que tous les calculs fuſſent exécutés; il ſe contenterait, écrivit-il, de chaque ſolution qui établirait, ſoit à la manière des anciens, ſoit par la méthode des indiviſibles, comment on pourrait déterminer toutes les choſes demandées. Toutefois il réclamait la démonſtration complète, ou le calcul complet, dans les cas particuliers où le point F ſe confond avec le point D, ou avec le centre du cercle générateur BGD. Les prix ſeraient décernés à ceux qui, avant le 1er octobre 1658, auraient réſolu les queſtions propoſées [6]).

Enſuite dans ſa ſeconde lettre circulaire il avertit qu'il ſuffirait de calculer la ſituation du centre de gravité du ſolide engendré par une demi-révolution de l'eſpace ABD autour de la baſe AD [7]).

Huygens, ayant pris connaiſſance de ces problèmes, ne tarda pas à ſe mettre à l'œuvre. Il trouva d'abord l'aire BEF dans les deux cas particuliers ſignalés par Paſcal [8]). Enſuite il détermina l'aire du ſegment EBO dans le cas général [9]) et

---

[2]) Voir ses lettres du 13 octobre 1646 (p. 559 du T. I) et du 8 janvier 1647 (p. 52 du T. I).

[3]) L'indication de la situation du centre de gravité de l'espace de la cycloïde entière fut déjà corrigée sur place dans la note 2 de la p. 52 du T. I. L'expression qu'on trouve à la même page pour le volume du premier solide doit se rapporter au solide obtenu par la rotation autour de la tangente au sommet, et non pas à celui qu'on obtient (comme il y est dit) par la rotation autour de la base.

Ces deux données provenaient de Torricelli. Il les avait communiquées à Mersenne dans la forme exacte, puisqu'on les trouve dans cette forme aux dernières deux pages des „Ad lectorem monita" qui précèdent l'„Universæ Geometriæ Synopsis" dans l'ouvrage de Mersenne, cité dans la note 2 de la p. 34 du T. I. Quant à l'expression pour le volume engendré par la révolution de la cycloïde autour de son axe, elle est juste. Mersenne la devait à Roberval (voir à ce propos les p. 193—194 du T. 8 des „Œuvres de Blaise Pascal", citées dans la note 1 de la p. 196 du Tome présent). Comme on le verra plus loin (p. 204—205), cette cubature, trouvée par Roberval, est équivalente à l'un des problèmes que Huygens ne savait pas résoudre avant d'avoir pris connaissance des méthodes de Pascal.

[4]) Voir ses lettres du 28 juin et du 16 juillet 1658, pp. 186 et 196 du T. II.

[5]) Nous empruntons la figure à celle de Huygens de la p. 347 avec addition des lignes BG et FO.

[6]) Voir les p. 187—189 du T. II.

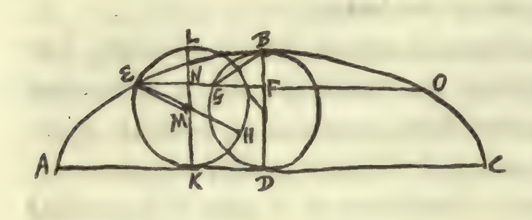
[7]) Voir les p. 196—197 du T. II.

[8]) Voir les §§ 1—3, p. 347—349.

[9]) Voir le § 4, p. 349—350.

26

découvrit à cette occafion un cas remarquable où ce fegment eft carrable fans fuppofer la quadrature du cercle [1]). Enfin il trouva, dans les deux cas particuliers, la diftance du centre de gravité du fegment EBO à fa bafe EO et en déduifit le volume du folide engendré par la révolution autour de cette bafe [2]).



Il put mander, à Boulliau, le 25 juillet 1658, qu'il avait obtenu ces réfultats [3]). Il ajouta qu'ayant manqué le refte, il ne pouvait afpirer au prix propofé par l'auteur; d'ailleurs les problèmes lui „femblent fi difficiles pour la plufpart, qu'il doubte fort fi celuy mefme qui les a propofez les pourroit tous refoudre".

Toutefois ces problèmes et furtout celui fignalé en particulier dans la feconde circulaire, ne lui laiffaient pas de repos. Il reprit donc ce dernier problème et il réuffit, en effet, par des artifices des plus ingénieux à déterminer la diftance du centre de gravité du folide en queftion au plan ABD [4]), de forte que pour connaître complètement la fituation du centre de gravité demandé il ne lui manqua plus que la diftance au plan décrit par BD [5]). Il communiqua à Boulliau [6]) ce réfultat qui était fauffé par des erreurs de calcul [7]), en ajoutant de nouveau qu'il croyait à peine „que tous les dits problemes eftoyent poffibles".

---

[1]) Voir les p. 350—351 et voici l'explication de ce cas particulier: Posant EM $= r$ (voir la figure du texte), $\angle$EML $= \varphi$, on trouve pour l'aire BEF : $r^2 \left[\varphi \left(\frac{1}{2} - \cos\varphi \right) + \sin\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]$. Dans le cas où $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ cette expression se réduit à $r^2 (\sin\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi) = \frac{3}{8} r^2 \sqrt{3}$, et l'on vérifie facilement que dans ce cas le demi-segment EBF est égal au triple du triangle BGF. C'est le cas découvert par Huygens à l'aide de considérations géométriques.

[2]) Voir le § 5, p. 353—356; au § 6, p. 356—357, Huygens traite encore avec succès le cas d'un segment quelconque EBO.

[3]) Voir les p. 200—201 du T. II.

En janvier 1659 les recherches de Huygens ſur la cycloïde reçurent une nouvelle impulſion. Paſcal lui avait fait parvenir ſon „Hiſtoria cycloidis" [8]). Il y mentionne la rectification de la cycloïde par Wren et propoſe quelques nouveaux problèmes relatifs au centre de gravité d'un arc cycloïdal, comme EBO, et aux dimenſions et centres de gravité des ſurfaces engendrées par la révolution d'un tel arc autour de ſa flèche ou de ſa corde [9]). Huygens admira beaucoup l'invention de Wren [10]), quoiqu'il ne fût pas encore ſi ſa rectification s'appliquait à un arc quelconque — ce qui était bien le cas [11]) — ou ſeulement à la cycloïde entière. Il réuſſit bientôt à retrouver le réſultat de Wren [12]) et à réſoudre le premier des nouveaux problèmes, ſavoir celui de déterminer le centre de gravité de l'arc EBO [13]). Il fut agréablement ſurpris [14]) par la ſimplicité du réſultat, indiquant que le centre de gravité de cet arc diviſe toujours la flèche BF dans la raiſon de 2 à 1.

Toutes ces dernières recherches partaient de la connaiſſance de la tangente à la cycloïde, qui, en tout point E, eſt parallèle à la corde BG. Huygens avait rencontré cette propriété dans l'édition de van Schooten de la „Geometria" de Deſcartes [15]), mais il n'était pas entièrement content de la manière dont elle y eſt déduite. Il s'appliqua donc à en donner une nouvelle démonſtration [16]) baſée ſur le poſtulat qu'une droite qui paſſe par un des points d'une courbe

---

4) Voir les §§ 1 et 2 de la Deuxième Partie de la Pièce N° XI, p. 358 —362.

5) Comme il le manda plus tard à Pascal, il ne pouvait trouver cette dernière distance „fauté de sçavoir le centre de gravité de certaines pieces de cylindre"; voir sa lettre du 5 février 1659, p. 341 du T. II.

6) Dans une lettre du 19 septembre 1658; voir la p. 220 du T. II.

7) Voir sur ces erreurs et leurs corrections la dernière ligne de la p. 362 et la note 1 de cette page.

8) Consultez les pp. 310 et 312 du T. II. Il s'agit de l'ouvrage cité dans la note 2 de la p. 276 du T. II.

9) Voir pour plus de détails la note 5 de la p. 363.

10) Voir la p. 330 du T. II.

11) Voir la p. 360 du T. II et la note 4 de la p. 367.

12) Voir les §§ 1 et 2 de la Troisième Partie de la Pièce N°. XI, p. 363—367.

13) Voir les §§ 3 et 4, p. 368—373.

14) Voir le deuxième alinéa de la p. 373.

15) Voir la note 3 de la p. 374.

16) Voir la Quatrième Partie de la Pièce N°. XI, p. 374—375.

eſt tangente à cette courbe lorſque les points de la courbe qui ſe trouvent de part et d'autre du point conſidéré et dans ſon voiſinage, ſont ſitués du même côté de la droite; poſtulat qu'il emploie ſouvent dans ces ſortes de démonſtrations [1]).

Quoique Paſcal tâchât de faire parvenir à Huygens auſſitôt qu'il lui fût poſſible [2]) la célèbre „Lettre de A. Dettonville à Monſieur de Carcavy ſuivie de traités de géométrie" [3]), publiée en décembre 1658, Huygens ne la reçut que le 8 mai 1659 [4]). Il y trouva, du moins en principe, la ſolution de tous les problèmes propoſés. En effet, dans la lettre elle-même et dans les traités qui l'accompagnent, Paſcal ſait ſe procurer, pour le cas ſpécial de la cycloïde, preſque toutes les reſſources, nommément l'intégration par parties, dont diſpoſe aujourd'hui le mathématicien moderne. Par ſuite, ſes méthodes ſont plus générales et plus puiſſantes que celles de Huygens, qui pour chaque nouveau problème devait chercher de nouveaux artifices; mais, comme Huygens s'exprime [5]) „il faut avouer que c'eſt un labyrinthe lors que l'on veut faire la conſtruction de quelque probleme, et pour cela je voudrois qu'il euſt partout pris ſeulement un cas le plus facile pour en donner le calcul tout du long et non ſeulement le dernier facit, ou bien un exemple a chaque Theoreme". C'eſt pourquoi Huygens choiſit, pour y appliquer la méthode de Paſcal, deux cas particuliers de l'un des problèmes qu'il n'avait pas pu réſoudre auparavant. Il envoya ſa ſolution du cas le plus compliqué à de Carcavy [6]), le priant de lui dire s'il avait „bien ſupputè". Quant à la ſolution de l'autre cas, nous la reproduiſons dans la Cinquième Partie de la Pièce N°. XI, p. 376 [7]). Par l'application du théorème de Guldin on en déduit facilement la

---

[1]) Comparez les pp. 273—276, 284—285, 375 et 397—398.

[2]) Voir sur les causes du retard les pp. 310, 320, 364, 374, 376, 378, 379, 381, 383, 389, 390 et 396 du T. II.

[3]) Voir dans les „Œuvres de Blaise Pascal", publiées par Brunschvicg et Boutroux, les p. 325—384 du T. 8 et les p. 1—133 du T. 9.

[4]) Voir la p. 402 du T. II.

[5]) Voir sa lettre à Carcavy du 22 mai 1659, p. 411 du T. II. On peut encore consulter sur l'opinion de Huygens concernant l'ouvrage de Pascal les pp. 416, 418, 435 et 474.

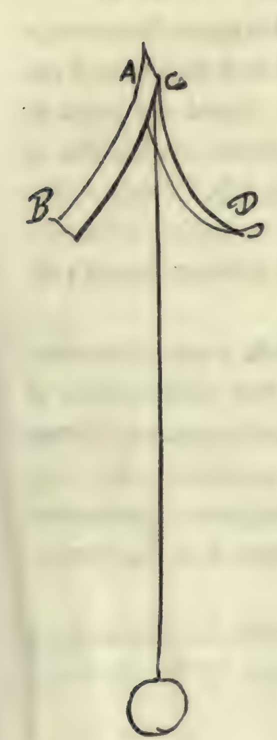
[6]) Voir la p. 411 du T. II.

[7]) Voir encore, aux p. 377—378, l'Appendice daté de 1691, où Huygens s'occupe du même cas, pour le traiter avec la méthode exposée par Wallis dans le traité „De cycloïde" dont nous allons parler.

cubature trouvée par Roberval [8]) déjà avant 1646 et mentionnée par nous dans la note 3 de la p. 201. Encore en août 1693, Huygens témoigna à de la Hire de ſon admiration pour cette invention de Roberval [9]).

Ajoutons que vers le commencement de mars 1660 Huygens reçut [10]) le traité „De cycloide" de Wallis [11]), où celui-ci réſoud les problèmes de Paſcal à l'aide des méthodes de l'„Arithmetica infinitorum" [12]). Wallis s'y plaint violemment des procédés de Paſcal. Dans la polémique qui s'enſuivit, Huygens, ſans y prendre une part active, ſervit d'intermédiaire entre Wallis et de Carcavy [13]).

Théorie des développées et des courbes parallèles.



À propos des recherches ſur la cycloïde, dont nous venons de traiter, nous avons dû conſtater une certaine infériorité des méthodes de Huygens, comparées à celles de Paſcal et de Wallis. Par ſes travaux ſur la théorie des développées, Huygens a pris, pour ainſi dire, une revanche éclatante. En effet, en développant cette théorie, il a ajouté à l'analyſe des courbes planes un chapitre intéreſſant et beau dont la priorité lui appartient ſans conteſtation.

Il faut en chercher l'origine dans l'emploi des petits arcs BA et CD [14]) que Huygens appliqua en 1658 à ſes horloges à pendule afin de rendre la période des oſcillations indépendante de leur largeur. Il eſt clair que ces arcs ſont

---

[8]) Les travaux de Roberval sur la cycloïde ne parurent qu'après son décès dans les „Divers ouvrages de Mathématique et de Physique" de 1693; voir les p. 246—278 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 de notre T. IX.

[9]) Voir la p. 486 du T. X.

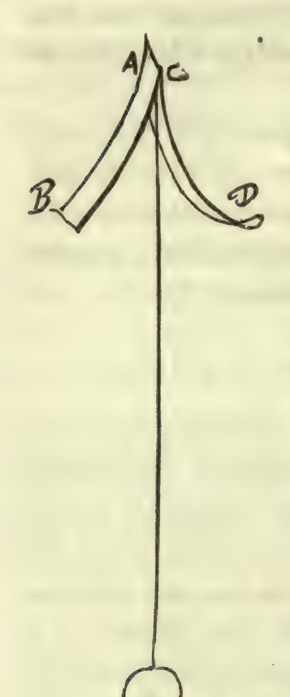
[10]) Voir la p. 56 du T. III.

[11]) Voir l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 518 du T. II.

[12]) Voir l'ouvrage cité dans la note 2 de la p. 340 du T. I. Il fut reproduit aux p. 355—478 du „Volumen primum" des „Opera mathematica" de Wallis.

[13]) Voir les pp. 56—58, 86—87, 96, 97 et 126—127 du T. III. Cette partie de la Correspondance de Huygens a été pleinement utilisée par les éditeurs des „Œuvres de Blaise Pascal" dans leur introduction au „Recit de l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix" de Pascal (voir les p. 233—240 du T. 8 de ces „Œuvres").

[14]) Nous empruntons la figure à la lettre de Huygens à Petit du 1 novembre 1658; voir la p. 271 du T. II.



avec la courbe décrite par la maſſe pesante dans la relation d'une développée à ſa développante.

D'abord c'était à l'expérience que Huygens demanda „de quelle maniere et combien" il devait „les plier pour eſgaler entre eux les coups des plus larges juſqu'aux plus menus". Il y réuſſit ſi bien avec „deux Horologes de cette façon, qu'en trois jours il n'y euſt jamais entre elles la difference d'autant de ſecondes: quoyque cependant" il en changeât „ſouvent les poids, les rendant plus ou moins peſants" [1]).

C'est au 1 décembre 1659 [2]) que Huygens découvrit le tautochroniſme de la cycloïde, et déjà le 6 décembre il put écrire à van Schooten [3]) qu'il avait trouvé ces jours ce qu'il n'avait jamais eſpéré de connaître, c'eſt-à-dire la forme exacte qu'il faut donner aux arcs AB, CD afin d'égaliſer abſolument les oſcillations. Cette invention lui ſembla la plus heureuſe de toutes celles qui ſe ſoient jamais préſentées à lui [4]).

Ayant trouvé une méthode générale pour déterminer la développée d'une courbe donnée, Huygens l'appliqua non ſeulement à la cycloïde [5]), mais auſſi aux coniques et aux paraboles et hyperboles de divers degrés. Dans la Pièce N°. XV nous avons reproduit ſes recherches de 1659 ſur les développées de l'ellipſe et de l'hyperbole [6]). Elles nous apprennent comment Huygens a obtenu les réſultats qui ſont mentionnés dans l'„Horologium oſcillatorium" ſans qu'on y trouve leur déduction [7]).

Nous faiſons ſuivre dans la même Pièce la théorie générale des développées telle qu'elle fut inventée par Huygens dans cette même année [8]). L'expoſition

---

[1]) Voir la lettre citée dans la note précédente.

[2]) C'est la date annotée sur une feuille séparée où Huygens expose sa découverte.

[3]) Voir la p. 522 du T. II.

[4]) Voir encore sur la nouvelle invention ses lettres de janvier 1660 à Tacquet, Chapelain et Boulliau (pp. 3, 12 et 13 du T. III). Dès janvier 1660 Huygens se proposait de la faire paraître dans une seconde édition de son „Horologium" (voir les pp. 13, 25, 44, et 57 du T. III); plus tard il la destinait à son „Horologium oscillatorium" qui parut en 1673 (voir les p. 10—11 de l'édition originale).

s'écarte en plusieurs points de celle qu'il donna plus tard dans l'„Horologium oscillatorium" [9]). Elle en diffère surtout en ce qu'elle est accompagnée de considérations sur les courbes parallèles et équidistantes, qui manquent entièrement dans cet ouvrage.

Disons encore que dans le manuscrit dont nous avons emprunté la Pièce N°. XV on trouve aussi quelques calculs incomplets sur les développées des paraboles et hyperboles de divers degrés qui montrent que les résultats qui se rapportent à ces courbes dans l'„Horologium oscillatorium" [10]), furent découverts eux aussi en cette année 1659.

---

5) Voir sur l'application à cette courbe la note 1 de la p. 404 et les p. 66—69 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium".

6) Voir les p. 387—397.

7) Voir la Prop. X de la „Pars tertia", p. 79—81 de l'édition originale.

8) Voir les p. 397—403.

9) Voir les p. 59—65 de l'édition originale.

10) Voir les p. 85—90.

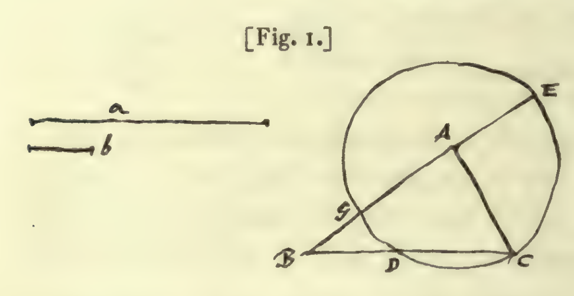
I[1].

1655.

18 Jun. 1655. Propofitum à D. de Wit. Penf.o [2]).

Data fumma laterum trianguli rectanguli ∞ a et differentia fegmentorum bafis ∞ b invenire triangulum.

[Fig. 1.]



Efto id triang. ABC, et radio AC defcribatur circulus CDE, et producatur BA in E.

Eft igitur BE ∞ a; BD ∞ b [3]).

Sit BC ∞ x.

$$\text{BE}(a) \text{———} \text{BC}(x) \text{———} \text{BD}(b) \text{———} \text{BG}\left(\frac{bx}{a}\right).$$

$$\text{Ergo } \frac{a-\frac{bx}{a}}{2} \text{ AC} \infty \text{ AG et } \frac{a+\frac{bx}{a}}{2} \text{ AB.}$$

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 178 du Manuscrit N°. 12 mentionné dans la note 1, T. XI, p. 7.

[2]) Il s'agit du célèbre Pensionnaire de Hollande et de West-Frise; voir la note 6 de la p. 347 du T. I.

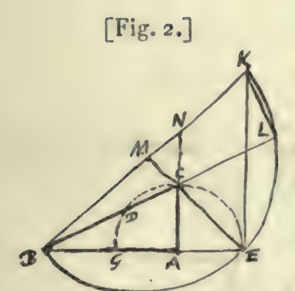
[3]) En effet, si du point A on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AF, il est évident qu'on a BD = BF — DF = BF — FC = b.

$$\left.\begin{array}{l} aa - 2bx + \frac{bbxx}{aa} [\infty] 4q.AC \\ aa + 2bx + \frac{bbxx}{aa} [\infty] 4q.AB \end{array}\right\} a[dditur].$$

$$xx \infty \frac{2aa + \frac{2bbxx}{aa}}{4} [\infty] q.BC$$

$$xx \infty \frac{a^4}{2aa - bb}$$

Conſtructio [4]).



[Fig. 2.]

Sint BE et EK ſing.æ ∞ a, invicemque ad rectos angulos et junctâ BK deſcribatur ſupra ipſam ſemicirculus BEK. accipiatur KL ∞ b et ducatur LB, denique ex centro ducatur ME ſecans LB in C, ſitque CA perpend. BE. Dico triang. CAB eſſe qui quærebatur.

Demonſtr. [5]) Ex conſtr. enim rectangulum eſt △BAC. Sed et latera BA et AC æquari ſimul ipſi BE, perſpicuum eſt. Itaque oſtendere tantum opus eſt differentiam ſegmentorum baſis, BD, (deſcriptâ nimirum circumf.a CG radio AC) æqualem eſſe datæ KL. Produc. AC in N. BK ad KL ut BC ad CM et permut. BK ad BC ut KL ad CM, ſed BE ad BK ut CM ad CN. Ergo ex æquali in prop. perturbata [6]) erit BE ad BC ut KL ad CN h. e. GB. Sed ut EB ad BC ita quoque DB ad BG. Ergo DB ∞ KL. q. er. dem.

---

[4]) La construction qui va suivre donne successivement $BK^2 = 2a^2$, $BL^2 = 2a^2 - b^2$, $BL^2(2a^2 - b^2) : MB^2\left(\frac{1}{2}a^2\right) = BK^2(2a^2) : BC^2\left(x^2 = \frac{a^4}{2a^2 - b^2}\right)$, tandis que la somme des côtés de l'angle droit du triangle BCA est égale à a. Elle est donc fondée, en effet, sur l'analyse qui précède.

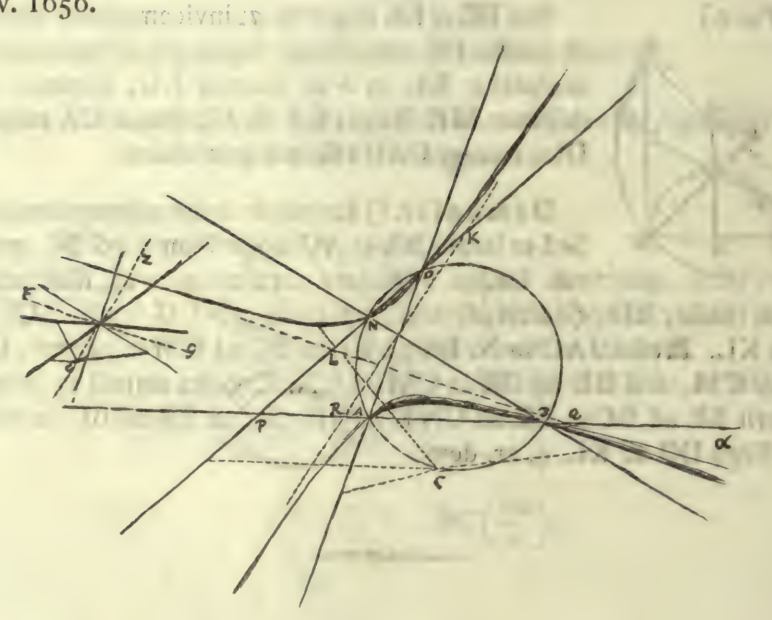
[5]) Il s'agit maintenant de justifier par une démonstration synthétique à la mode des anciens la construction déduite à l'aide de l'analyse.

[6]) Consultez la note 22 de la p. 304 du T. XI. Pour les quantités a, b, c de cette note on doit prendre ici BE, BK et BC, et pour les quantités d, e, f: KL, CM et CN.

II [1].

1656.

30 Nov. 1656.



[1]) Dans cette Pièce, écrite sur une feuille détachée, il s'agit de construire les asymptotes d'une hyperbole qui constitue une solution du problème de Pappus „proposé en quatre lignes", dont Descartes s'est occupé dans le premier et le second Livre de sa Géométrie (voir les pp. 377—387 et 396—411 du T. VI de l'édition récente d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes). On y demande de trouver le lieu d'un point C (voir la grande figure) pour lequel le rectangle sur les lignes tirées dans des directions données jusqu'à leurs intersections avec les droites AO et BN est égal ou dans un rapport donné au rectangle sur d'autres lignes de directions données tirées vers les droites AB et NO.

Roberval avait fait remarquer à Huygens dans sa lettre du 6 juillet 1656 (voir la p. 450 de notre T. I) que ce lieu comprend deux sections coniques à la fois, comme ici le cercle et

ducantur positione datis lineis [2]) parallelæ 4, in uno et eodem puncto sese intersecantes [3]). Et inveniatur locus puncti **c** [4]), ex quo in eisdem angulis datis ductæ faciant idem quod hic præscribitur. Erit locus puncti **c** in duabus rectis **c**Z, FG quibus sciendum est asymptotas hyperbolarum hic parallelas esse debere. Et constat puncta 4. A, B, N, O esse in ipsis hyperbolis. Oportet igitur sic ordinare asymptotas dictis lineis parallelas ut LN sit æqu. OK et RA æqu. BQ.

Sit PR ∞ x; PN ∞ a; PO ∞ b; PA ∞ c; PB ∞ d. Ratio RP ad PK data est. Sit ut a ad p. Similiter ratio LP ad PQ data est quæ sit ut q ad a.

$$\text{fiet } x \infty \frac{aa + ab - dq - cq}{p - q}$$

l'hyperbole qui passent par les points A, B, N et O. Cette remarque donna lieu à une correspondance entre Huygens et van Schooten, qu'on trouve aux pp. 460—462, 466—470 et 519—524 du T. I. C'est à cette occasion que Huygens composa la présente Pièce.

Outre cette construction on trouve sur la même feuille des calculs et des figures qui ont servi à préparer la lettre à van Schooten du 6 décembre 1656, p. 519—524 du T. I. Il n'a pas semblé nécessaire de les reproduire.

[2]) C'est-à-dire les quatre lignes AO, BN, AB et NO.

[3]) Voir la petite figure à gauche de la grande.

[4]) Voir la lettre **c** (difficilement lisible) de la petite figure.

III [1].

1657 [2].

§ 1.

Numero dato invenire quadratum cui additus ſummam faciat quadratum.

a, num. dat. xx quadr. quæſitum.

$a + xx \infty yy$ quadratum effectum.

$a \infty yy - xx$. Quod ſi itaque y et x tales aſſumantur ut additi æquent a, differentia vero ſcilicet $y - x$ æquetur unitati; multiplicando ſimul ſummam ipſorum $y + x$ et differentiam $y - x$ productum erit $yy - xx$ ipſi a æquale. eſtque $yy - xx$ differentia duorum quadratorum. Quare ſic aſſumpti numeri propoſitum efficient. Sit $a \infty 19$. Itaque 10 et 9 erunt y et x nam additi faciunt 19. differunt vero unitate.

81 qu.9; 19 ∞ a, 100 qu.10.

Quoties autem a primus numerus datur, apparet non niſi unum inveniri poſſe quadratum idque ex præſcripta ratione, quod ipſi additum faciat quadratum quia alias deberet a habere partes aliquotas $x + y$ et $x - y$ [3]).

Aliter.

$$\text{Sit } a + xx \infty xx + 2bx + bb;\ \frac{a - bb}{2b} \infty x.$$

$$a + xx \infty xx - 2bx + bb;\ x \infty \frac{bb - a}{2b}.$$

---

[1]) La Pièce, que nous avons divisée en paragraphes, est empruntée aux p. 255—272 du Manuscrit N°. 12.

[2]) Voir la p. 217.

[3]) Lisez: $y - x$.

[4]) Il est bien étrange que Huygens n'ait pas remarqué que cette impossibilité se rencontre chez tous les nombres qui se composent du produit de 2 par un nombre impair mais chez aucun autre nombre > 1 à l'exception du nombre 4. En effet, tous les autres nombres peuvent être décomposés en deux facteurs inégaux p et q ($p > q$) qui sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs; dans ces cas les équations $x + y = p$, $y - x = q$ amènent une solution du problème en nombres entiers.

Hic oportet $a - bb$ dividi poſſe per $2b$ quod quidem ſemper continget ſi ſumatur $b \infty 1$, numeruſque a datus fuerit impar. at quoties par datus eſt, oportet experiendo quærere. ut ſi datus ſit 12. ſit $b \infty 6$, erit $bb - a \infty 24$, qui dividitur per $2b \infty 12$, et fit 2. Ergo hujus quadr. 4 additum ad 12 facit 16 qui eſt quadratus.

Multi autem numerorum parium faciunt quæſtionem impoſſibilem, velut 6, 10;[4]) quia enim quadrata ex 3 et 4 differunt 7.rio ſequitur ſi numeri majus ſumantur quam 3 et 4, unitate differentes, eorum quadrata majoris intervallum quam 7 ac proinde quam 6 habitura et ſi non unitate differant ſed majori numero, adhuc majus quadratorum fore intervallum. Fruſtra igitur b major ſumetur quam 4.

Quin imo neceſſe eſt $2b$ non ſit major a. Dato enim a numero pari etiam b neceſſario par eſt aſſumendus ut $bb - a$ dividi poſſit per $2b$ parem. Sed bb, quadratum à numero pari dividitur per $2b$. Si igitur et $bb - a$ dividetur per $2b$; etiam reliquum a dividi poterit per $2b$; ideoque $2b$ non debet major eſſe quam a.

§ 2.

Cur omnis numerus primus addita vel dempta unitate dividitur per 6, item per 4? exceptis 2 et 3.

Quoniam omnis primus numerus eſt impar ſequitur ſive addita ſive ablata unitate fieri parem, ideoque dividi per 2. Sed et impar numerus primus exiſtens per 3 diviſus relinquit 1 vel 2 neceſſario. itaque ſi relinquat 1, demptâ 1 metietur eum 3, ſin relinquat 2, addita unitate rurſus 3 ipſum metietur. fit igitur addendo vel auferendo unitatem ut 2 et 3 ipſum metiatur. Quare et 6 qui fit ex 2 et 3 ipſum metietur.

Porro omnis impar numerus per 4 diviſus relinquit 1 vel 3. Ideoque ſi relinquat 1, demptâ 1 metietur ipſum 4. ſi vero relinquat 3, additâ 1 rurſus ipſum metietur 4.

§ 3.

Si numerus non quadratus in quadratum ducatur productus quadratus non erit. Addita autem unitate fieri poteſt quadratus. Itaque Fermattius hoc problema propoſuit [5]): *dato numero non quadrato invenire quadratum per quem multiplicatus, additâ ad productum unitate, fiat denuo quadratus.*

---

[5]) Voir le second défi de Fermat aux mathématiciens, p. 334—335 du T. II des Œuvres de Fermat, cités dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome, ou bien le fragment de lettre de Fermat à Frenicle de Bessy (p. 11 de notre T. II) duquel Huygens reçut la copie par l'intermédiaire de Mylon avec sa lettre du 2 mars 1657. L'équation diophantine $au^2 + 1 = v^2$, qui correspond au problème proposé par Fermat, est connue sous le nom d'équation de Pell. Elle

Sit datus non quadratus a. fit $\frac{axxyy}{zz} + 1 \infty xx + 2x + 1$, qu. ab $x + 1$.

$$axxyy \infty zzxx + 2zzx$$

$$x \infty \frac{2zz}{ayy - zz}$$

hunc oportet esse numerum integrum quod fiet si $ayy - zz \infty 1$, hoc est, si $ayy - 1 \infty zz$. Idem etiam continget si $ayy - zz$ fuerit $\infty 2$, hoc est $ayy - 2 \infty zz$. Experiendo igitur inveniendum est quadratum yy quod in a ductum demptâ 1 vel 2 relinquat quadratum.

Quod si superius quadratum formatum fuisset ab $x - 1$ inventa fuisset æquatio

$$x \infty \frac{2zz}{zz - ayy}.$$

Ubi si $zz - ayy \infty 1$, hoc est $ayy + 1 \infty zz$ rursus quæstio resoluta est. Sed hic ad ipsum primum quæsitum devenimus ut sit nempe $ayy + 1$ æquale quadrato. Si vero $zz - ayy \infty 2$, rursus integrum numerum x inveniemus. Hoc est si $ayy + 2 \infty zz$. Quod si $2zz$ per $zz - ayy$ vel per $ayy - zz$ tantummodo dividi possit erit rursus x numerus integer [1]).

Aliter.

Si axx ꝶ [2]) $2x$ esset quadratus is propositum efficeret, nam ductus in a, fit $aaxx$ ꝶ $2ax$ qui additâ 1 facit $aaxx$ ꝶ $2ax + 1$ qui est quadr. Sit ergo

$$axx \text{ ꝶ } 2x \infty \frac{zzxx}{yy}$$

---

donna lieu à des recherches nombreuses dont on trouve la liste dans la note 30 de la p. 599 du T. I, 2 de l'„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", où l'on rencontre entre autres les noms d'Euler, de Lagrange et de Gauss.

[1]) Remarquons toutefois que pour avoir une solution en nombres entiers de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ il ne suffit pas que $v = x \pm 1$ soit un nombre entier, il en doit être de même de $u = \frac{xy}{z} = \pm \frac{2yz}{ay^2 - z^2}$. Considérons, par exemple, l'équation $18u^2 + 1 = v^2$ et supposons $y = 1$, $z = 3$. On trouve alors $x = 2$, $v = 3$, mais $u = \frac{2}{3}$. En effet, pour faire réussir l'artifice employé ici par Huygens, il faut et il suffit que $ay^2 - z^2$, ou $z^2 - ay^2$, soit un facteur de $2yz$. En ce cas u est un nombre entier, et, par conséquent, v aussi.

[2]) Le signe ꝶ représente chez Huygens notre $\pm$.

$$ayyx - zzx \infty \, \text{℞} \, 2yy$$

$$\text{Ergo } x \infty \frac{2yy}{ayy - zz} \text{ vel } x \infty \frac{2yy}{zz - ayy}.$$

Confideratis itaque fimul hac et antecedenti æquatione huc deventum effe liquet, ut quærendus fit numerus quadratus qui fi in datum numerum ducatur productumque ab aliquo quadrato auferatur, vel hoc ab illo, refiduum metiatur alterutrius dictorum quadratorum duplum. Quotiens enim erit x.

Quoties autem datus numerus aliquem quadratum unitate fuperat vel ab eodem unitate deficit fumendus eft $y \infty 1$, et zz quadratum ifti quadrato æquale, ut ita fiat $ayy - zz$ vel $zz - ayy \infty 1$, unde fecundum priorem modum [3]) fit $x \infty 2zz$, ideoque $\frac{xxyy}{zz} \infty 4zz$ [4]).

Ex. gr. numerus 5 fuperat unitate quadratum 4. ergo fumatur $zz \infty 4$. Ergo $\frac{xxyy}{zz} \infty 4zz \infty 16$. 16 eft quadratus qui ductus in 5 facit 80 cui addita 1, efficit 81 quadratum.

Sic numerus 3 unitate minor eft quadrato 4 quare rurfus fit $zz \infty 4$, Eritque $\frac{xxyy}{zz} \infty 16$. 16 quadratus ductus in 3 facit 48 cui fi addatur 1 fiunt 49 quadratus.

Quoties vero datus numerus, quadratum aliquem binario fuperat, vel binario minor eft eodem quadrato: fumendum rurfus eft quadr. zz ifti quadrato æquale, et $y \infty 1$, ut fiat $ayy - zz$ vel $zz - ayy \infty 2$. Unde fecundum priorem rurfus modum [3]) fit $x \infty zz$, ideoque $\frac{xxyy}{zz} \infty zz$ [5]).

Ex. gr. 11 binario fuperat quadr. 9. Ergo 9 eft zz, qui ductus in 11 facit 99, cui additâ 1 fiunt 100 quadratus.

Item 7 binario minor quam 9, ductus in 9 facit 63, cui fi apponatur 1, fiunt 64 quadr. numerus.

Quoties itaque numerus datus quadratum numerum unitate vel binario excedit vel alterutro horum à quadrato deficit facile problema folvitur per ea quæ jam dicta funt. Sciendumque quod uno reperto quadrato qui propofitum efficiat infiniti alij idem facientes inveniri poffint. Si enim inventus quadratus vocetur yy. Ergo

---

[3]) Voir la p. 214.

[4]) Cette solution particulière de Huygens peut être déduite en remarquant que l'expression $(p^2 + 1) \times 4p^2 + 1$ représente un nombre carré. Si l'on a, par conséquent, $a = p^2 + 1$, $2p = u$ sera une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$.

[5]) On peut faire dépendre cette solution de la remarque que $(p^2 \pm 2) p^2 \pm 1$ est un carré.

quia $ayy + 1$ æquatur quadrato quod vocetur zz, erit $zz - ayy \infty 1$. Et fecundum priorem methodum $\frac{2zz}{zz - ayy} \infty x$ numerus integer quia fcil. divifor eft unitas, itaque $x \infty 2zz$, et $\frac{xxyy}{zz} \infty 4zzyy$. Sed zz eft $\infty ayy + 1$. Ergo $4zzyy \infty$ $\infty 4ay^4 + 4yy$, quod quadratum ductum in a, addita ad productum unitate rurfus quadratum efficiet. Quoniam autem fit $4ay^4 + 4yy$ ex ductu $ayy + 1$ in $4yy$, hinc talis exiftit regula.

Quadratum inventum (qui nimirum propofitum efficit) duc in datum numerum, producto adde unitatem, fummam duc in quadruplum ejufdem quadrati inventi, prodibitque aliud quadratum quæftioni fatisfaciens. Et fimili ratione ex hoc rurfus aliud invenitur, atque ita alia quot libuerit[1]).

Exempl. gr. Quoniam inventum eft quadratum 16 quod ductum in 3, affumpta ad productum unitate facit quadratum 49. ducatur ergo 49 in 64 quadruplum fcilicet 16, fit 3136 quadratus neceffario quem dico propofito convenire. Nam ductus in 3 facit 9408, cui additâ 1 fit 9409 quadratus à radice 97.

Datus fit numerus 13, qui vocetur a.

Ergo fecundum primam regulam [2]), quia $x \infty \frac{2zz}{ayy - zz}$; fit $y \infty 5$. $z \infty 18$ [3]).

$yy \infty 25$; $ayy \infty 325$; $zz \infty 324$; $ayy - zz \infty 1$;

$2zz \infty x$. ergo $4zzyy \infty \frac{xxyy}{zz}$. $4zzyy \infty 32400$

quadr. quæf. $\sqrt{[32400]}$ eft 180.

$32400\, a \infty 421200$
1 add.
421201

649 [4])

---

[1]) Soit, en effet, u_1 une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ et soit $au_1^2 + 1 = v_1^2$. On a alors $a(4u_1^2 v_1^2) + 1 = (4v_1^2 - 4)v_1^2 + 1 = (2v_1^2 - 1)^2$. Par suite $2u_1 v_1$ est une autre solution de la même équation pour laquelle solution: $v = 2v_1^2 - 1$. Il résulte de la lettre de Huygens à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 de notre T. II) que Huygens avait communiqué à Mylon cette méthode „quomodo uno quadrato invento innumeri alij reperiantur", de même que sa méthode précédente pour trouver des solutions en nombres entiers de l'équation de Pell.

[2]) Celle de la p. 214.

[3]) On ne voit pas comment Huygens a obtenu ces valeurs de y et de z qui satisfont à l'équation $13yy - zz = 1$ et qui conduisent à la solution $2yz = 180$ de l'équation $13u^2 + 1 = v^2$. D'ailleurs le résultat du calcul, c'est-à-dire la solution $u = 180$ de l'équation $13u^2 + 1 = v^2$, pouvait être connu à Huygens par la communication de Frenicle (p. 30 du T. II) que Mylon lui avait fait parvenir avec sa lettre du 18 mai 1657 (p. 29 du T. II).

Ajoutons encore à ce propos que les nombres y et z doivent se trouver souvent, l'un ou l'autre, ou tous les deux, parmi les facteurs de $u = \frac{2yz}{ay^2 - z^2}$.

$a.3$ [5])
$y.3$
$z.5$
$ayy - zz \infty 2$
quadr. quæſ. eſt
à radice 15 ∞ yz.
$[15^2 \times 3 + 1 = 26^2]$

$a.3$
$y.11$
$z.19$
$ayy - zz \infty 2$
quadr. quæſ. à
rad. 209 ∞ yz
$[209^2 \times 3 + 1 = 362^2]$

$a.61$
$y.3805$
$z.29718$
$ayy - zz \infty 1$
qu. quæſ. à rad. $2yz$
$[(2 \times 29718 \times 3805)^2 \times 61 + 1 =$
$= (2 \times 29718 \times 29718 + 1)^2]$

$a.21$
$y \infty 2$
$z \infty 9$
$ayy - zz \infty 3$
$x \infty 54$
quadr. quæſ. à rad. 12
$[12^2 \times 21 + 1 = 55^2]$

$a.21$
$y \infty 3$
$z \infty 14$
$zz - ayy \infty 7$
$x \infty 56$
quadr. quæſ. à rad. 12
$[12^2 \times 21 + 1 = 55^2]$

§ 4.

1657.

Numerum aliquem non quadratum eſſe ut noſcatur.

Si ultima litera fuerit 2, 3, 7, 8; vel 5 non præcedente 2 numerus non erit quadratus.

Item ſi deſinat per 1, 4, 9, præcedente impari; vel per 6 præcedente pari, non erit quadratus, vel per 25 non præcedente 2, 6 aut o.

Item ſi deſinat per imparem multitudinem nullarum. vel per multitudinem o parem quidem sed præcedentibus qui arguerent numerum non quadratum ſi nullæ adeſſent cifræ.

Hæc Mersennus fere [6]). Quod ſequitur noſtrum.

---

[4]) Nous avons reproduit ici l'algorithme dont Huygens s'est servi pour l'extraction de la racine carrée du nombre 421201.

[5]) Dans les petits calculs qui suivent Huygens déduit à l'aide de l'une ou de l'autre des règles qu'il vient de trouver quelques solutions $\left(x = \frac{2zz}{ayy - zz} \text{ ou } \frac{2zz}{zz - ayy}, u = \frac{xy}{z}\right)$ de l'équation $au^2 + 1 = v^2$. On retrouve les trois dernières dans la communication de Frenicle, citée dans la note 3. Les deux premières ne s'y trouvent pas parce que Frenicle s'est toujours borné à donner une seule solution pour chaque valeur de a. Nous avons ajouté à la fin de chaque calcul la solution à laquelle on est conduit.

[6]) Huygens fait allusion au passage suivant, qu'on trouve à la p. 181 des „Novarum observationum physico-mathematicarum F. Marini Mersenni Minimi. Tomus III. Parisiis,

Numerus qui rejectis novenarijs, (ut fieri ſolet in examine additionis) non relinquit 1, 4, 7 aut 0 non erit quadratus.

Quia enim ut fiat quadratus idem eſt multiplicatus numerus ac multiplicandus; neceſſe autem eſt ut uterque ſimul horum rejectis novenarijs relinquat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vel 0; ſequitur productum quoque multiplicationis, hoc eſt ipſum quadratum numerum, abjectis novenarijs tantum relinquere debere quantum quadratum alicujus harum ſimplicium notarum, rejectis itidem ſi opus ſit novenarijs, nam alias conſtat multiplicationem non recte ſe habere. atqui quadratum alicujus ſimplicium notarum rejecto quoties poteſt novenario relinquit 1, 4, 0 aut 7. Ergo omnis quoque quadratus numerus abjectis novenarijs relinquit 1, 4, 7 aut 0, quod erat demonſtr.

Numerus qui rejectis novenarijs non relinquit 1, 8 vel 0 non erit cubus.

Proprietas illa inſignis novenarij in examinandis omnium ſpecierum ſupputationibus (nam etſi nonnulli examina iſtiusmodi rejiciant, magnam tamen utilitatem habent, quod certos faciant, vitioſum eſſe calculum, quoties numeri non reſpondent) non aliunde eſt quam quod 9 proximus eſt 10, cum denariâ progreſſione numeri ſcribantur; quod facile eſſet oſtendere. Si itaque alia progreſſione numeri ſcriberentur, alterius numeri nec amplius novenarij illa eſſet proprietas. Veluti ſi non ultra ſeptem ſimplices characteres adhibere placuerit, adeo ut ſecundi loci numerus octuplum faciat primi, et tertij loci numerus octuplum ſecundi, &c. jam ſeptenarij eadem prærogativa erit ut examen per ipſum poſſit inſtitui, ſicut alias per 9 ſolet. Foret autem ſecundum hanc octonariam progreſſionem pro 8 ſcribendum 10, pro 9, 11, pro 20, 24, &c. quod facile eſt intelligere. Quod ſi vero dati quivis numeri ſecundum denarium progreſſum ſcripti, continuo ad octonarium reduci poſſent, prodeſſet hoc ad alterum inſtituendum examen cujusvis arithmeticæ operationis, poſteaquam jam per 9 experti eſſemus: juvaretque præterea in quadratis numeris diſcernendis, de qua re modo egimus. Verum reductio illa expeditè fieri non potest; ſed tabulam primo conſtruere neceſſe eſſet; tum deinde moleſta atque inſolita additio peragenda. Hoc incommodo evitando aliud compendium inveni, tabellâ nimirum conditâ quæ oſtendat

---

Sumptibus Antonii Bertier, MDCXLVII": „Cùm autem scire volueris an numerus sit quadratus, vide num desinat per hos numeros, 1, 4, præeunte numero pari; vel per 6, impari præcedente; vel per 25, cum 0,2, aut 6 antecedentibus, vel denique per 00 præeunte quadrato, hi si quidem numeri sunt quadratorum indices: vt non quadratorum 2, 3, 7, 8, vel 5, nisi præeat 2". Évidemment l'omission du 9 après les nombres 1 et 4 est due à l'imprimeur.

de ſingulis denarijs, centenarijs, millenarijs, &c., quantum quiſque relinquat ſeptenarijs abjectis, ſive per 7 diviſus, cujus tabellæ conſtruendam rationem primò, deinde uſum exponam.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	1
5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	2
4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	3
3	1	5	4	6	2	3	1	5	4	4
2	3	1	5	4	6	2	3	1	5	5
1	5	4	6	2	3	1	5	4	6	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	8
5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	9

Characteres ſupernè inſcripti denotant ordines numerorum ſecundum denarium progreſſum ſcriptorum. Scilicet qui ſub 2 in columna habentur ad denarium pertinent, qui ſub 3, ad centenarium, &c. Qui autem ad latus adſcripti ſunt characteres indicant ad quotum denarium, centenarium, millenariumve &c. pertineant, qui in eo tranverſo ordine continentur. Itaque in columna ſub 1, continentur ij numeri quibus numeri ſimplices ſeu primi ordinis excedunt ſeptenarium nec in his niſi duo maximi 8, 9 ſeptenarium excedunt. In columna ſub 2, continentur ij quibus denarij ſive 2^{di} ordinis numeri ſeptenarium vel ſeptenarios excedunt. Primi nempe denarij exceſſus eſt 3, ſecundi ſive numeri 20 exceſſus ſupra ſeptenarios eſt 6, atque ita de cæteris. qui quidem facile inveniuntur. Nam cum compertum ſit primum denarium excedere per 3, ut hinc ſciam quid exceſſus ſecundi denarij, multiplico ipſum 3 per 2 in columna laterali fitque 6, quod in concurſu utriuſque ordinis colloco.

Rurſus ut tertij denarij exceſſum ſupra ſeptenarios invenio multiplico 3 laterale in idem 3 exceſſum ſc. primi denarij fiuntque 9 quæ rejecto ſeptenario relinquunt 2, quod ſimiliter in concurſu ordinum colloco. Et ſic tota columna ſub 2 conſequenter perficitur.

Rurſus ut primi centenarij exceſſus habeatur ſive primus numerus in columna ſub 3, duco eundem rurſus exceſſum denarij 3, in ſeipſum, fiunt 9, et rejecto ſeptenario, 2, qui eſt exceſſus primi centenarij quæſitus. Nam cum denarij exceſſus

ſit 3, neceſſe eſt eum qui fit ex ductu denarij in ſe ipſum, hoc eſt primum centenarium excedere (collectis in unum omnibus characteribus cum per octonarium progreſſum ſcriptus erit) quantum 3 in 3 ductum, ſeptenarium excedit; quoniam videlicet eadem tunc ſeptenarij proprietas eſt quæ ſolet alias eſſe novenarij in multiplicatione. Cognito autem exceſſu primi centenarij 2, ut habeatur exc. ſecundi centenarij ducendum eſt rurſus 2 laterale in ipſum exceſſum 2 fit 4 pro quæſito exceſſu. atque ita porro columna hæc ac deinceps tota tabella repletur, eſtque animadvertendum poſtquam ſupremus columnæ numerus idem contigerit cum aliquo ſupremorum columnæ alicujus præcedentis, quod ex inde eædem columnæ in ijſdem numeris revertantur, adeo ut deſcribere tantum ſit opus. ut hic in 7a columna fieri cœpit.

Dato itaque numero aliquo ſecundum vulgarem denariam progreſſionem ſcripto velut 853824, ſi ſcire velim quid relicturus ſit abjectis ſeptenarijs ſi ad octonariam progreſſionem reducatur, ſcribo, ſub 8 quod ſextum locum occupat, 5, quia hoc invenio in concurſu columnæ ſub 6 et tranſverſi ordinis cui adſcriptum eſt 8. Et conſtat ſane, ſi numerum 800000 totum per octonarium progreſſum exprimerem, rejectis poſtea ſeptenarijs ſuperfuturum 5: ex conſtructione nimirum tabellæ. Rurſus ſimili ratione invenio pro charactere ſecundo numeri dati qui eſt 5, ſcribendum eſſe 6, quod ſub dicto charactere 5 repono: atque ita de cæteris omnibus, ut datus numerus cum ſubſcripto ſit.

$$\frac{853824}{564264}$$

Hic jam ſubſcriptus rejectis ſeptenarijs tantundem relicturus eſt, atque integer numerus datus ſi ad octonarium progreſſum reductus eſſet; relinquit autem 6, idque patet ea ſimplici notarum additione rejecto quoties opus eſt 7nario [1]).

Poſſunt itaque numeri ex multiplicatione vel alia operatione arithmetica orti hac ratione immutari ut inde, per ſeptenarium, examen eodem modo inſtituatur ſicut ſolet per 9. Quanquam etiam abſque ulla immutatione idem examen inſtitui poteſt, ſed tunc per 7 dividendum eſt: veluti in multiplicatione, primum uterque numerus qui ſeſe invicem multiplicant per 7 dividendus eſt, et reliquum ab utroque in ſe invicem ducendum et videndum quis ſit exceſſus producti hujus ſupra 7.os cum quo idem eſſe debet exceſſus producti multiplicationis per 7 diviſi. Unde conſtat omnem numerum quadratum ſive hoc modo ſive præcedenti per 7 examinatum relinquere debere 1, 2, 4 aut 0 [2]). Quod eodem modo demonſtratur ſicuti

[1]) Cette méthode de Huygens pour déterminer le résidu de la division par 7 ressemble beaucoup à celle de Pascal exposée dans l'ouvrage „De numeris multiplicibus", qu'il présenta en 1654 à l'Académie Parisienne mais qui ne fut publié qu'en 1665 avec le „Traité du triangle arithmétique" (voir les p. 313—339 du T. 3 des „Œuvres de Blaise Pascal", citées dans la note 4 de la p. 196).

Toutefois les méthodes de Huygens et de Pascal diffèrent en ce que Pascal ne se sert que

ſupra de examine per 9 oſtenſum eſt, nempe quod illic quadrati numeri relinquant ſemper 1, 4, 7 aut 0.

Facto itaque examine per 9, ſi non deprehendatur non quadratus, neque ex finalibus notis agnoſcatur, deinceps per 7 explorandus eſt. Sed antea potius per 11, quoniam expedita eſt magis operatio, ut jam oſtendemus.

Tabella ſequens indicat quo exceſſu quilibet denarius, centenarius, millenarius &c. ſuperet undenarios, eſtque eâdem methodo deſcripta, qua præcedens ad ſeptenarios pertinens. Hujus autem uſu non indigebimus, ſed eo tantum proponitur ut demonſtrentur proprietates quædam numeri 11. Nota τ ſignificat 10.

5	4	3	2	1	
1	τ	1	τ	1	1
2	9	2	9	2	2
3	8	3	8	3	3
4	7	4	7	4	4
5	6	5	6	5	5
6	5	6	5	6	6
7	4	7	4	7	7
8	3	8	3	8	8
9	2	9	2	9	9

Apparet autem numeros in columnis alternatim reverti eoſdem, quod neceſſario contingere ex conſtructionis ratione manifeſtum eſt. Dato itaque numero aliquo ſecundum conſuetum denarij progreſſum ſcripto ſi velim ipſum reducere ad alios characteres, ita ut examen per 11 ex collectione ſimplici notarum peragi queat, (ſit verbi gr. numerus datus 255481) liquet omnibus locis imparibus, à dextra incipiendo, nempe primo, tertio, quinto &c., eoſdem characteres haberi quos ex tabella ſubſtituere oporteret; locis autem paribus illos fore ſubſtituendos quibus quiſque datorum characterum ab 11 deficit. Veluti quia ſecundo loco habetur 8, ſubſtituetur 3, et ſic de ceteris. Hoc cum conſtet, nihil opus eſſe

de la première ligne du Tableau de la p. 219, de sorte que pour trouver le résidu septénaire du nombre 853824 le calcul se fait comme il suit: $8 \times 5 + 5 \times 4 + 3 \times 6 + 8 \times 2 + 2 \times 3 + 4 \times 1 = 104; 1 \times 2 + 4 \times 1 = 6$.

[2]) Comparez l'Appendice II à cette Pièce, p. 229 du présent Tome.

video ut datus numerus in alios characteres tranfcribatur, fed tantum ut primò ex notis locorum imparium undenarius rejiciatur quoties poteft (hic ne femel quidem poteft fed fiunt 10 ex fimplici additione notarum 1, 4, 5,) deinde ex notis locorum parium undenarius fimiliter quoties poteft rejiciatur, (fit hic exceffus 4), atque pofterior hic exceffus a priore auferatur, qui quidem fi minor eft augendus eft undenario; reliquum enim fore quo totus numerus datus undenarios fuperat five id quod fupererit cum per 11 dividetur. fit autem hic 6. Et hic quidem examandi modus expeditus eft fere æque ac qui per 9 folet ufurpari. Utique fi hoc quoque obfervetur in additione fimplici notarum et quoties fupra 10 afcenderis, veluti ad 17, &ct, auferas tantum finiftram notam à dextra nota velut hic 1 à 7 fit 6; unde fcias exceffum ipfius 17 fupra 11 effe 6. nam hoc facilius cogitatione fit quam fi ex 17 demas 11.

Porro ut quadratos numeros hoc examine exploremus fciendum eft omnem quadratum per 11 divifum relinquere neceffario, 0, 1, 3, 4, 5 aut 9 adeoque fi per examen inveniatur exceffus, 2, 6, 7, 8 aut 10, non erit quadratus numerus. Cujus ratio eadem eft quam fupra de quadratis per 9 explorandis dedimus, vel in univerfum hæc erit, quod quoties numeri duo figillatim per aliquem numerum dividuntur, atque utriufque refidua, in fe invicem ducuntur, ejus producti exceffus fupra eundem illum diviforem idem erit cum exceffu qui habetur fi productum duorum ab initio dictorum numerorum per eundem quoque diviforem dividatur.

Sint propofiti numeri a et b, et fumatur divifor c. Et divifo a per c fiat quotiens d et refiduum e. Rurfus divifo b per c fiat f quotiens et refiduum g. Eft igitur $dc+e \infty a$ et $fc+g \infty b$. Quare ab productum numerorum erit ∞ $dfcc + dcg + $ $+ fce + eg$. Quo divifo per c apparet refiduum fieri eg, (omnibus reliquis partibus per c divifionem recipientibus), quod idem eft cum refiduo producti duorum refiduorum e et g per c divifi. quod erat demonftr. [1])

Ex hoc theoremate proprietas undenarij quæ ex præc. tabella colligitur demonftrari poteft quod nimirum quilibet numerus unum characterem habens, cum fequente pari numero cifrarum, per 11 divifus tantundem relinquat, atque ipfe character initialis unitates denotat. Ut fi 700 per 11 dividatur relinquetur 7, fi 40000, relinquetur 4, &c. Numerus autem unum characterem habens cum adjectis cifris imparibus, fi per 11 dividatur, tantum relinquet quantum character initialis ab 11 deficit. Ut fi 3000 vel 30 per 11 dividas fupererit 11—3 hoc eft 8.

Tentato examine per 8, inveni id ad tres extremos characteres tantum pertinere quia 1000 per 8 divifum nihil relinquit, ideoque etiam omnes numeri qui tres

[1]) On rencontre à la p. 337 du Manuscrit D une démonstration analogue du même théorème, laquelle doit avoir été écrite vers 1673. Il ne nous semble pas nécessaire de la reproduire.

plureſve cifras adjectas habent. Tres ergo poſtremi characteres omnis quadrati numeri ſi per 8 dividantur debent relinquere 1, 4 aut 0 [2]). Ex tabella autem ad octonarium comparata inveni [3]), quadratos numeros quorum extrema eſt 9 ſic finire debere nempe

m 69	*m* ſignif. numerum imparem.	
m 29		
p 49	*p* numerum parem.	
p 89		

quorum autem extremo eſt 1 ſic finire debere

m 21
m 61
p 41
p 81

[2]) Comparez l'Appendice II à cette Pièce, p. 229 du présent Tome.

[3]) Les résultats qui suivent sont incomplets. Huygens aurait dû ajouter aux deux colonnes suivantes respectivement *p* 09 et *p* 01, puisque p. e. $53^2 = 2809$ et $51^2 = 2601$. Voici comment on peut arriver aux résultats complets: Remarquons d'abord que le résidu de la division par 4 ou par 8 de tout nombre carré impair est égal à l'unité. Il en doit donc être de même pour le nombre formé dans le cas de 4 par les derniers deux et dans celui de 8 par les derniers trois chiffres. On en peut conclure que le nombre formé par les derniers trois chiffres doit prendre l'une ou l'autre des formes: $100b + 8a + 1$ ou $100b + 8a + 5$ et que dans le premier cas (celui de $8a + 1 = 01, 09, 41, 49, 81$ ou 89) le chiffre des centaines doit être pair et dans le second (celui de $8a + 5 = 21, 29, 61, 69$) impair, puisqu'autrement le résidu de la division par 8 ne serait pas égal à 1 mais à 5.

4	3	2	1	
0	0	0	0	0
0	4	2	1	1
0	0	4	2	2
0	4	6	3	3
0	0	0	4	4
0	4	2	5	5
0	0	4	6	6
0	4	6	7	7
0	0	0	0	8
0	4	2	1	9

On peut admettre que des raisonnements analogues à ceux qui précèdent ont été suggérés à Huygens par la considération attentive du tableau pour les résidus de la division par 8, qu'on trouve ici à côté. Alors l'omission de la première ligne, qui manque dans les tableaux des pp. 219 et 221, expliquerait le résultat incomplet de Huygens. En effet, prenant 1 pour le dernier chiffre, le tableau apprend qu'on peut combiner ce chiffre avec 0, 2, 4, 6 et 8 comme avant-dernier chiffre, mais que dans le premier, le troisième et le cinquième de ces cas le chiffre des centaines doit être pair et dans les autres impair. Or, c'est précisément le premier cas, dépendant de la première ligne du tableau, qui à été omis par Huygens.

Dans quel but Huygens cherchait-il tant d'artifices pour reconnaître si un nombre donné peut être un carré? Il nous semble que ce but n'est pas difficile à deviner, vu les recherches qui précèdent. Il s'agissait probablement de trouver par tâtonnements des solutions de l'équation de Pell $au^2 + 1 = v^2$, ou bien des équations, comme p.e. $ay^2 - 1 = z^2$, ou $ay^2 \pm \pm 2 = z^2$, de la résolution desquelles Huygens avait fait dépendre celle de l'équation de Pell; voir la p. 214 du présent Tome.

Ajoutons que, nonobstant tous ces artifices, la méthode de Huygens pour résoudre l'équation de Pell reste extrêmement laborieuse, comme il en convient lui-même dans sa lettre à van Schooten du 21 avril 1657 (p. 27 du T. II). Fermat et Frenicle

2643215	5 in 4	per 9.m	
412231	2		
2643215			
7929645			
5286430	2 + 11 4 + 11		
5286430	10 9		
2643215	3 in 6		
10572860	18	7	per 11.m
1089615162665			
	4 + 11		
	8		
	7		

Facto examine per 9rium si convenire numeri inveniantur, erunt 9 partes pro recto calculo, 1 pars pro vitioso. Facto examine per 11rium erunt 11 partes pro recto, una pro vitioso.

Peracto vero tum per 9m tum per 11m examine, si convenire numeri inveniantur, erunt 99 partes pro recto calculo, una pro vitioso.

---

en possédaient sans doute de meilleures qu'ils ont tenues secrètes. Brouncker en inventa une qui permit d'arriver à une solution même dans les cas les plus difficiles qui furent proposés par Frenicle, comme p. e. le cas $a = 109$. Voir sur cette méthode, que Wallis publia en 1658 dans le „Commercium epistolicum", le § 3 de l'Appendice I, p. 227 du présent Tome.

APPENDICE I À LA PIÈCE N°. III [1].

[1658].

§ 1 [2]).

$$\frac{4nxx}{zz} + 1 \infty \frac{nn + 2nxx + x^4}{zz}$$ ſuppoſitio M.rd Brouncker

$$zz \infty nn - 2nxx + x^4$$

$$\frac{4nxx}{nn - 2nxx + x^4} + 1 = \frac{nn + 2nxx + x^4}{nn - 2nxx + x^4}$$

Ergo ſi $\frac{2x}{n - x[x]}$ fuerit integer numerus habebitur quæſitum. utique ſi et x ſit integer. nam alias quadr. ab $x[x] + n$ non eſſet integer [3]).

---

[1]) Les annotations qui suivent, empruntées aux p. 40—41 du Manuscrit A, ont été écrites à propos du „Commercium epistolicum", publié par Wallis en 1658 (voir la note 3 de la p. 192 de notre T. II). Elles se rapportent aux solutions qu'on y trouve du problème de Fermat traité dans la Pièce N°. III au § 3 (voir les p. 213—217 du présent Tome). Huygens se servit de ces annotations dans la composition de sa lettre à Wallis du 6 septembre 1658, p. 211—212 du T. II.

[2]) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la solution de Brouncker exposée à la p. 15 du „Commercium" (p. 767—768 du „Volumen alterum" de l'„Algebra" cité dans la note 10 de la p. 9).

[3]) Remarquons toutefois que cela n'empêcherait pas que $\left(\frac{n+x^2}{n-x^2}\right)^2 = 1 + n\left(\frac{2x}{n-x^2}\right)^2$ ne fût un nombre entier.

Oportet esse num. integrum $\frac{2x}{n-xx}$

$$\frac{s}{r} \infty x \qquad \frac{2sr}{nrr-ss}$$ [1])

§ 2 [2]).

α. hoc est si numerus n talis sit ut quadratum proximè majus unitate ipsum superet velut si $n \infty 3$ vel 8 vel 15 &c.

hic $a \infty 1$ erit quadratorum quæsitorum unus, quia differentia inter quadratum illud proximum et n in qu. aliquod scil. 1. cum sit 1, metietur rectangulum e radicibus utriusque quadrati.

β. hoc est si num. n talis sit ut qu. proxime majus amplius quam unitate ipsum n superet.

γ. ante enim transiri hoc modo nequit. amplius autem expectandum non est, siquidem quæritur 1 pro differentia.

δ. quia scilicet $\frac{cd \pm \sqrt{nd^2+b}}{b} \infty a$.

---

[1]) Il s'agit donc de choisir les nombres s et r de manière que $2sr$ soit divisible par $nrr-ss$, auquel cas $u = \frac{2sr}{nrr-ss}$ représentera une solution en nombres entiers de l'équation $nu^2 + 1 = v^2$. Dès ce moment Huygens doit s'être aperçu de l'identité de la méthode de Brouncker avec la sienne telle qu'on la trouve exposée au début du § 3 à la p. 214, où une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ est obtenue de la forme $u = \frac{xy}{z} = \frac{2yz}{ayy-zz}$. Voir la p. 212 du T. II, où on lit: „Ego canonem tantum inveneram eundem fere quem pagina 57" (p. 789 du „Volumen alterum") „et alibi adducis".

[2]) L'annotation qui suit se rapporte entre autres à une méthode exposée par Wallis à la p. 63 du „Commercium" (p. 792 du „Volumen alterum"). Posant $n = c^2 - b$, Wallis en déduit $na^2 = (ca-d)^2 - d^2 + 2acd - ba^2$ et il remarque que le nombre a sera une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ toutes les fois qu'on aura: $d^2 - 2acd + ba^2 = 1$, c'est-à-dire, $a = \frac{cd + \sqrt{nd^2+b}}{b}$. Après quoi Wallis continue: „His positis. Ut cognoscatur d, quærendum erit... quis quadratus ductus in numerum datum, assumpto numero b, faciat quadratum; (ut nempe $\sqrt{nd^2+b}$ sit numerus rationalis integer). Quod quamvis videatur nihilo facilius reperiri posse quam quod primum petebatur; tamen hinc magnum futurum operæ compendium, certum est, quia d... minor semper erit quam a... adeoque citius eo pervenietur ubi habebitur defectus b, quam ubi defectus 1.", etc.

§ 3 [3]).

Problema Fermatij.

Datus eſt numerus aliquis non quadratus ut 5. oportet invenire quadratum qui in 5 ductus, addita 1 faciat quadr.

Methodus Brounkeri [4]). $5aa + 1 \infty 4aa + 4ab + bb$

$$aa + 1 \infty 4ab + bb$$ [5])

$$8b > a > 4b$$ [6])

$$a \infty 4b + c$$

$$16bb + 8bc + cc + 1 \infty 16bb + 4cb + bb$$

$$4bc + cc + 1 \infty bb$$

$$5c > b > 4c$$ [7])

$$b \infty 4c + d$$

---

[3]) Dans ce paragraphe Huygens examine une méthode exposée à la p. 71 du „Commercium" (p. 797 du „Volumen alterum"). Afin de s'assurer si elle est exacte et expéditive, il l'applique à un autre exemple que celui choisi par Wallis, c'est-à-dire à l'équation $5u^2 + 1 = v^2$.

[4]) La méthode qui suit doit en effet être attribuée à Brouncker. Il est vrai que Huygens dans sa lettre à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 211 du T. II) l'appelle: „tuane an Illustri. Brounkeri, neque enim satis certo id significas, methodus pagina 71 exposita"; mais Wallis lui répond (p. 297 du T. II) „. . . Methodum illam quæ pagina 71. occurrit, quæ est Illustris Brounckeri magis quam mea (quod ibidem me satis innuisse putaveram) licet eam mihi deinceps reliqueret exponendam".

[5]) En posant $b = 1$, $a = 4$, on obtient une première solution de l'équation $5u^2 + 1 = v^2$; mais Huygens suppose $b > 1$ et par suite $aa > 4ab$, ce qui fournit la limite inférieure de l'inégalité qui suit.

[6]) Il eût été plus conforme à la méthode de Brouncker d'écrire: $5b \geq a > 4b$. Voici, en effet, l'artifice par lequel Brouncker obtient les limites. Pour $a = 4b$ on a $a^2 + 1 = 16b^2 + 1 < 4ab + b^2 = 16b^2 + b^2$; pour $a = 5b$ on a au contraire $a^2 + 1 = 25b^2 + 1 > 4ab + b^2 = 21b^2$. On en peut conclure que s'il y a une valeur entière et positive de a qui satisfait à l'équation $a^2 + 1 = 4ab + b^2$, elle doit être située entre $4b$ et $5b$, l'autre racine de cette équation étant négative.

[7]) La limite inférieure se trouve en remarquant que nécessairement $4bc < bb$.

$$17cc + 4cd + 1 \infty 16cc + 8cd + dd$$
$$cc + 1 \infty 4cd + dd$$
$$c \infty 4d$$
$$16dd + 1 \infty 17dd$$

fit $d \infty 1$ [1]), $c \infty 4$, $b \infty 17$, $a \infty 72$, $aa[\infty]$ 5184, $5aa + 1$ $[\infty]$ 25921
$[2a + b \infty]$ 161 $[4aa + 4ab + bb \infty]$ 25921 bon.

---

[1]) Puisque les quantités a, b, c, etc. constituent nécessairement une suite descendante quant à leurs valeurs, il est évident que la circonstance qui se présente ici, c'est-à-dire qu'une dernière équation est satisfaite en posant l'inconnue égale à l'unité, doit arriver toujours, tôt ou tard, pourvu qu'il existe une solution en nombres entiers de l'équation qu'on examine. C'est en cela que consiste la valeur de la méthode de Brouncker qui est appliquée e. a. dans le „Commercium", p. 85, (voir les p. 804—805 du „Volumen alterum") à l'équation $109u^2 + 1 = v^2$, où la solution la plus simple $u = 15140424455100$ est trouvée après la considération de 22 équations. Elle fut donc louée à juste titre par Huygens lorsqu'il écrivit à Wallis (voir la p. 211 du T. II): „Præ cæteris mihi placuit illa... methodus"; mais il ajouta à raison: „ex qua tamen nequaquam illud recte colligere mihi videris pagina 83" (p. 803 du „Volumen alterum") „dari aliquem quadratum qui in datum numerum non quadratum ductus adscita unitate faciat quadratum. Nam secundum methodum illam operatione instituta, nequaquam scis quam diu continuandæ tibi sint positiones antequam quæsitum obtineas, ideoque nec omnino certus esse potes an unquam eo perventurus sis. Sunt, inquis pagina 82, differentiæ b, c, d, &c. numeri integri et continuè decrescentes, ergo tandem ad unitatem deveniri necesse est. at revera ex tua tantum hypothesi sunt numeri integri eoque illud supponere videris quod erat demonstrandum".

APPENDICE II À LA PIÈCE N°. III [2]).

[1657].

Tout nombre apres 2 eſt ternaire + o ou + 1 ou + 2
donc tout nombre quarrè apres l'unité eſt tern. + o ou + 1 ou + 1

Tout nombre apres 3 eſt quaternaire + o ou + 1 ou + 2 ou + 3
donc tout nombre quarrè apres 1 eſt quat.e + o ou + 1 ou + o ou + 1
donc tout nombre cube apres 1 eſt quat.e + o ou + 1 ou + o ou — 1

Tout nombre apres 6 eſt ſeptenaire + o ou + 1. 2. 3. 4. 5. 6
donc tout nombre quarrè apres 4 eſt ſeptenaire + o ou + 1. 4. 2. 2. 4. 1
donc tout nombre cube après 1 eſt ſepten. + o. 1. 1. — 1. + 1. — 1. — 1

Tout nombre apres 7 eſt octonaire + o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7
donc tout n. quarrè apres 4 eſt octonaire + o. 1. 4. 1. o. 1. 4. 1
donc tout n. cube apres 1 eſt octonaire + o. 1. o. 3. o. 5. o. 7
c'eſt a dire eſt octonaire ou octonaire plus un impair.

Tout nombre apres 8 eſt novenaire + o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
donc tout n. quarrè apres 4 eſt novenaire + o. 1. 4. o. 7. 7. o. 4. 1
donç tout n. cube apres 1 eſt novenaire + o. 1. — 1. o. 1. — 1. o. 1. — 1. [3])

De tout quarrè les 3 derniers caracteres font un nombre octonaire, ou octonaire + 1 ou + 4.

De tout cube les 3 derniers caracteres font un octonaire ou un octonaire + un impair.

Si l'on diviſe deux nombres par un autre nombre chacun apart, et que l'on multiplie les deux reſidus enſemble, ce produit, ou (s'il peut eſtre encore diviſè par le meſme nombre) le reſidu, ſera egal au reſidu qui ſe fait quand on diviſe le produit des deux premiers nombres, par le meſme qu'on a pris pour diviſeur.

---

[2]) L'Appendice, qui contient des recherches analogues à celles du § 4 de la Pièce N°. III, est empruntée à une feuille détachée. Il a probablement précédé cette Pièce. Voir les notes 2 des pp. 221 et 223 du présent Tome.

[3]) Vers 1690 Huygens s'est occupé du même sujet, puisqu'on trouve à la p. 71A du Manuscrit G les trois théorèmes suivants qui y sont déduits de la même manière que dans cet Appendice: „Omnis quadratus numerus rejectis 9, relinquit o vel 1 vel 4 vel 7. Omnis cubus rejectis 9 relinquit o, 1 aut 8. Omnis cubocubus rejectis 9, relinquit o aut 1".

IV [1].

[1657].

Conſtructio locorum planorum, cum punctum eſt ad lineam rectam.

Poſito x pro diſtantia ſeu linea à certo puncto ſumpta, et y pro linea quæ à termino prioris ad certum angulum educta eſt, tum ſi reperiatur æquatio hujuſmodi

$$y \infty \bullet e \bullet \frac{ax}{b}$$ [2])

erit locus puncti ad lineam rectam quæ hoc modo invenitur. Si habeatur $+ e$, ponenda eſt à puncto unde ſumpta fuit x, in dato angulo, linea ipſi e æqualis atque in eandem partem verſus quam ſumpta fuit y. at in partem contrariam ſi habeatur $- e$.

Porro ex puncto unde x ſumpta fuit, capiatur in eadem recta, et verſus eandem partem in quam tendit x, recta æqualis b. inque hujus termino in dato angulo ſtatuatur recta æqualis a, quæ, ſi habeatur $+ \frac{ax}{b}$, ſumenda eſt eo verſus quo ſumpta eſt y; at in partem contrariam cum habetur $- \frac{ax}{b}$. Inde ducatur quæ cum poſtremis hiſce duabus triangulum conſtituat. tandemque ultimo ductæ parallela agatur à termino ejus quæ fuit ipſi e æqualis ſumpta. Hæc erit locus quæſitus.



ſit $y \infty + e - \frac{ax}{b}$ [3]).

[1]) La Pièce occupe les p. 273—275 du Manuscrit N°. 12.

[2]) Les gros points indiquent qu'on peut appliquer à volonté le signe + ou le signe —.

[3]) Voir la figure à côté qui donne la construction de la droite qui correspond à cette équation.

Conſtructio loci plani cum punctum eſt ad circuli circumf.

Si habeatur æquatio in qua reperiatur inter quantitates ipſi yy æquales $-xx$; nullus autem terminus ubi xy. fuerintque x et y ſibi mutuo ad rectos angulos erit neceſſario puncti quæſiti locus ad circumferentiam circuli. Ut ſi ſit æquatio

$$yy \propto 2by + bb - aa + cc + 2ax + dx - xx.$$

Ut autem conſtruatur, redigenda eſt primum ſolito more [4]) ad hanc $y \propto \propto b \pm \sqrt{2bb - aa + cc + 2ax + dx - xx}$. Vel poſito $2bb - aa + cc \propto pp$ et $2a + d \propto q$ ad hanc, $y \propto b . \sqrt{pp + qx - xx}$.

Apparet jam, quod ſi quantitatibus quæ in $\sqrt{}$ continentur addatur rurſuſque adimatur $\frac{1}{4}qq$, fiet $y \propto b . \sqrt{pp + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq + qx - xx}$ eruntque quantitates eædem quæ prius. Eſt autem $-\frac{1}{4}qq + qx - xx$ quadratum à radice $\frac{1}{2}q - x$. ablatum à quantitate $pp + \frac{1}{4}qq$. Ergo hinc inventum eſt, quoties habetur $y \propto . b . . \sqrt{pp + qx - xx}$, conſtructionem hoc modo exequendam.

Nimirum à puncto unde x ſumpta eſt [5]) ſumatur in eadem linea $\frac{1}{2}q$; inque partem eandem, ſi in $\sqrt{}$ habeatur $+ qx$: ſed in contrariam ſi habeatur $- qx$. Super hujus lineæ terminum ſtatuatur perpendicularis æqualis b, in eandem partem quo ſumpta fuit y, ſi habeatur $+ b$; at in contrariam ſi habeatur $- b$. Terminus perpendicularis erit quæſitæ circumferentiæ centrum; ſemidiameter vero $\sqrt{pp + \frac{1}{4}qq}$.

---

4) Voir p. e. la p. 15 du T. XI.

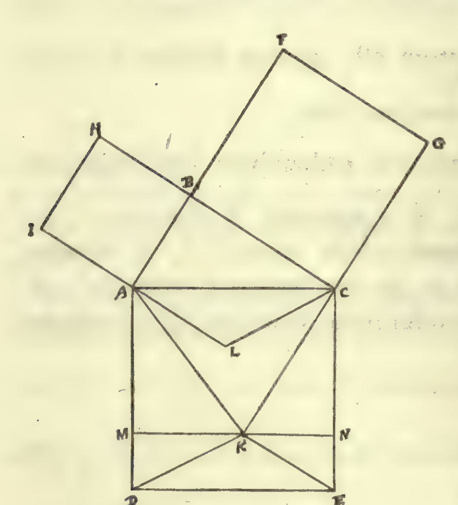
5) C'est-à-dire: l'origine des coordonnées.

V [1]).

[1657].

Aug. 1657.

Demonſtratio mea Propos.is 47 lib. 1 *Euclidis.*



Eſto triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum ABC. Dico quadratum ex AC æquale eſſe quadratis ex AB, et ex BC ſimul ſumptis.

Deſcribatur enim ſuper AC quadratum ADEC; ſuper AB vero et BC quadrata AH, CF. Et producatur IA uſque in L ut ſit AL æqualis AI, et jungatur LC, ſimiliter producatur CG in K, ut ſit CK æqualis CG, et jungatur KA; et ducantur etiam KE, KD, et per K agatur MN parallela AC.

Quoniam itaque anguli ABC, CBF, uterque recti ſunt, recta linea eſt FBA: eſtque ipſi parallela GK. Quamobrem cum inter eaſdem parallelas ſint quadratum GB et triangulum CAK, habeantque baſes GC, CK æquales, erit trianguli CAK duplum quadratum GB. Sed et rectangulum AN, duplum eſt ejuſdem trianguli AKC,

[1]) La Pièce occupe la p. 47 du Manuscrit K. Une traduction hollandaise fut publiée par J. Versluys aux p. 25—26 de l'ouvrage „Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras, verzameld en gerangschikt door J. Versluys, Amsterdam, 1914, A. Versluys." Comme M. Versluys le fait remarquer, il est bien curieux que parmi les démonstrations nombreuses du théorème de Pythagore, qu'on a inventées plus tôt ou plus tard, aucune n'est identique avec celle de Huygens.

cum ſint inter eaſdem parallelas AC, MN, habeantque baſin eandem AC. Igitur rectangulum AN æquale eſt quadrato GB. Supereſt ut oſtendatur rectangulum DN æquale quadrato AH. Quoniam itaque angulus uterque ACE, BCK rectus eſt, ablato communi angulo ACK, fiet KCE æqualis angulo BCA, verum et utrumque latus EC, CK æquale eſt utrique AC, CB, ſingula nimirum ſingulis. Ergo et reliquum latus KE æquale erit reliquo AB, et angulus KEC æqualis angulo BAC *). Quare et ablato angulo KEC ab angulo recto DEC; angulo vero BAC ab angulo recto BAL, relinquentur anguli inter ſe æquales KED, LAC. Sed oſtenſa eſt KE æqualis AB, hoc eſt ipſi AL: et ED æqualis eſt ipſi AC. Itaque cum triangulum KED, duo latera habet æqualia duobus lateribus trianguli LAC, et angulum KED æqualem angulo LAC, erunt hæc triangula inter ſe æqualia. Eſt autem trianguli KDE duplum rectangulum DN, cum eandem habeant baſin DE et eandem altitudinem; trianguli vero LAC duplum eſt quadratum AH cum ſint inter eaſdem parallelas HC, IL conſtituta, et baſes æquales habeant LA, AI. Itaque neceſſe eſt rectangulum DN æquari quadrato AH. Sed et rectangulum MC æquale oſtenſum eſt quadrato CF. Ergo apparet quadratum totum DC æquari utrique ſimul quadrato CF, AH; quod erat demonſtr.

*) 8. *primi* [2]).

[2]) Il s'agit en vérité de la quatrième (et non pas de la huitième) Proposition du premier Livre des „Elementa" d'Euclide: „Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur." (Clavius, ed. 1507, p. 41.)

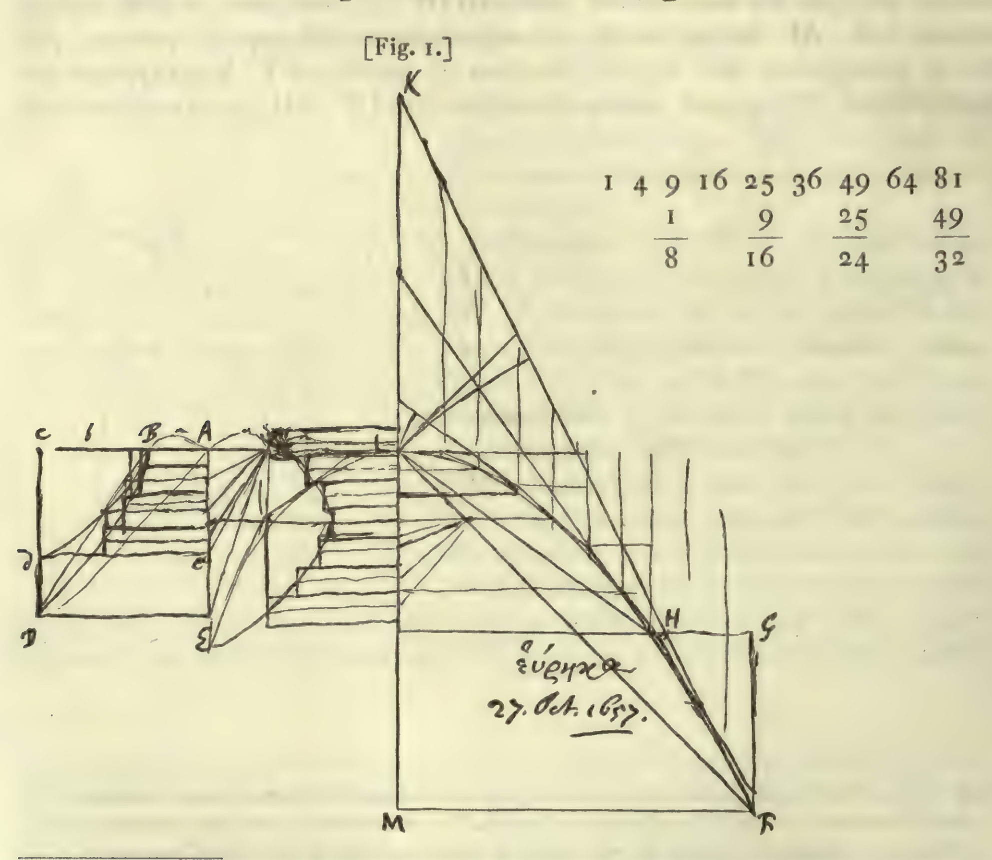
VI [1]).

1657.

[*Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique à celle du cercle.*]

[Première Partie [2]).]

[Fig. 1.]



[1]) La Pièce que nous avons divisée en trois Parties, a été empruntée aux pp. 39 et 47—60 du livret du frère Philips que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII et à quelques feuilles détachées.

Sit LF parab. axis LM. tangens FK. Sit hijperb. BD æqualium laterum recti et transv.i et sit AB dimidium lat. transv.i sicut autem KF ad FM, sive ut HF ad HG ita sit ED ad AB. vel quod eodem redit [3]), sicut KM ad MF ita sit AE ad AB, Et compleatur ▭ EC. Erit nisi fallor, circumferentia parabolæ LF ad rectam FK, ut spatium BDEA ad ▭ ACDE [4]). Potest sumi quævis hijperbola, dummodo fiat, **de** sive CA ad AB ut KF ad FM [5]).

---

[2]) Cette première Partie, qui occupe la p. 39 du livret, expose les découvertes faites le 27 octobre 1657. Elle ne donne aucune indication directe sur la manière dont ces découvertes ont été obtenues; mais consultez à ce propos les notes 4 de cette page et 2 de la suivante.

[3]) On a, en effet, $KF^2 : FM^2 = ED^2 : AB^2$; donc $(KF^2 - FM^2) : FM^2 = (ED^2 - AB^2) : AB^2$; c'est-à-dire, en appliquant une propriété connue de l'hyperbole équilatère, $MK^2 : FM^2 = AE^2 : AB^2$, ou bien $MK : FM = AE : AB$.

[4]) La figure que nous avons reproduite en tête de cette „Première Partie", contient plusieurs lignes énigmatiques qui, peut-être, se rapportent en partie à des tentatives qui n'ont pas abouti au but désiré. Toutefois il ne nous semble pas impossible de reconstruire à peu près à l'aide de la „Deuxième Partie" qui constitue une démonstration en règle du résultat obtenu, et de quelques autres indications, les raisonnements qui ont guidé Huygens. Dans leur exposition nous nous servirons librement des notations modernes.

Son point de départ, indiqué par la suite de nombres qu'on trouve à côté de la figure, était sans doute la remarque que dans la parabole $x^2 = py$, où les x sont comptés dans la direction de la tangente au sommet L, les accroissements successifs des y pour des valeurs $a, 3a, 5a, 7a$, etc. de x sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, 4, etc. On peut appliquer cette remarque à la fig. 3 de la p. 239 qui suit. Dans cette figure les ordonnées à gauche du sommet B correspondent aux nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 de la suite prémentionnée et les différences NF — GH = ND, OE — NF = OC — DN, etc. entre la troisième et la première ordonnée, la cinquième et la troisième, etc. aux nombres 8, 16, 24, etc. Or, puisque ces derniers nombres sont proportionnels aux abscisses des points de contact des tangentes successives DG, CD, etc. menées à la parabole AEKFB, on est évidemment conduit à une relation représentée par la formule $\Delta s = \sqrt{1 + k^2x^2} . \Delta x$, d'où l'on peut conclure que les éléments successifs de la circonférence de la parabole sont proportionnels aux ordonnées d'une hyperbole $y^2 = a^2(1 + k^2x^2)$. C'est la conclusion à laquelle Huygens arrive au Théorème V, p. 243.

Dès lors il est évident que la rectification de la parabole se réduit à la quadrature de l'hyperbole; mais si dans une telle hyperbole la première ordonnée AB [Fig. 1] prend la grandeur a, il faut que la dernière DE ou **de** soit égale à $a\sqrt{1 + k^2x_1^2}$, où $\sqrt{1 + k^2x_1^2}$ représente le rapport de Δs à Δx pour le point F de la parabole. On a donc, comme le texte l'indique, **de** (ou DE, ou CA) : AB = FK : FM. Or, de même que les éléments de la parabole, qui correspondent à des accroissements égaux Δx, sont proportionnels aux ordonnées hyperboliques $a\sqrt{1 + k^2x^2}$, ceux de la tangente FK correspondant aux mêmes accroissements Δx sont dans le même rapport à la dernière ordonnée **de** (ou DE), d'où il résulte que le rapport de la longueur de la parabole à celle de la tangente FK doit être le même que celui de l'aire hyperbolique B**de**A (ou BDEA) au rectangle A**d** (ou AD).

[5]) En effet, dans la démonstration qui va suivre, et dans les énoncés donnés à diverses occasions

dato ergo centro gr. in hijperbola, inveniri poterit recta periferiæ parabolicæ æqualis [1]).

videtur conoidis parab.i superficies ad circulum redigi posse [2]). Datâ parabolicæ lineæ longitudine Hyperbolam quadrare [3]).

---

de sa rectification de la parabole, Huygens n'emploie plus l'hyperbole équilatère BD mais une autre hyperbole, comme B**d**, de forme arbitraire.

On trouve ces énoncés aux „Theoremata VIII et IX", pp. 249 et 253 du présent Tome, aux pp. 344, 435, 501 et 502 du T. II et à la „Prop. IX" de la „Pars tertia" de l'„Horologium oscillatorium", p. 77 de l'édition originale. Remarquons que Huygens y remplace souvent la proportion CA : AB = KF : FM par les égalités CA = 2KF; AB = 2FM.

Ajoutons qu'on retrouve l'énoncé de l'„Horologium oscillatorium" sans modification essentielle à la p. 95 du Manuscrit B, qui doit dater de 1662, et de même à la p. 38 du Manuscrit N°. 13, où Huygens à une époque inconnue (probablement vers 1667) résuma les découvertes principales qu'il avait faites jusqu'à cette époque.

[1]) Comparez le „Theorema VI" des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", p. 305 du T. XI, et l'avant-dernier alinéa de la démonstration du „Theorema IX", p. 253 du présent Tome.

[2]) Afin d'expliquer de quelle manière Huygens a pu arriver à cette conclusion, nous commençons par faire observer que, comme nous l'avons vu dans la note 4 de la p. 235, les éléments de la parabole LF (Fig. 1) sont aux éléments correspondants de la tangente KF comme les ordonnées de l'hyperbole B**d** sont à la longueur constante AC, ou, si l'on veut, comme les rectangles élémentaires qui représentent approximativement les accroissements de l'aire hyperbolique AB**de** sont à ceux qui constituent le rectangle C**e**. Or, il est évident qu'en faisant tourner ces figures élémentaires, ceux de la parabole et de la tangente autour de KM, et ceux de l'hyperbole et du rectangle autour de AC, l'égalité des rapports est conservée, c'est-à-dire que les éléments de la surface courbe du conoïde parabolique, sont aux éléments de la surface conique, décrite par KF, comme les éléments du volume engendré par l'aire hyperbolique AB**de** sont à ceux du cylindre décrit par le rectangle C**e**. En outre, les éléments successifs de la surface conique sont entre eux dans la même proportion que les éléments correpondants du volume du cylindre A**d**.

À l'aide de ces considérations Huygens a pu parvenir (comme nous l'expliquons plus loin dans la note 8 de la p. 261) au Théorème XIII, p. 259, d'après lequel le volume engendré par le rectangle A**d** est au volume engendré par la figure AB**de** comme la surface conique KF est à la surface courbe du conoïde MLF. La quadrature de cette dernière surface dépend dès lors de la cubature du solide engendré par la révolution de la figure AB**de**. Or, le volume de ce dernier solide est égal à celui du cylindre engendré par le rectangle AC**de**, diminué du volume du conoïde hyperbolique BC**d**; mais la détermination de ce dernier volume avait été réduite par Archimède (voir la note 4 de la p. 263) à la cubature du cône de révolution, c'est-à-dire à la quadrature du cercle.

Quant aux résultats obtenus par ces considérations on les trouve aux „Theoremata XV—XVII" (p. 264—267) et aux „Problemata I et II" (p. 267—270) qui contiennent la réduction de la quadrature de la surface du conoïde à la quadrature du cercle avec les conséquences que Huygens en a tirées et les problèmes qu'il y a rattachés.

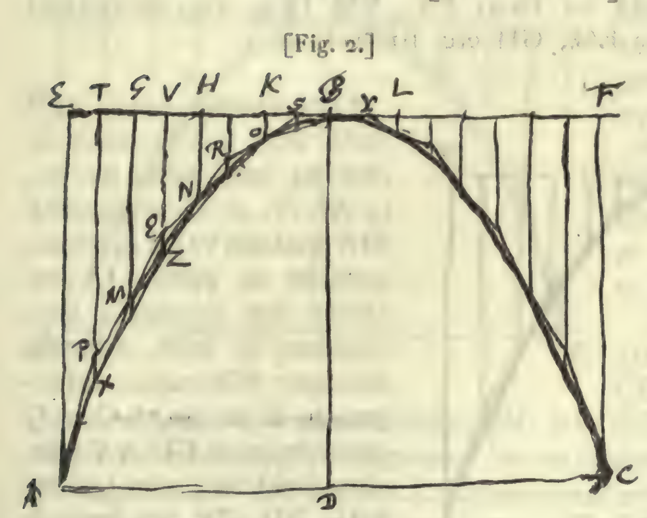
Sur la manière dont Huygens a publié ces résultats ou les a faits connaître à ses correpondants on peut consulter les notes 1 de la p. 264, 4 de la p. 266 et 10 de la p. 267.

[3]) Comparez le dernier alinéa de la p. 253.

[Deuxième Partie [4]).]

[Definitio I.]

[Fig. 2.]



Si circa parabolam ab axe æqualiter fectam defcriptum fuerit rectangulum AEFC eandem cum parabole bafin eandemque altitudinem habens, Dividatur autem latus rectanguli EF quod parabolam in vertice contingit in partes æquales quotlibet EG, GH, HK, KB, BL, &c. numero pares. Et ducantur ab omnibus divifionum punctis rectæ parabolæ occurrentes, et axi parallelæ GM, HN, KO, &c. atque per fingula occurfus puncta ducantur rectæ parabolam tangentes uti et a terminis bafeos A, C. hæ omnes fibi invicem occurrentes, una cum parte quadam tangentis in verticem, conftituent circa parabolen lineam quandam inflexam, quæ vocetur ordinatè circumfcripta.

Hanc autem majorem effe liquet longitudine parabolæ cui circumfcripta eft, quum enim utriufque ijdem fint termini A, C; fintque in eafdem partes cavæ, neceffe eft comprehendentem comprehenfa majorem effe. hoc enim et ab Archimede in libris de Sphæra et Cylindro [5]) fumptum fuit.

---

[4]) Cette partie traite, suivant la méthode des anciens, de la réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole. Elle est empruntée aux p. 47—60 du livret de Philips, et ensuite à des feuilles détachées; voir la note 2 de la 248.

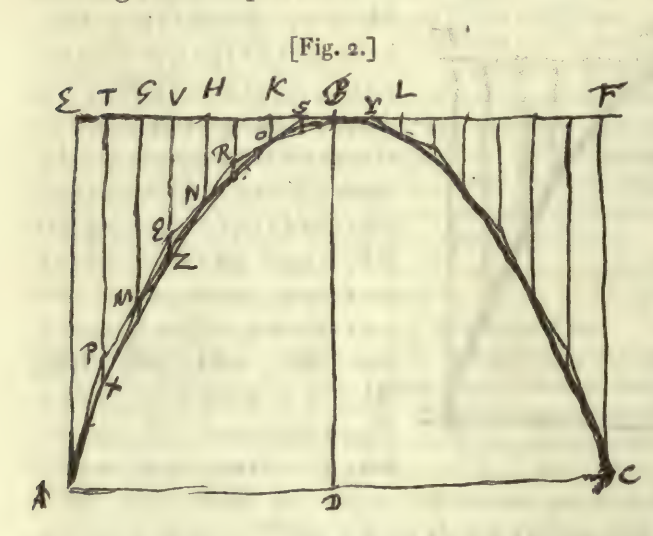
Nous avons introduit une division du texte en „Definitiones", „Lemmata" et „Theoremata", telle que Huygens l'aurait apportée s'il avait publié la Pièce, comme c'était sans doute son intention, quoiqu'il n'y ait pas donné suite; consultez à ce propos sa lettre à Kinner à Löwenthurn, p. 503 de notre T. II.

[5]) Voici le postulat en question qu'on trouve au début de l'ouvrage mentionné: „Linearum eosdem terminos habentium rectam minimam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si

[THEOREMA I.]

Defcriptâ circa parabolen lineâ ordinatè, fi ab omnibus flexionis punctis ducantur axi parallelæ quæ occurrant lateri circonfcripti rectanguli ut funt PT, VQ [Fig. 2.], divident hæ fegmenta prius facta EG, GH etc. bifariam.

[Fig. 2.]



Connectantur enim rectâ lineâ duo quævis inter fe proxima contactuum puncta, ut M, N, et occurrat rectæ MN producta VQ in Z. itaque, quoniam ex puncto Q duæ eductæ funt parabolam contingentes in MN, bifariam dividetur MN tactus conjungens in Z per 30.2i. Con. [1]) quamobrem et GH in V bifariam dividetur, cum tres hæ MG, NH, ZV fint inter fe parallelæ. Similiter ratione liquet etiam fegmentum KB axi proximum à tang. RS bifariam dividi in S.

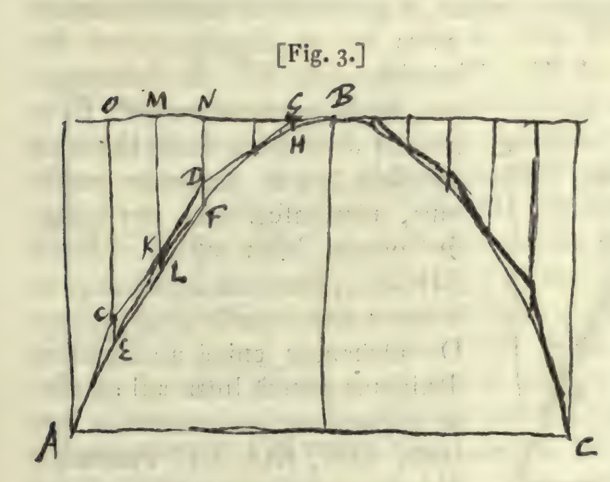
[THEOREMA II.]

Si circa parabolen ab axe fuo æqualiter divifam linea ordinatè circumfcripta fuerit, et à fingulis punctis quibus

eosdem habuerint terminos, eas inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprendatur ab altera, vel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprensam esse minorem" (voir la p. 2 de l'édition de Bâle, citée dans la note 3, p. 274 du T. XI, ou les p. 9—11 du T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI).

[1]) Il s'agit de la „Prop. XXX du „Lib. II" des „Conicorum libri quattuor" d'Apollonius. Voir la p. 55 verso de l'édition de Commandin citée dans la note 4 de la p. 6 de notre T. I où l'on lit: „Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum punctum conueniant: diameter, quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit."

inflexa eſt ad parabolam rectæ ducantur axi parallelæ eæ omnes inter ſe æquales erunt.



[Fig. 3.]

Sit enim parabolæ ABC linea circumſcripta ordinatè, et ab inflexionis angulis C, D, G, &c. ductæ ſint CE, DF, GH &c. axi parallelæ, dico has omnes ſibi æquales effici.

Producantur namque binæ quævis ipſarum ſibi proximæ ut EC, DF, donec occurrunt ei quæ tangit parabolam in vertice, in O et N.

Producatur item MK, quæ definit punctum contactus rectæ CD, et occurrat rectæ EF in L. Quoniam igitur per præced. lineæ DN, CO bifariam ſecant æqualia ſegmenta tangentis in vertice; Erunt quoque horum dimidia NM, MO æqualia quare et EL æqualis LF. Eſt autem LK diameter parabolæ per cujus terminum ducta eſt tangens CD. Ergo per 5.2i Con. [2]) erunt CD, EF parallelæ. ac proinde parallelogrammum erit CDFE, ideoque æqualia inter ſe, oppoſita ipſius latera, CE, DF. Eodem modo demonſtrabitur DF eſſe æqualis GH, atque ita continuè procedendo omnes tandem à punctis flexionum eductæ inter ſe æquales eſſe oſtendemus.

[Theorema III.]

Data parabola ab axe ſuo æqualiter diviſa, poteſt circa eam linea ordinatè deſcribi, quæ ſupereſt parabolæ exceſſu qui ſit minor quavis propoſita linea.

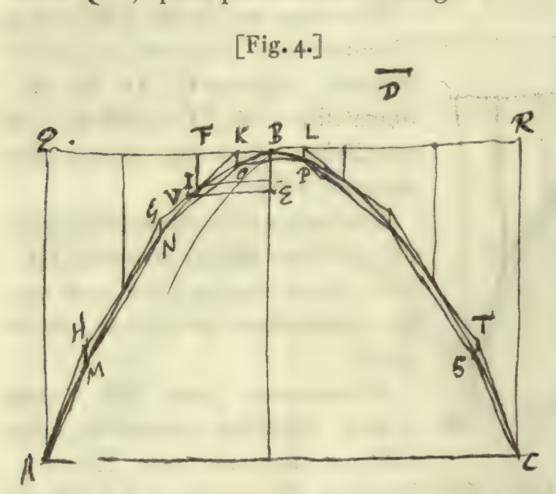
Sit enim data Parabola qualis dicta eſt ABC, lineaque propoſita D [Fig. 4.]. Sumatur in axe parabolæ à vertice B intervallum BE, quod ſit duplum lineæ D.

---

[2]) Voir la note 32, p. 108 du T. XI.

Et ducatur ordinatim applicata EV. Deſcripto itaque circa parabolen rectangulo AQRC eandem baſin eandemque cum ipſa altitudinem habente, poteſt ipſius latus QR, quod parabolam contingit in vertice, in partes dividi æquales numero pares ita ut ſingulæ earum ſint minores rectâ VE. Sit factum igitur, ſitque partium una BF. Et ex punctis diviſionum ductis lineis axi parallelis, quæ parabolæ occurrant, circumſcribatur per occurſus puncta linea inflexa ordinatè AHGKL, dico eam ſuperare parabolam minori exceſſu quam ſit linea D. Ducantur enim ab omnibus flexionum punctis lineæ axi parallelæ et parabolæ occurrentes ut ſunt HM, GN, KO, LP. Punctaque ſingula occurſus cum proximis ſibi jungantur rectis PO, ON, NM

[Fig. 4.]



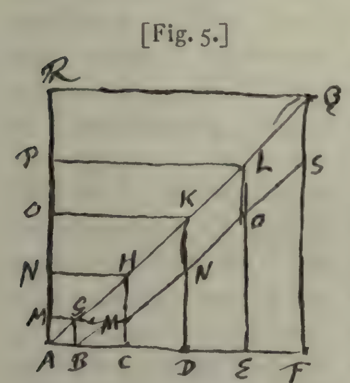
ab extremis vero quæ baſi proxima ſunt M et S ducantur rectæ ad terminos baſeos MA, SC. Eſt igitur inſcripta quoque hoc modo linea AMNOPSC intra parabolam, eoſdem cum illa terminos habens inque eandem parte cava, quæ proinde comprehendente curva minor erit. Quia autem ſicut in præc. oſtenſum fuit [1]), MN eſt æqualis HG, et NO æqualis GK atque ita unaquæ pars inſcriptæ æqualis parti circumſcriptæ ſibi parallelæ uſque ab M ad S; Erit proinde tota pars inſcriptæ MNOPS æqualis parti circumſcriptæ HGKBLT. at verò duæ HM, MA ſimul majores ſunt HA, ſimiliterque duæ ſimul TS, SC majores TC; itaque apparet totam lineam inſcriptam parabolæ unà cum duabus MH, ST majorem eſſe tota circumſcripta. Quare multo magis parabola una cum duabus MH, ST excedet quoque circumſcriptum ſibi ordinatè. Si igitur oſtendatur duas MH, ST ſimul minores eſſe data D; patebit minorem eſſe exceſſum ordinatè circumſcriptæ ſupra parabolam, quam eſt dicta D linea. Illud autem hinc liquebit, lineæ HM, ST ſingulæ æquantur ipſi KO. Hæc vero quarta pars eſt FI; cum ſit FI ad KO ut quadratum FB ad qu. BK, ſitque FB dupla ipſius BK. Igitur duæ ſimul HM, ST æquantur dimidiæ FI. Eſt autem FI minor quam BE, quoniam FB minor quam VE. Ergo duæ ſimul HM, ST minores erunt dimidiâ BE hoc eſt datâ D. quod demonſtr. ſupererat.

[Lemma I.]

Si fuerit ſeries quadratorum quorum latera eadem proportione creſcant qua numeri ab unitate impares, eorum exceſ-

ſus, quo unumquodque ſibi proximum ſuperat creſcent ſecundum ſimplicem numerorum ab unitate ſeriem[2]).

[Fig. 5.]



Sint in recta AF ſumptæ quotcunque AB, AC, AD, AE, AF &c. quarum inter ſe ratio eadem ſit quam numerorum 1, 3, 5, 7, 9 &c. Sintque quadrata ab ipſis deſcripta BM, CN, DO, EP, FR. Sunt igitur exceſſus quadratorum gnomones BGMNHC, CHNOKD, DKOPLE, ELPRQF, quos oſtendendum eſt inter ſeſe eſſe ſicut numeri deinceps ab unitate 1, 2, 3, 4, &c. Ducatur ex A diameter communis omnium quadratorum AQ, ſumptâque CM[3]) ∞ BG, agatur MS dictæ diametro parallela. Erunt igitur omnes hæ inter ſe æquales MH, NK, OL, SQ, et ſingulæ ipſi BC, quia ſumpta fuit MC ∞ GB hoc eſt AB, eratque tota CH ∞ AC. Sunt autem et BC, CD, DE, EF inter ſeſe æquales. quare æquales quoque erunt MN, NO, OS, et ſingulæ ipſi GH. Fit igitur trapezio BGHC ſimile et æquale trapez. CMND. Hoc autem trapez. duplum eſt Δ^{li} GMH, (quoniam HM dupla eſt MC) ac proinde æquale ▱° MHKN. Ergo et CMND trapez. æquale erit parallelogr°. MHKN. Itaque trapez. CHKD duplum eſt trapezij CMND ideoque et trapezij BGHC. Ideoque et gnomon CKN[4]) duplus gnomonis BHM. Rurſus trapez. DNOE quia eſt ſimile et æquale trapez.° CHKD, erit duplum quoque trapez. BGHC. ▱ vero KO ipſi trapez. BGHC æquale eſt, cum ſit æquale ▱° HN. Ergo totum trapez. DKLE erit triplum trapezij BGHC. Quare et gnomon DLO triplus gnomonis BHM. Simili ratione quoniam trapez. EOSF ſit ſimile et æquale trapezio DKLE, erit illud quoque triplum trapezij BGHC. at ▱ LS ipſi trapezio BGHC æquale eſt. Ergo totum trapez. ELQF quadruplum erit trapezij BGHC, et gnomon EQP quadruplus propterea gnomonis BHM. Itaque oſtenſum eſt gnomones omnes deinceps creſcere ſecundum rationem numerorum 1, 2, 3, 4. Et patet eandem progreſſionem continuatum iri, quotcunque demum quadrata exponantur.

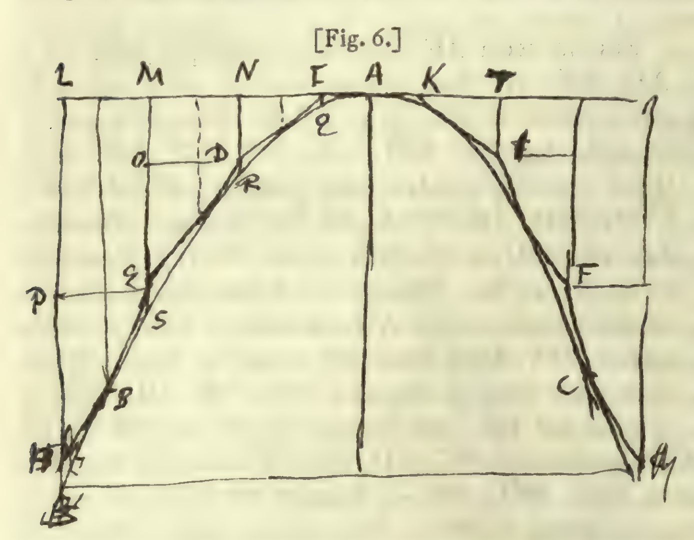
[Theorema IV.]

Circa parabolam BAC [Fig. 6], æqualiter ab axe diviſam, linea ordinatè BEDIKF circumſcripta ſit cujus partes baſi

[1]) Voir la démonstration du théorème précédent.
[2]) Comparez la suite numérique qu'on trouve à la p. 234 à côté de la Fig. 1.
[3]) On remarquera le double emploi dans la figure et dans le texte des lettres M, N et O.
[4]) Notation abrégée pour CDKONHC.

proxime EB, FC ultra basin producantur ut fiant sui ipsius duplæ. Et ducantur ab omnibus flexionis punctis, item a terminis duarum ultra basin productarum, rectæ axi parallelæ quæ occurrant parabolæ in vertice tangenti, sintque HL, EM, DN, FT [1]). Et notetur excessus quibus unaquæque harum a sibi proxima superatur, ut sit EO excessus EM supra DN; HP excessus HL supra EM. Dico seriem linearum quarum prima sit DN reliquæ vero deinceps excessus omnes dicti OE, PH, eadem ratione crescere qua numeri ab unitate crescunt. Hoc est ipsius DN duplam esse EO, triplam vero HP; atque ita deinceps si pluribus angulis fuerit ordinate circumscripta.

[Fig. 6.]



Productis enim ME, ND, ut parabolæ occurrant in S, et R, ductaque itidem IQ axi parallela. Constat ex præc. [2]) ipsi IQ æquales esse singulas DR, ES, HB [3]). Constat etiam lineas AI, AN, AM, AL crescere secundum rationem numerorum imparium ab unitate 1, 3, 5, 7. Sicut autem harum inter se quadrata ita sunt longitudine IQ, NR, MS, LB. Itaque harum excessus qua unaquæque harum à sequente superatur erunt sicuti numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, &c. [4]). Excessus autem quo superatur IQ àb NR est ND, cum sit DR æqualis IQ; Et excessus qua NR superatur àb MS est OE, quum sit NR æqualis utrisque simul MO, ES. Similiterque excessus quo MS superatur àb LB est PH, quoniam MS æqualis est duabus simul LP, HS [5]). Ergo ND, OE, PH, crescent secundum rationem numerorum ab unitate 1, 2, 3, 4, &c. Quod erat dem.

---

[1]) La lettre T est mal placée dans la figure, il faut la transporter vers la droite au pied de la perpendiculaire qui part du point F.

[2]) Voir le theorême II, p. 238—239.

[3]) Ici et dans ce qui suit B indique le point le plus bas au côté gauche de la figure et non pas le point B qui se trouve entre H et E.

[4]) D'après le lemme qui précède.

[5]) Lisez: HB.

[Theorema V.]

Eſto parabola ab axe æqualiter diviſa ABC, ſi circa eam linea ordinate deſcribatur, hujuſque partes quæ parabolam ad terminos baſis contingunt ut KA, producantur ultra baſin ut fiant ſui ipſius duplæ.

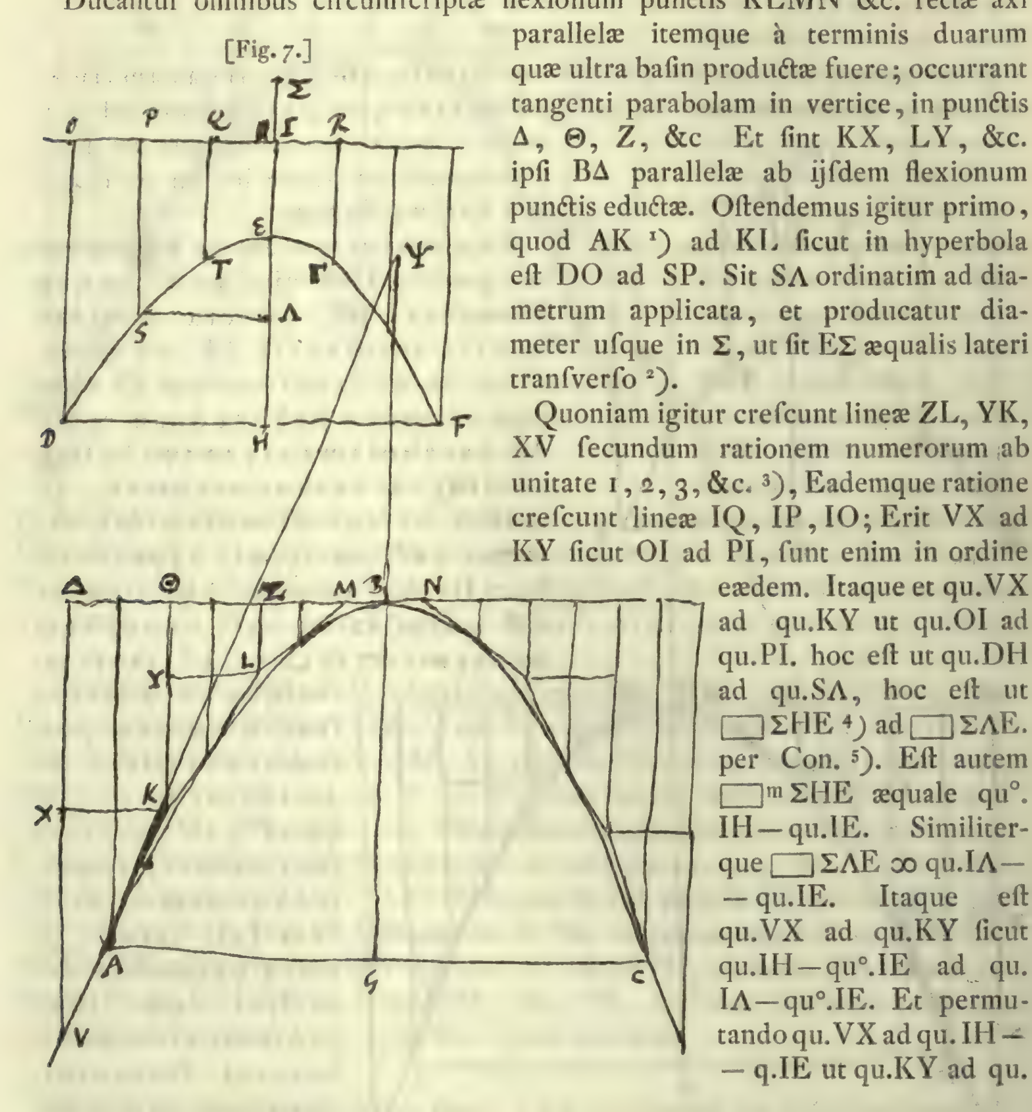
[Fig. 7.]

Exponatur autem et hijperboles portio DEF ejuſmodi, in qua diameter HE juncta dimidio lateris tranſverſi EI, ad dimidium latus tranſverſum EI eandem rationem habent quam recta Aψ parabolam in termino baſeos contingens axique occurrens, ad ipſius baſeos dimidium AG. Et ſuper baſi portionis hyperbolæ parallelogrammum conſtituatur OF cujus latus baſi oppoſitum per centrum ſectionis I tranſeat, reliqua vero latera ſint diametro portionis parallela. Et dividatur latus □^{i} quod per centrum ſectionis eſt, in partes totidem ac diviſum fuit latus □^{i} circa parabolen deſcripti cum linea ordinatè circumſcriberetur. Ducanturque a punctis diviſionum rectæ diametro parall. PS, QT, RΓ, &c. quæ hyperbolæ occurrant. Dico lineam OD ad reliquas ſingulas PS, QT, IE, &c. eadem proportione referri qua et VK ad ſingulas rectas KL, LM, MN, &c. ſi utrobique eadem in

ordine ſumantur. nam quod harum multitudo eadem ſit atque illarum, ex conſtructione manifeſtum eſt.

Ducantur omnibus circumſcriptæ flexionum punctis KLMN &c. rectæ axi parallelæ itemque à terminis duarum quæ ultra baſin productæ fuere; occurrant tangenti parabolam in vertice, in punctis Δ, Θ, Z, &c Et ſint KX, LY, &c. ipſi BΔ parallelæ ab ijſdem flexionum punctis eductæ. Oſtendemus igitur primo, quod AK [1]) ad KL ſicut in hyperbola eſt DO ad SP. Sit SΛ ordinatim ad diametrum applicata, et producatur diameter uſque in Σ, ut ſit EΣ æqualis lateri tranſverſo [2]).

[Fig. 7.]



Quoniam igitur creſcunt lineæ ZL, YK, XV ſecundum rationem numerorum ab unitate 1, 2, 3, &c. [3]), Eademque ratione creſcunt lineæ IQ, IP, IO; Erit VX ad KY ſicut OI ad PI, ſunt enim in ordine eædem. Itaque et qu.VX ad qu.KY ut qu.OI ad qu.PI. hoc eſt ut qu.DH ad qu.SΛ, hoc eſt ut $\square$ ΣHE [4]) ad $\square$ ΣΛE. per Con. [5]). Eſt autem $\square^{m}$ ΣHE æquale qu°. IH — qu.IE. Similiterque $\square$ ΣΛE ∞ qu.IΛ — — qu.IE. Itaque eſt qu.VX ad qu.KY ſicut qu.IH — qu°.IE ad qu. IΛ — qu°.IE. Et permutando qu.VX ad qu. IH — — q.IE ut qu.KY ad qu.

---

[1]) Liſez : VK.

[2]) On a donc IΣ = IE; si Huygens a pris IΣ plus courte que IE, c'est parce que la ligne OR se trouvait tout près du bord de la feuille.

IΛ—qu.IE. Porro quoniam ex datis eſt ſicut ΨA ad AG, hoc eſt ſicut VK ad KX ita HI ad IE; erit quoque ſicut qu.VK ad qu. KX ita qu.HI ad qu.IE. quare et per converſionem rationis erit qu.VK ad exceſſum qu.VK ſupra qu.KX, hoc eſt ad qu.VX ſicut qu.HI ad qu.HI—qu.IE. Et permutando, qu.VK ad qu.HI ſicut qu.VX ad qu^m^.HI—qu°.IE.

Sicut autem qu.VX ad qu.HI—qu.IE item oſtendimus eſſe qu.KY ad qu.IΛ—qu.IE. Ergo et qu.VK ad qu.HI ſicut qu.KY ad qu.IΛ—qu.IE. Verum ut qu.VK ad qu.HI ita eſt qu.KX ad qu.IE. (nam modo diximus eſſe qu.VK ad qu.KX ut qu.HI ad qu.IE). Ergo et qu.KY ad qu.IΛ—qu.IE ut qu.KX ad qu.IE. Et permutando qu.KY ad qu.KX ſive ad qu.YL ut qu.IΛ—qu.IE ad qu.IE. Itaque et componendo erit ſicut duo ſimul, qu.KY et qu.YL hoc eſt ſicut qu.KL ad qu.YL ita qu. IΛ ad qu.IE. Sed ut qu.YL ſive qu.KX ad qu.KV, ita eſt qu.IE ad qu.IH, ut ſupra patuit. Ergo ex æquali erit qu.KL ad qu.KV ſicut qu.IΛ ad qu.IH, hoc eſt ſicut qu.PS eſt ad qu.OD. Et convertendo. Quamobrem et linea OD erit ad SP ſicut VK ad KL.

Eodem modo oſtendimus quod VK ad LM ſicut DO ad TQ. Sed et quod VK ad MN ſicut DO ad IE manifeſtum fiet hac ratione. Eſt enim MN æqualis ipſi KX. Sicut autem VK ad KX hoc eſt ut ΨA ad AG ita poſitum fuit eſſe HI ſive DO ad IE. Quare et VK ad MN ſicut DO ad IE. Itaque conſtat lineam OD ad ſingulas SP, QT, IE eadem ratione referri qua et DO ad ſingulas SP, TQ, EI [6]).

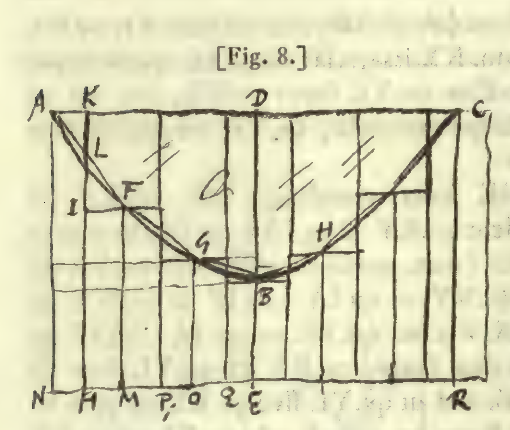
[Definitio II.]

Data hyperboles portione, ſi ſuper baſi ipſius ▭ deſcribatur ita ut latus ▭ quod baſi oppoſitum eſt tranſeat per centrum ſectionis reliqua vero diametro parallela ſint vocetur ejuſmodi ▭ ad centrum terminatum. pars vero ejuſdem quæ dempta hijperboles portione remanet vocetur ſpatium reſiduum.

---

3) Voir le Théorème IV, p. 241—242.
4) C'est-à-dire le rectangle dont les côtés sont égaux à ΞH et HE.
5) Il s'agit de la Prop. 21 du Livre 1 des Coniques d'Apollonius; voir la note 12, p. 300 du T. XI.
6) Lisez: qua et VK ad singulas KL, LM, MN.

[Fig. 8.]



Et ſi dividatur hujus $\square^{i}$ latus quod per centr. ſectionis tranſit in partes æquales quotlibet, numero pari, aganturque à diviſionum punctis rectæ diametro parall.^{æ} quæ portioni occurrant. Circa has autem pari ipſis altitudine parallelogramma deſcribantur, lateribus diametro portionis parallelis baſes vero ſegmentis rectæ [NM, MO, &c.] [1]) æquales habentia et a lineis [FM, GO, BE, &c.] [1]) bifariam diviſas. Figura ex his $\square^{is}$ compoſita et ex duobus dimidiæ horum latitudinis $\square^{is}$ [ut ANHK] dicatur ordinatè circa ſpatium reſiduum conſtituta.

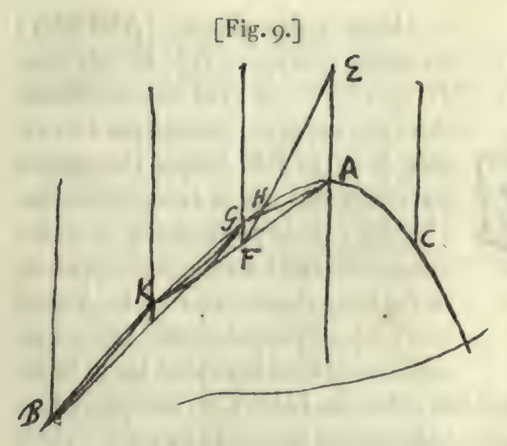
[Theorema VI.]

Data autem hyperbolæ portione ſi $\square^{m}$ ei circumſcribatur ad centrum terminatum et figura ordinatè circa ſpatium reſid. porro deſcribatur. Dico hanc ipſo ſpatio reſiduo majorem eſſe.

Jungantur enim [Fig. 8] rectis lineis puncta [A, F, G, B, H, &c.]. Quoniam igitur æquales et parallelæ inter ſe ſunt AK, IF, neceſſe eſt fieri æqualia quoque Δ.^{a}LKA, LIF, ideoque æquale eſſe trapezium AFMN utrique ſimul $\square^{o}$AH, HF. Eadem ratione trapezium FGOM æquale erit duobus $\square^{is}$FP, PG. Et trapez. GBEO, $\square^{is}$GQ, QB, atque ita de cæteris. Unde patet figuram ex omnibus trapezijs compoſitam AFGBHCRN æquari figuræ ex $\square^{is}$ ordinatè circumſcriptæ. Dicta vera figura ex trapezijs compoſita major eſt ſpatio reſiduo, quoniam ipſum continet atque inſuper ſegmenta quædam ipſius portionis. Ergo et figura ex $\square^{is}$ ordinatè circumſcripta major erit dicto reſiduo ſpatio. quod erat oſtend.

[1]) Ici Huygens indiqua par des points qu'il y avait encore quelque chose à ajouter. Aussi, à côté de la figure avec les lettres que nous avons reproduite, il y en a une autre, presque identique, sans lettres. C'est de celle-ci sans doute qu'il s'est servi pendant la rédaction de cette définition; celle avec les lettres étant donc postérieure à cette rédaction.

[Lemma II [2]).]



[Fig. 9.]

Si hyperbolæ CAB occurrant rectæ quotvis parallelæ, et æqualibus intervallis à se invicem distantes in punctis C, A, G, K, B fueritque earum una EA diameter sectionis. Jungantur autem rectis lineis duo quæque sibi vicina occursuum puncta. dico, segmentorum hyperbolæ hisce lineis abscissorum, maxima esse quæ diametro adjacent AG, AC. Reliqua vero eo quæque minora quo ulterius ab his absuerint.

Jungatur enim AK. eique occurrat producta IG [3]) in F. dividet autem ipsam bifariam propter æqualem parallelarum linearum distantiam. ducatur ad centrum sectionis recta FE, secans hyperbolen in H, secabit enim ipsam quia centrum E extra sectionem est, punctum vero F intra. Et erit FH diameter portionis AHKA, ipsam proinde in duo æqualia secabit. quia autem recta FE tota inter parallelas EA, GF sita est, sequitur intersectionem H contingere inter G et A. Itaque frustum FHA pars erit frusti FGA. Unde quum recta FH dividat segmentum AGKF in duo æqualia, apparet FG ipsum dividere inæqualiter, ita ut majus sit spatium FGA quam FGK. Verum triangula hisce spatijs inscripta FGA, FGK inter se æqualia sunt. Igitur residuum segmentum GA majus esse necesse est residuo segmento GK. Eodem modo ostendetur segmentum GK majus esse segmento KB atque ita unumquodque eo quod proxime subsequitur. Quare constat propositum.

[Theorema VII.]

Data hijperbolæ portione, descriptoque circa eam ▭° ad centrum terminato, dico circa spatium residuum figuram

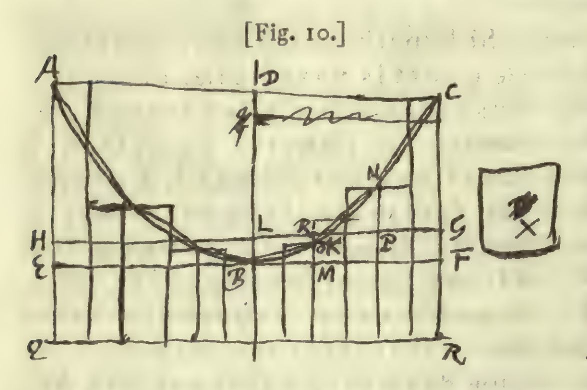
---

[2]) Comme l'état du manuscrit le prouve, le „Lemma II" fut rédigé après le Théorème VII, le besoin d'un tel lemme s'étant fait sentir pendant la rédaction de la démonstration de ce théorème.

[3]) La lettre I manque dans la figure; on la retrouve toutefois dans une autre figure qui est moins complète sous d'autres respects. La ligne IG est la parallèle à l'axe AE, qui passe par G.

ordinatè deſcribi poſſe quæ ſuperet ſpatium reſiduum minori exceſſu quam ſit propoſitum quodvis ſpatium.

[Fig. 10.]



Detur enim portio [ABCDA] itemque ſpatium [X]. Et circumſcripto □° ad centrum terminato ducatur tangens portionem in vertice B recta EF. Eique alia agatur parallela HG, ita ut comprehenſum □ EG ſit duplum ſpatij X. Secet autem HG recta diametrum portionis in L, hijperbolen vero in K. Poteſt jam itaque figura ordinate circa ſpatium reſiduum conſtitui ita ut baſes ſingulæ □orum ex quibus ipſa componitur ſint minores rectâ LK. Sit igitur factum et jungantur bina quæque puncta in hyperbola quibus latera dictorum □orum bifariam ſecantur rectis lineis [CN, NO, OB] &c. Cum igitur ſegmentum hyperbolæ vertici proximum BO ſit minus triangulo BOM; triangulum BOM minus quam dimidium □^{i}ML; (nam quia BM minor eſt ordinatim applicatâ LK, etiam MO minor erit quam BL. ideoque △^{m} BOM minus quam dimidium □ ML). Erit proinde et dictum ſegmentum BO omninò minus quam $\frac{1}{2}$ □ ML. Reliqua vero ſegmenta hijperbolæ quæ ab eadem parte diametri ſunt ON, NC, ſingula minora cum ſint ſegmento BO, per [Lemma præcedens], totidem vero □^{a} MP, PF æquentur ſingula □° ML; Erunt proinde omnia ſimul ſegmenta hæc BO, ON, NC, minora $\frac{1}{2}$ □° BG. Eadem vero ratione, et ea quæ ad alteram partem diametri ſunt ſegmenta, minora probabuntur $\frac{1}{2}$ □° BH. Itaque omnia ſimul ſegmenta ab hyperbolæ portione abſciſſa minora erunt dimidio □ EG, hoc eſt minora ſpatio dato X. Ideoque ſi ſpatio reſiduo dicta segm.^{a} addantur compoſitum minus erit quam hoc ipſum ſpatium + X. Atqui dicta ſegmenta addita ſpacio reſiduo, æquant figuram ordinatè circa ſpatium reſiduum ex □^{is} circumſcriptam, ſicut in præc. demonſtratione [1]) oſtenſum fuit. Ergo figura ordinatè circumſcripta minor erit dicto ſpatio una cum ſpatio X. Unde manifeſtum eſt exceſſum quo figura ordinate circumſcripta ſuperat idem ſpatium à rectis AQ, QR, RC et hijperbola CBA comprehenſum, minorem eſſe ipſo X ſpatio. Quare conſtat propoſ. [2]).

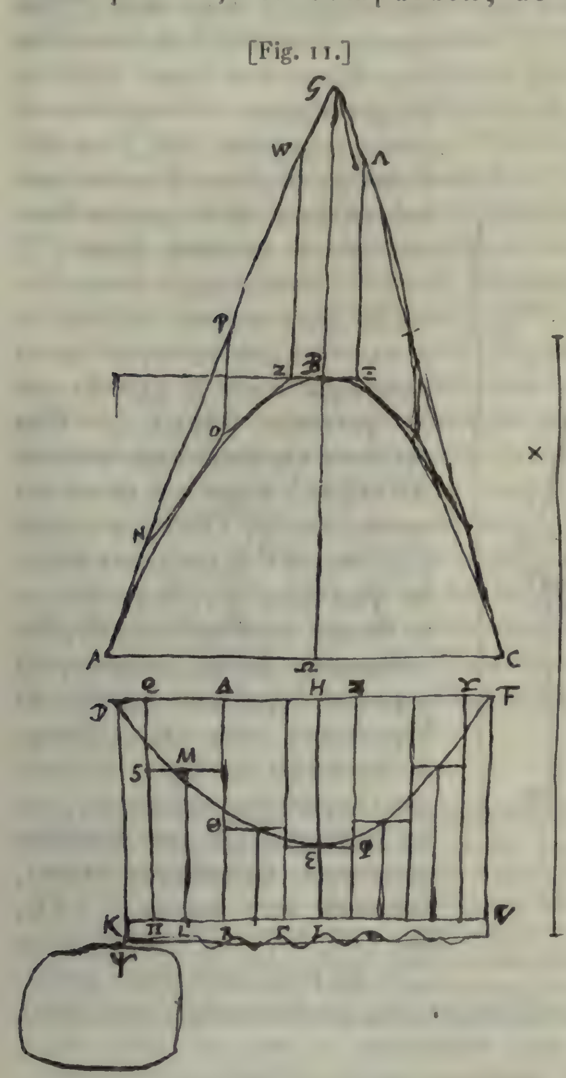
[1]) Voir la démonstration du „Theorema VI", p. 246.

[2]) Ici finit la partie que nous avons empruntée au livret de Philips. Le reste se trouve sur des feuilles détachées dont la première porte le numéro 5. En effet, la démonstration du „Lemma II" qui, comme nous l'avons dit dans la note 2 de la p. 247, se trouve dans le livret à la suite du „Theorema VII", est suivie par les mots: „Reliqua in folio. Incipiunt pag. 5. signo . .", accompagnés d'un signe de renvoi qu'on retrouve sur la feuille prémentionnée.

[Theorema VIII.]

Si fuerit Parabola ab axe æqualiter divisa, itemque Hijperbolæ portio, ita comparatæ, ut quam rationem habent duo simul latera trianguli isosceles communem cum portione parabolica basin et duplam altitudinem habente ad ipsam basin, eandem habent hijperbolæ portionis diameter [HE] juncta ½ lateris transversi ad dimidium latus transversum. Et describatur circa hyperboles portionem rectangulum ad centrum sectionis terminatum. Erit sicut dicta duo latera trianguli circa parabolam descripti ad parabolæ longitudinem, ita ▭ circa hijperbolen descriptum ad partem sui quæ dempta hyperboles portione relinquitur [3]).

[Fig. 11.]



Esto parabola ABC qualem diximus, sitque supra basin ipsius AC descriptum △ AGC axem sive altitudinem parabolæ duplam habens unde fiet ut latera GA, GC parabolam contingant.

Porro et hyperboles portio sit DEF cujus diameter EH, dimidium vero lateris recti [4]) EI. Sitque HI ad IE sicut duo simul latera GA, GC

[3]) Comparez le premier alinéa de la Première Partie, p. 235.

[4]) Lisez: lateris transversi.

ad basin AC. Describaturque circa hyperboles portionem rectangulum ad centrum sectionis terminatum FK. Dico itaque esse sicut duo latera AG, GC ad longitudinem parabolæ ABC, ita □ FK ad spatium residuum DKVFED.

[Fig. 11.]

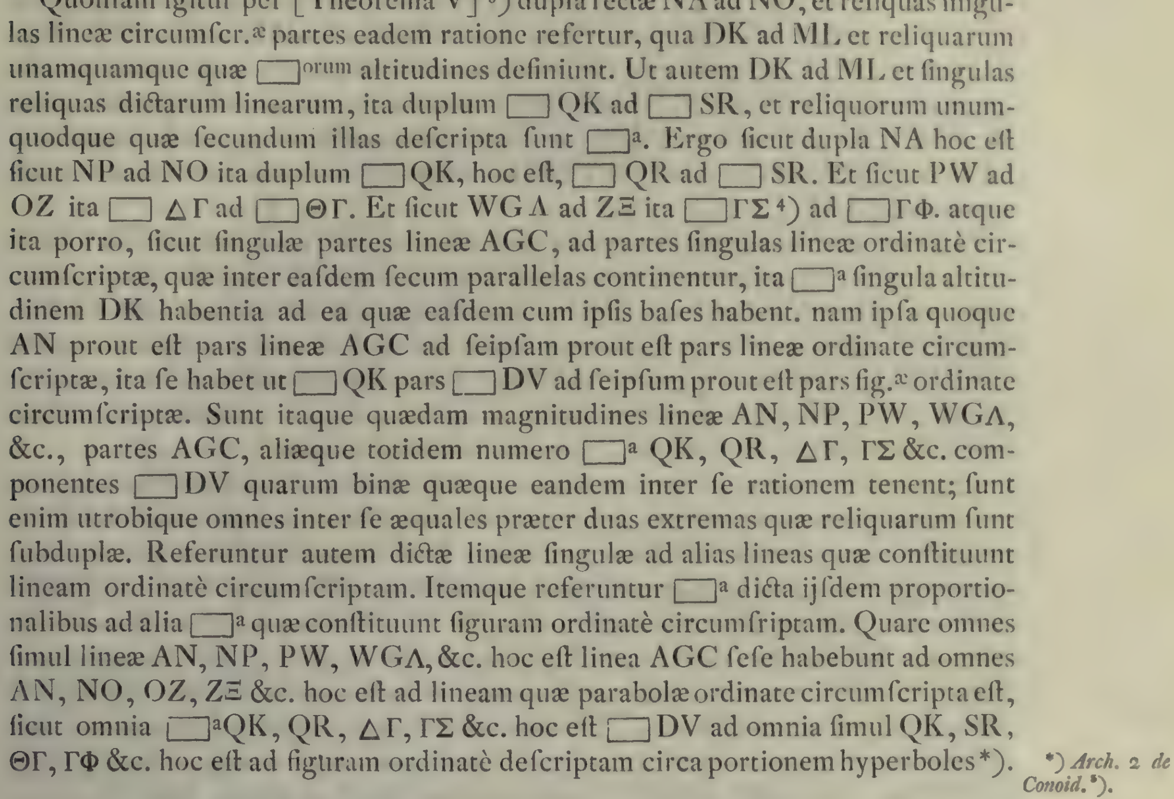
Si enim dictæ rationes æquales esse negentur. Ergo sicut □ ad spatium DKVFED ita erunt dicta duo latera sive linea AGC ad lineam aliquam vel majorem vel minorem parabola ABC. Sit primo, si fieri potest, linea X major parabola ad quam AGC eandem dicatur habere rationem quam □ ad ⊔. Potest itaque circa parabolam linea ordinatè describi ita ut excessus quo descripta superat parabolam minor sit excessu quo X parabola superat [1]). Esto descripta ejusmodi linea ordinate ANOZΞC. Ergo ipsa minor erit quam linea X. Dividatur deinde □i latus KV in tot partes æquales quot fuere in recta parabolam in vertice contingente ad circumscribendam lineam ordinatè. Et a punctis sectionum ducantur ad hyperbolam rectæ axi parallelæ, et secundum has figura ordinatè circa hyperbolen describatur, cujus extrema □a quæ dimidiam cæterorum latitudinem habent, altitudine vero æquant □ FK, sint QK, YV. Et reliqua etiam □a ad hanc altitudinem producantur. A punctis vero quibus linea ordinate circum parabolem descripta inflexa

[1]) D'après le „Theorema III", p. 239.

[2]) Cette Proposition n'a pas été formulée explicitement, mais elle résulte presque immédiatement du „Theorema I", p. 238.

[3]) Voir la p. 243.

[4]) Voir la lettre peu lisible à droite de la lettre H.

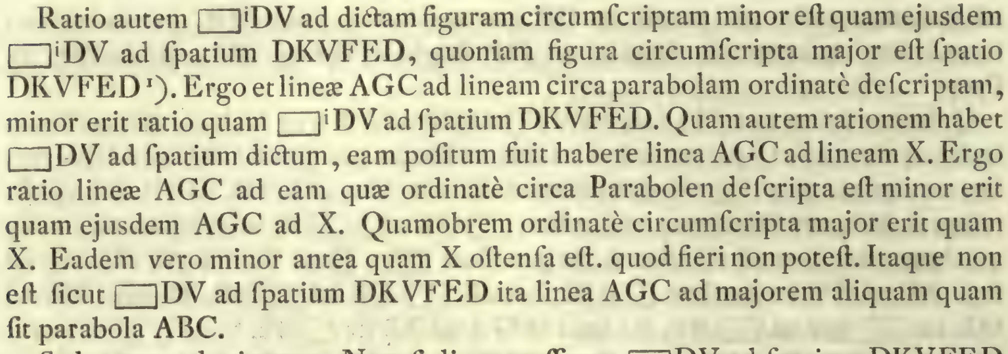


eſt ducantur rectæ axi parall. ut OP quæ quidem in linea AGC partes æquales intercipient quarumque ſingulæ ut NP duplæ erunt ad NA, uti conſtat ex Prop. ... [2]).

Quoniam igitur per [Theorema V] [3]) dupla rectæ NA ad NO, et reliquas ſingulas lineæ circumſcr.æ partes eadem ratione refertur, qua DK ad ML et reliquarum unamquamque quæ □orum altitudines definiunt. Ut autem DK ad ML et ſingulas reliquas dictarum linearum, ita duplum □ QK ad □ SR, et reliquorum unumquodque quæ ſecundum illas deſcripta ſunt □a. Ergo ſicut dupla NA hoc eſt ſicut NP ad NO ita duplum □QK, hoc eſt, □ QR ad □ SR. Et ſicut PW ad OZ ita □ ΔΓ ad □ΘΓ. Et ſicut WGΛ ad ZΞ ita □ΓΣ [4]) ad □ΓΦ. atque ita porro, ſicut ſingulæ partes lineæ AGC, ad partes ſingulas lineæ ordinatè circumſcriptæ, quæ inter eaſdem ſecum parallelas continentur, ita □a ſingula altitudinem DK habentia ad ea quæ eaſdem cum ipſis baſes habent. nam ipſa quoque AN prout eſt pars lineæ AGC ad ſeipſam prout eſt pars lineæ ordinate circumſcriptæ, ita ſe habet ut □ QK pars □ DV ad ſeipſum prout eſt pars fig.æ ordinate circumſcriptæ. Sunt itaque quædam magnitudines lineæ AN, NP, PW, WGΛ, &c., partes AGC, aliæque totidem numero □a QK, QR, ΔΓ, ΓΣ &c. componentes □DV quarum binæ quæque eandem inter ſe rationem tenent; ſunt enim utrobique omnes inter ſe æquales præter duas extremas quæ reliquarum ſunt ſubduplæ. Referuntur autem dictæ lineæ ſingulæ ad alias lineas quæ conſtituunt lineam ordinatè circumſcriptam. Itemque referuntur □a dicta ijſdem proportionalibus ad alia □a quæ conſtituunt figuram ordinatè circumſriptam. Quare omnes ſimul lineæ AN, NP, PW, WGΛ, &c. hoc eſt linea AGC ſeſe habebunt ad omnes AN, NO, OZ, ZΞ &c. hoc eſt ad lineam quæ parabolæ ordinate circumſcripta eſt, ſicut omnia □aQK, QR, ΔΓ, ΓΣ &c. hoc eſt □DV ad omnia ſimul QK, SR, ΘΓ, ΓΦ &c. hoc eſt ad figuram ordinatè deſcriptam circa portionem hyperboles*). *) *Arch. 2 de Conoid.* [5]).

[5]) Il s'agit de la deuxième Proposition de l'ouvrage d'Archimède „De conoidibus et sphæroidibus". Voici cette proposition: „Si fuerint quotcumque numero sumptæ magnitudines, itemque totidem aliæ numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quamcunque unaquaque prius sumptarum ad suam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæque posterius sumptarum ad suam eodem ordine proximam seruet, quæcunque fuerint illæ proportiones, item prius sumptæ magnitudines ad quasdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuscumque proportionibus referantur: sumptæ quoque posterius magnitudines ad quasdam alias totidem, eodem ordine & eisdem proportionibus sint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius sumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparantur, eandem proportionem, quam magnitudines posterius sumptæ omnes habuerint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint similiter comparatæ" (p. 61—62 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. I. p. 290—291, où cette proposition porte le numéro 1).

Afin d'expliquer la portée de cette proposition, supposons qu'on ait une première suite de grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (les parties AN, NP, etc. de la ligne brisée AGC), une deuxième



Ratio autem $\square^i$DV ad dictam figuram circumfcriptam minor eft quam ejusdem $\square^i$DV ad fpatium DKVFED, quoniam figura circumfcripta major eft fpatio DKVFED [1]). Ergo et lineæ AGC ad lineam circa parabolam ordinatè defcriptam, minor erit ratio quam $\square^i$DV ad fpatium DKVFED. Quam autem rationem habet $\square$DV ad fpatium dictum, eam pofitum fuit habere linea AGC ad lineam X. Ergo ratio lineæ AGC ad eam quæ ordinatè circa Parabolen defcripta eft minor erit quam ejusdem AGC ad X. Quamobrem ordinatè circumfcripta major erit quam X. Eadem vero minor antea quam X oftenfa eft. quod fieri non poteft. Itaque non eft ficut $\square$DV ad fpatium DKVFED ita linea AGC ad majorem aliquam quam fit parabola ABC.

Sed neque ad minorem. Nam fi dicatur effe, ut $\square$DV ad fpatium DKVFED ita linea AGC ad minorem aliquam quam fit parabola ABC. Ergo ficut linea AGC ad parab. ipfam ABC ita erit $\square$DV ad fpatium quoddam majus fpatio DKVFED. Efto id fpatium in quo ψ. Quoniam igitur fpatium in quo ψ majus eft fpatio DKVFED poteft circa fpatium DKVFED defcribi figura ordinatè quæ fit minor fpatio ψ [2]). Defcripta itaque intelligatur. Et ex quot $\square^{is}$ compofita eft totidem partibus conftans linea ordinatè circa parabolam defcribatur.

Ergo fimiliter ut prius oftenditur lineam AGC ad ordinate circumfcriptam parabolæ eandem rationem habere, quam $\square$DV ad figuram circa fpatium DKVFED ordinate circumfcriptam. Ratio autem lineæ AGC ad ordinate circa par. defcriptam minor eft quam ejusdem AGC ad ipfam parab. ABC. Ergo et ratio $\square^i$DV ad figuram ordinate defcriptam circa fpat. DKVFED minor erit quam lineæ AGC ad parab. ABC. Sicut autem linea AGC ad par. ABC ita erat $\square$DV ad ψ fpatium. Ergo $\square^i$DV minor erit ratio ad figuram ordinate circa fpatium DKVFED defcriptam, quam ad fpatium ψ. Ideoque dicta figura fpatio ψ major erit. Sed eadem minor quoque dicta fuit. Quod fieri nequit. Ergo neque major eft ratio $\square$DV ad fpat. refid. DKVFED quam lineæ AGC ad parab. ABC. At neque minorem effe demonftratum eft. Ergo eadem erit. Quod erat demonftr.

$b_1, b_2, \ldots b_n$ (les rectangles DΠ, QR, ΔΓ, etc.), une troisième $c_1, c_2 \ldots c_n$ (les côtés AN, NO, etc. de la figure circonscrite à la parabole), une quatrième $d_1, d_2, \ldots d_n$ (les rectangles DΠ, SR, ΘΓ, etc.) et qu'il existe entre les termes de ces suites les relations suivantes:

$$a_1 : a_2 : a_3 \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 \ldots : b_n;$$

$$a_1 : c_1 = b_1 : d_1;\ a_2 : c_2 = b_2 : d_2;\ a_3 : c_3 = b_3 : d_3; \ldots;\ a_n : c_n = b_n : d_n;$$

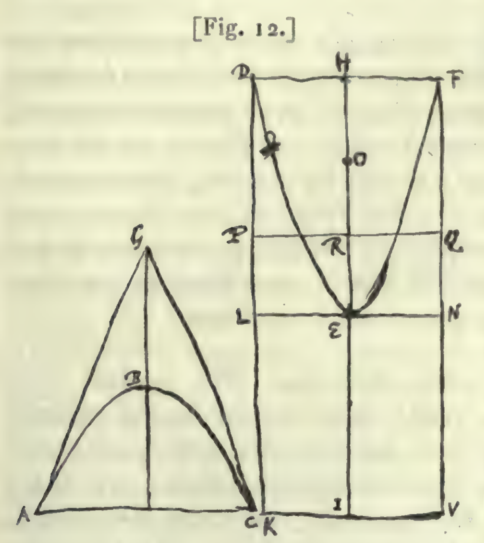
alors la proposition nous apprend qu'on a:

$$\sum_1^n a_p : \sum_1^n c_p = \sum_1^n b_p : \sum_1^n d_p.$$

[Theorema IX.]

Iiſdem poſitis[3]) ſi ducatur LN quæ hijperbolen in vertice contingat. Dico longitudinem parab. ABC eſſe ad baſin AC, ſicut ſpatium reſiduum DKVFED ad □^{m}LV.

[Fig. 12.]



Quia enim oſtenſum fuit lineam parab. ABC eſſe ad lineam AGC ſicut ſpatium DKVFED ad □DV. Eſt autem linea AGC ad baſin AC ſicut HI ad IE, hoc eſt, ut □DV ad □LV. Erit proinde ex æquo ſicut parab. ABC ad baſin AC, ita ſpatium DKVFED ad □LV quod erat dem.

Unde manifeſtum eſt, ſi portioni hyperboles DEF æquale abſciſſum fuerit □^{m}DQ, ductâ PQ parallelâ baſi DF, quæ ſecet diametrum in R; fore RI ad EI ſicut parab. ABC ad baſin AC.

Manifeſtum item, ſi fuerit EI, quæ inter verticem hyperbolæ et centrum ſectionis intercipitur, ∞ baſi AC, et IH ∞ duabus ſimul AG, GC; Et ſumatur longitudini parabolæ ABC æqualis recta IR. tunc ductâ PQ per R punctum parallela baſi DF, effici □PF ∞ portioni hyperbolæ DEF. Vel contra ſi □PF, portioni DEF æquale abſciſſum fuerit, rectam RI, æqualem fore longitudini parabolæ ABC.

Quomodo autem dato gravitatis centro portionis hyperbolicæ DEF, inveniatur □ portioni æquale, manifeſtum eſt ex ijs quæ de hyperbolæ quadratura antehac edidimus[4]). Nempe ſi O fuerit dictum gravitatis centrum, et ſicut IO ad tertiam partem rectæ quæ æqualis ſit diametro HE et duplæ EI, ita fiat EH ad RH. Erit □DQ, per R punctum abſciſſum, æquale portioni hyperboles DEF.

Ergo conſtat, ſi de tribus hiſce unum aliquod datum fuerit nimirum longitudo lineæ parabolicæ; vel centrum gravitatis hyperbolæ portionis; vel rectilineum hijperbolæ portionis æquale; Etiam duo reliqua data eſſe.

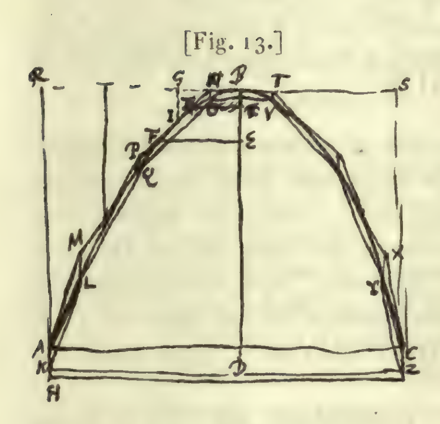
---

[1]) D'après le „Theorema VI", p. 246.
[2]) Voir le „Theorema VII", p. 247.
[3]) Voir le théorème précédent, p. 249.
[4]) Voir la note 1 de la p. 236.

[Troisième Partie [1]).]

[Theorema X.]

[Fig. 13.]



Data parabola ABC æqualiter ab axe BD divifa, poffibile eft ipfi lineam ordinatè circumfcribere [2]), ut circumductis utrifque circa manentem parabolæ axem, fiat exceffus quo fuperficies ex linea circumfcripta genita fuperat conoidis parabolici ABC fuperficiem, minor fpatio quovis propofito.

Fiat enim cylindrus HC eandem cum conoide ABC bafin habens, cujus cylindri fuperficies fine bafibus minor fit propofito fpatio, hoc enim fieri poffe perfpicuum eft. Sit autem dicti cylindri latus AH. Et fumatur in axe parabolæ a vertice B, intervallum BE quadruplum ipfius AH. Et applicetur ordinatim EF. Porro defcripto circa parabolam □°ARSC eandem cum ipfa bafin altitudinemque habente, dividatur ipfius latus RS in partes æquales numero pares, ita ut fingulæ ipfarum veluti BG, minores fint recta EF. Et ex punctis divifionum ductis lineis axi parallelis quæ parabolæ occurrant, circumfcribatur per occurfus puncta linea inflexa ordinatè AMPNTXC. Dico hanc una cum parabola ABC circa BD circumductam, fuperficiem defcribere quæ conoidis ABC fuperficiem excedat minori quam propofitum eft fpatio.

Ducantur enim a fingulis lineæ circumfcriptæ flexionum punctis rectæ axi parallelæ quæ parabolæ occurrant, ML, PQ, NO, TV, &c. et jungantur LQ, QO, OV, &c. quæ lineæ æquales et parallelæ erunt fingulis circumfcriptæ partibus MP, PN, NT, &c., ut fupra dem. [3]). Sint autem et LK, YZ parallelæ ipfis MA, XC; quibus proinde et æquales erunt; fientque infuper AK, CZ, æquales ipfis ML, XY. Jungantur denique AL, CY, KZ, quarum quidem KZ parallela

---

[1]) Cette Troisième Partie contient la réduction, rédigée selon la mode des anciens, de la quadrature de la surface courbe du conoïde parabolique à la quadrature du cercle. Elle est empruntée à des feuilles détachées qui font suite à celles mentionnées dans la note 2 de la p. 248.

[2]) Voir la „Definitio I", p. 237.

erit AC, quoniam ML, XY inter fe æquales funt per [Theorema II [4])], denique et AK, CZ.

Itaque fi circa axem BD omnia circumvolvi intelligantur, apparet fuperficiem à circumfcripta ordinatè linea AMPNTXC genitam æqualem effe ei quæ fit ab inflexa KLQOVYZ, cum fingulæ hujus lineæ partes cum fingulis illius partibus et magnitudine et fitu ad axem conveniant. Hac autem fuperficie ex KLQOVYZ major eft fuperficies ab inflexa KALQOVYCZ, cum eofdem utraque in plano terminos habent, circumferentiam nimirum circuli quem defcribit in circumlationem punctum K [5]). Ergo fuperficies ab inflexa KALQOVYCZ major quoque erit ea quæ fit ab ordinate circumfcr.ª AMPNTXC. Illa vero fuperficies compofita eft ex fuperficie quæ fit ex AK latere cylindri AZ, et ex fuperficie genita ab inflexa ALQOVYC. Ergo hæ duæ fuperficies majores quoque erunt ea quæ fit ab ordinate circumfcripta. Ideoque multo magis fuperficies à latere AK una cum fuperficie conoidis ABC, major erit ea quæ fit ab ordinatè circumfcripta. Eft enim fuperficies conoidis ABC major fuperficie genita ab inflexa ALQOVYC, quum ipfam comprehendat, eofdemque in plano habeat terminos. Minor igitur eft exceffus fuperficiei ex ordinate circumfcripta genitæ fupra conoidis fuperficiem, quam eft fuperficies à latere cylindri AK. Hæc autem fuperficies propofito fpatio adhuc minor eft. Ergo fieri poffe conftat id quod afferuimus. Quod autem minor fit fuperficies à latere AK effecta fpatio propofito fic oftendemus. AK æqualis eft, uti jam ante dictum fuit, ipfi ML. hæc vero ipfi NO per [Theorema II [4])]. Eft autem NO æqualis $\frac{1}{4}$ GI quum fint inter fe NO, GI, ficut quadrata NB, GB. Sed GI minor eft quam BE quoniam et BG minor, ex conftr., quam EF. Itaque NO minor erit quam $\frac{1}{4}$ BE. Quare et AK minor erit quam $\frac{1}{4}$ BE, hoc eft quam AH. Superficies autem quæ fit ex converfione AH circa axem AD [6]), hoc eft fuperficies cylindri HC abfque bafibus, minor erit fpatio propofito. Ergo omnino quoque, fuperficies ex AK in circumverfione effecta minor erit fpatio propofito.

---

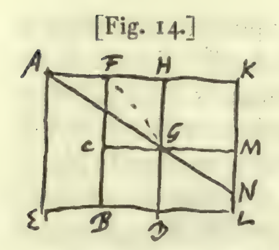
[3]) Voir la démonstration du Theorème II, p. 239.

[4]) Voir la p. 238.

[5]) Voici le postulat d'Archimède qui fait suite à celui mentionné dans la note 5 de la p. 237: „Similiter autem & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos habuerint, minimam esse planam. Aliarum vero superficierum, et eosdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera superficie, & plana eosdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprendi constet, partem vero communem habere, & comprensam esse comprendente minorem". (Voir la p. 2 de l'édition de Bâle, ou la p. 11 du T. I de l'édition de Heiberg).

[6]) Lisez : BD.

[LEMMA III [1]).]



[Fig. 14.]

Sunto $\square^{a}$ duo AB, CD, bases æquales et contiguas habentia EB, BD, sitque $\square^{i}$AB altitudo major quam $\square^{i}$CD. Et ducatur AG recta, quæ conjungat extrema utriusque $\square^{i}$ latera.

Dico si circa latus GD $\square^{i}$CD, tanquam axem, vel circa aliam quamcunque, ut KL, ipsi GD æquidistantem, atque ad partes $\square^{i}$CD sumptam, circumversio fieri intelligatur majus fore solidum quod à $\square^{is}$AF [2]), CD efficitur quam quod à trapezio AGDE.

Sit enim primo circa GD facta conversio, conveniantque productæ AF, DG in H. Igitur conversione Δ^{i}GHA conus, $\square^{i}$ vero HC conversione cylindrus oritur quorum cum eadem sit altitudo HG; basis vero coni quadrupla sit baseos cylindri, (est enim circulus semid.° HA quadruplus circuli à semid. HF) minor proinde cono cylindrus erit. Nam si basis coni tripla duntaxat fuisset baseos cylindri fuissent conus cylindrusque inter se æquales. Itaque si uterque seorsim auferatur à cylindro qui fit conversione $\square^{i}$HE circa axem eundem HD, majus erit solidum quod relinquitur demto cylindro ab HC□° effecto, hoc est solidum ex conversione □ AB, CD, quam quod relinquitur demto cono qui fit à Δ° GHA, hoc est, quam solidum ex conversione trapezij AGDE.

Iam verò circa KL tanquam axem conversio facta intelligatur, cui occurrant productæ AG, CG, AF, in punctis N, M, K.

Quia igitur conus efficitur conversione Δ^{i}NKA, qui ad conum similem à Δ° NMG productum, triplicatam habet rationem ejus quam AK ad GM, hoc est eandem quam cubus à latere AK ad cubum à latere GM. Erit per conversionem rationis, conus ab NKA Δ°, ad solidum à trapezio MGAK, ut cubus ex AK ad differentiam cuborum ex AK et ex GM. Verum cylindrus à □° KC conversione, ad conum ab NKA triangulo est sicut solidum ex qu. FK et tripla linea AH, ad cubum ex AK; quoniam cylindrus dictus ad dictum conum compositam habet rationem ex ratione qu. FK ad qu. KA, et ratione triplæ KM ad KN, sive triplæ AH ad AK. Igitur ex æquo erit cylindrus à □° KC ad solidum ex conversione trapezij MGAK, sicut solidum ex qu°. FK et tripla AH, ad differentiam cuborum

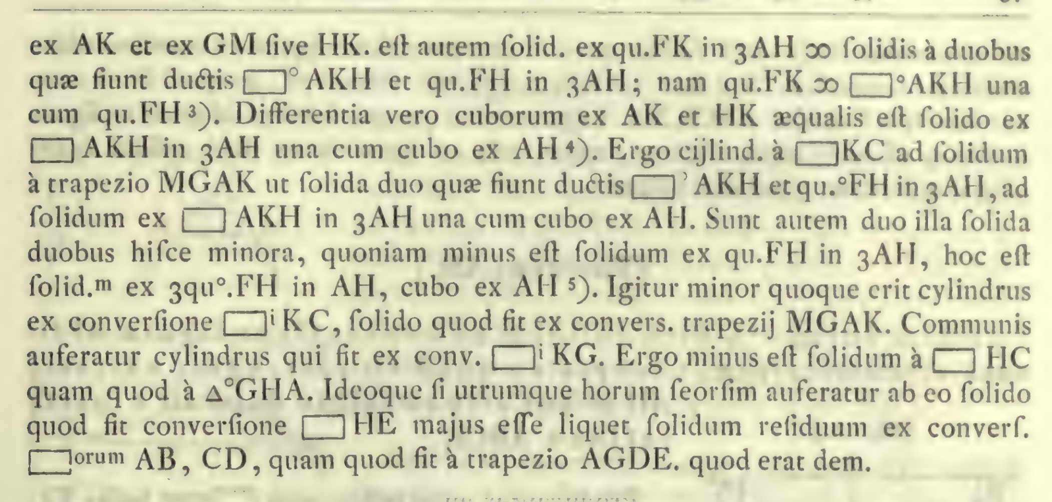
[1]) Ce „Lemma" fut rédigé après le Théorème XI, pendant la démonstration duquel le besoin d'un tel „Lemma" s'était fait sentir.

[2]) Lisez: AB.

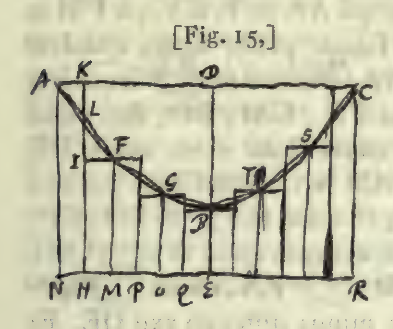
[3]) Posant $AF = FH = a$, $HK = b$, on a, en effet, $FK^2 = (a+b)^2 = (2a+b)b + a^2 = AK \times KH + FH^2$.

[4]) Puisqu'on a $(2a+b)^3 - b^3 = (2a+b)b \times 3 \times 2a + (2a)^3$.

[5]) C'est-à-dire $3a^2 \times 2a < (2a)^3$.


ex AK et ex GM five HK. eft autem folid. ex qu.FK in 3AH ∞ folidis à duobus quæ fiunt ductis □° AKH et qu.FH in 3AH; nam qu.FK ∞ □°AKH una cum qu.FH [3]). Differentia vero cuborum ex AK et HK æqualis eft folido ex □ AKH in 3AH una cum cubo ex AH [4]). Ergo cijlind. à □KC ad folidum à trapezio MGAK ut folida duo quæ fiunt ductis □° AKH et qu.°FH in 3AH, ad folidum ex □ AKH in 3AH una cum cubo ex AH. Sunt autem duo illa folida duobus hifce minora, quoniam minus eft folidum ex qu.FH in 3AH, hoc eft folid.^{m} ex 3qu°.FH in AH, cubo ex AH [5]). Igitur minor quoque erit cylindrus ex converfione □^{i} KC, folido quod fit ex convers. trapezij MGAK. Communis auferatur cylindrus qui fit ex conv. □^{i} KG. Ergo minus eft folidum à □ HC quam quod à △°GHA. Ideoque fi utrumque horum feorfim auferatur ab eo folido quod fit converfione □ HE majus effe liquet folidum refiduum ex converf. □^{orum} AB, CD, quam quod fit à trapezio AGDE. quod erat dem.

[Theorema XI.]



[Fig. 15,]

Data portione hyperbolæ ABC cujus diam. fit bafi ad rectos angulos. Si rectang. ei circumfcribatur ad centrum terminatum AR, et figura ordinatè circa fpatium refiduum ABCRNA ficut fupra præfcriptum fuit [6]), manente vero diam. DE omnia circumvertantur. Dico folidum ex converfione figuræ ordinatè circumfcriptæ, majus effe folido quod ex converfione fpatij refidui oritur.

Jungantur enim puncta quæque bina quibus bafes rectangulorum figuræ circumfcr.^{æ} fecant hyperbolam, rectis AF, FG, GB, BT, &c. Erit igitur linea quædam inflexa hoc modo intra hijp. portionem defcripta. Jam vero fi omnia circa diam. DE circumvolui intelligantur orietur folidum ex converfione fpatij rectilinei à dicta inflexa et rectis AN, NR, RC comprehenfi, quod folidum majus erit eo quod fit à fpatio refiduo ABCRNA, quum hoc illius partem effe appareat. Eft autem folidum ex converfione utriufque □^{i} KN, FH majus quam quod fit converfione trapezij AFMN, quoniam dicta □^{a} fibi mutuo conjuncta bafes habent æquales, et latera parallela axi DE [7]). Similiter et folidum ex converfione utriufque □^{i} FP, GP, majus eft eo quod fit converfione trapezij FGOM. Et folidum ex converfione □^{i} utriufque GQ, BQ, majus eo quod fit a trapezio GBEO. Itaque totum fimul folidum quod oritur ex converfione figuræ ordinatim ex □^{is}

[6]) Consultez le deuxième alinéa de la „Definitio II", p. 246.

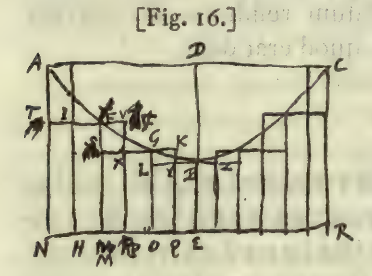
[7]) Voir le „Lemma III", qui précède.

circumscriptæ majus erit solido quod fit ex conversione figuræ ex omnibus dictis trapezijs compositæ. Sed hoc solidum majus esse dictum est, eo quod fit ex conversione spatij residui ABCRNA. Ergo omnino quoque solidum id quod ex figura ordinatè circumscripta efficitur, majus erit eo quod fit ex dicti residui spatij circumvolutione. quod erat ostend.

[Theorema XII.]

Iisdem positis [1]), dico solidum ex conversione figuræ ordinatè circumscriptæ, excepto eo quod fit rectangulo extremo AH minus esse eo solido quod fit a spatio residuo ABCR.

[Fig. 16.]



Producantur enim reliquorum □orum bases VI, KX, ZY, quæ ab hyperbola bifariam dividentur, et VI quidem occurrat ipsi AN in T. KX ipsi FM in S; ZY ipsi GO in L. Itaque existit figura quædam spatio residuo ABCRNA inscripta ex □is æqualem latitudinem habentibus FN, GM, BO, &c. cujus proinde solidum ex conversione circa axem DE genitum, minus est eo quod fit à spatio residuo ABCRNA. Atqui dicto solido a □is FN, GM, BO genito minus esse probatur, id quod fit à □is VH, KP, BQ. hoc est solidum ex figura ordinatè circumscripta, excepto quod fit à □° AH. Nam solidum quod fit a □VH minus est eo quod fit à □° FN, quum □a quidem hæc inter se sint æqualia alterum vero altero minus distet ab axe DE. Et eadem ratione solidum quod fit à □ KP minus est eo quod à □° GM. Ac tandem illud quoque quod fit à □° BQ minus apparet esse eo quod à □ BO. Itaque solidum effectum à figura ordinatè circumscripta citra □ AH, cum sit minus solido quod fit à □is FN, GM, BO multo minus erit eo quod à spatio residuo ABCRN efficitur. Quod erat dem.

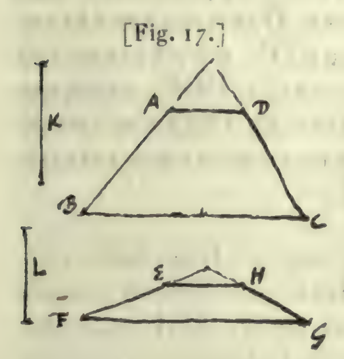
Itaque solidum a tota figura ordinatè circa spatium residuum ABCRNA descripta minori excessu superat solidum ab ipso spatio residuo ortum, quam sit id solidum quod fit ab extremo rectangulo AH. Unde manifestum est, posse figuram ordinatè describi circa ABCRNA spatium, ita ut solidum à dicta figura genitum exuperet illud quod à spatio ABCRNA producitur, excessu minore quam sit solidum quodvis datum. Potest enim ex tot □is figura circumscripta constitui, ut extremum □ AH quodque ab eo efficitur solidum sit quamlibet exiguum.

---

[1]) Consultez le théorème précédent, p. 257.

[LEMMA IV.]

[Fig. 17.]



Si coni recti duo æquales bafes habentes BC, FG fecentur planis AD, EH, bafi ipforum æquidiftantibus, fuerintque et qui è fectionibus fiunt circuli [AD, EH] æquales. Eam rationem inter fe tenebunt fuperficies fruftorum inter bafes et fecantia plana interceptæ, quam earundem fuperficierum latera [AB, EF].

Efto enim fuperficiei conicæ cujus latus AB, æqualis circulus radio K defcriptus. Superficiei vero cujus latus EF æqualis circulus à radio L.

Itaque quadratum ex K æquatur ▭° fub AB et dimidijs BC, AD*, quadratum vero ex L æquatur ▭° fub EF et dimidijs FG, EH. Eft autem illud ▭ ad hoc ▭^m ficut AB ad EF, quia dimidia BC, AD æquales funt dimidijs FG, EH. Ergo et quadratum ex K ad qu. ex EF [3]) erit ficut AB ad EF. Sicut autem qu. ex K ad qu. ex L ita eft circulus à femidiametro K ad circulum à femidiametro L. Ergo et circulus ille ad hunc erit ut AB ad EF. Circulus autem à femid. K æqualis pofitus fuit fuperficiei conicæ cujus latus AB. Et circulus qui fit femid. EF [4]), æqualis fuperficiei conicæ cujus latus EF. Ergo et fuperficies illa ad hanc erit ut AB ad EF. Quod er. dem.

* *Arch.* I. *De Sphæra et Cylindro* [2]).

[THEOREMA XIII.]

Iifdem pofitis [5]), fi manente axe GBΩ [Fig. 18], parabola ABC fimul cum Δ°AGC circumvolvatur, ita ex illa conoides

[2]) Il s'agit de la Prop. 16 du Livre I de l'ouvrage mentionné: „Si conus æquicruris secetur superficie plana, quæ quidem superficies basi ipsius coni sit æquedistans: ea coni superficies, quæ à secante & à base concluditur, ei circulo æqualis esse probatur, cuius circuli semidiameter sit media secundum proportionem inter latus superficiei conicæ, eius scilicet quæ inter basim & secantem continetur, et inter lineam æqualem duabus semidiametris simul iunctis duorum circulorum, eorum scilicet qui in base & secante notantur" (p. 17 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 76—79).

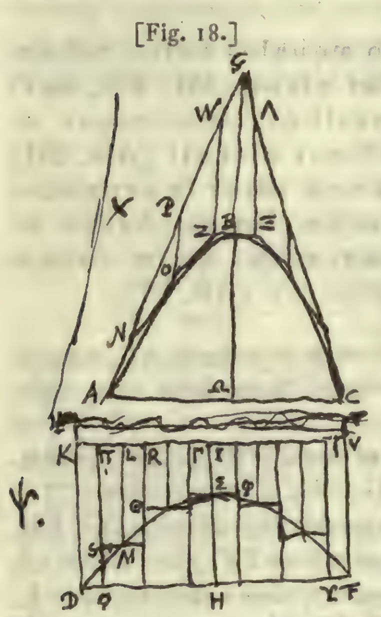
[3]) Lisez: qu. ex L.

[4]) Lisez: semid. L.

[5]) Consultez le „Theorema VIII", p. 249. En effet, à l'exception de la position inverse du rectangle KF, la présente figure et celle qui se rapporte au „Théorema VIII" se correspondent ligne par ligne et lettre par lettre. Il résulte donc de l'expression „Iisdem positis" que dans

parabolicum ex hoc vero conus oriatur. Et manente item axe IEH, circumvolvatur hyperbolæ portio DEF simul cum □° DV, ut ex illa conoides hyperbolicum, ex hoc fiat cylindrus. Dico quam rationem habet cylindrus DV ad partem sui residuam demto conoide DEF, eandem habere superficiem convexam coni AGC ad superficiem convexam conoidis parabolici ABC.

[Fig. 18.]



Nam si hoc verum esse negetur, Ergo sicut cylindrus DV ad partem sui reliquam dempto conoide DEF, ita erit superficies conica AGC ad majorem vel ad minorem quam sit superficies convexa conoidis ABC.

Esto primum ad majorem, quæ sit circulus circa diametrum X. Quoniam igitur circulus circa X major ponitur superficie ABC conoidis, poterit per [Theorema X] [1]) circa parabolam ABC, linea inflexa ordinatè describi quæ simul cum parabola circumvoluta circa axem BΩ, efficiat superficiem minorem circulo circa X diametrum. Esto descripta itaque ejusmodi linea quæ sit ANOZΞC. Et circa spatium residuum ab hijperboles portione DKVFED figura item ordinate describatur, totidem □is constans quot partibus linea ANOZΞC, eo modo quo in prop. præced. [2]). Et omnia similiter constructa sint. Manentibus autem axibus GBΩ, HEI cuncta converti intelligantur. Quoniam igitur linearum GW, WP, PN, NA [3]) unaquæque ad sibi proximam eadem ratione refertur qua unaquæque harum IΓ, IR, IΠ, IK ad sibi proximam. Etiam quadrata illarum inter se eandem rationem consequenter servabunt, quam harum inter se quadrata. Sicut autem quadrata inter se linearum GW, GP, GN, GA ita se habent superficies conicæ quarum hæ lineæ latera existunt. et sicut quadrata inter se rectarum IΓ, IR, IΠ, IK ita se habent bases cylindrorum ac proinde ipsi quoque cylindri, qui fiunt conversione □orum ΓH, RH, ΠH, KH. Ergo illæ superficies conicæ, unaquæque ad sibi proximam eadem ratione referentur, qua cylindrorum istorum quisque

une rédaction antérieure et provisoire les Théorèmes VIII et XIII se suivaient immédiatement; puis les besoins de la démonstration ont nécessité l'intercalation d'autres théorèmes. Comparez encore à ce propos les notes 2 de la p. 260 et 6 de la p. 261.

[1]) Voir la p. 254.

[2]) Il s'agit ici sans doute du „Theorema VIII". Voir la note 5 de la p. 259.

[3]) Lisez: GW, GP, GN, GA.

ad proxime ſequentem. Ideoque et minima dictarum ſuperficierum et exceſſus quibus unaquæ ipſarum a ſequente ſuperatur, conſequenter eandem rationem inter ſe obtinebunt quam minimus dictorum cylindrorum et exceſſus quibus unuſquiſque ipſorum à ſequente ſuperatur. Sunt igitur magnitudines quædam ſuperficies genitæ ex converſione linearum GW, WP, PN, NA, itemque aliæ magnitudines totidem numero, nimirum ſolida orta ex converſione □orum ΓH, ΓΔ [4]), ΔΠ, ΠD, quarum binæ quæque eandem inter ſe rationem ſervant. Singulæ autem dictarum ſuperficierum ad alias quaſdam ſuperficies referuntur; videlicet ſuperficies à latere GW ad circulum à ſemidiametro BZ. et ſuperficies à latere WP ad eam quæ fit a latere ZO. et quæ à latere PN ad eam quæ ab ON. Et quæ ab NA prout eſt pars ſuperficiei coni AGC ad ſeipſam refertur prout eſt pars ſuperficiei à linea ordinatè circumſcripta genitæ. Et ijſdem quoque proportionibus ſingula dictorum ſolidorum ad alia quædam ſolida referuntur. Eſt enim ſicut ſuperficies conica à latere GW ad circulum à ſemid. BZ, hoc eſt ſicut linea GW ad BZ *, hoc eſt ſicut HI ad IE per ea quæ præced. prop.e oſtenſa [6]); ita cylindrus ex converſione □i HΓ ad cylindrum ex converſione □i EΓ. Et ſicut ſuperficies conica à latere WP ad ſuperficiem conicam à latere ZO, hoc eſt, ut linea WP ad ZO *, hoc eſt ut ΔR [4]) ad ΘR ita ſolidum à □o ΔΓ in converſione factum ad ſolidum à □ ΘΓ. nam et hæc ſolida altitudinum ſuarum rationem ſequi perſpicuum eſt. Eademque ratione ſicut conica ſuperficies à latere PN in converſione effecta ad eam quæ fit à latere ON, ita ſolidum à □o ΔΠ ad ſolidum à rectang. SR. Et ſicut ſuperficies conica à latere NA ad ſeipſam ita ſolidum à □o DΠ ad ſeipſum. Ergo ſicut omnes ſimul ſuperficies conicæ a lateribus GW, WP, PN, NA in converſione factæ, ad omnes factas à lateribus BZ, ZO, ON, NA, hoc eſt ſicut tota ſuperficies conica AGC ad ſuperficiem totam a linea ordinatè circumſcripta genitam, ita erunt omnia ſimul ſolida converſione □orum HΓ, ΓΔ, ΔΠ, ΠD producta, ad omnia ſimul ſolida ex converſione □orum EΓ, ΓΘ, RS, ΠD [8]), hoc eſt, ita cylindrus DV ad ſolidum ex converſione figuræ ordinate deſcriptæ circa

* 15 *Arch.* 1. *de Sphæra* [5]).

* . . . *hujus* [7]).

---

[4]) La lettre Δ manque dans la figure 18; mais on la retrouve dans la figure 11 du théorème VIII, p. 250. Elle doit être placée à droite du point Q.

[5]) Voici cette proposition d'Archimède: „Cuiuslibet coni æquicruris superficies ad basim suam, eandem habet proportionem, quàm latus ipsius coni habet ad lineam eductam à centro basis coni ad ejusdem circumferentiam" (p. 17 de l'édition de Bâle, Heiberg I, p. 76—77).

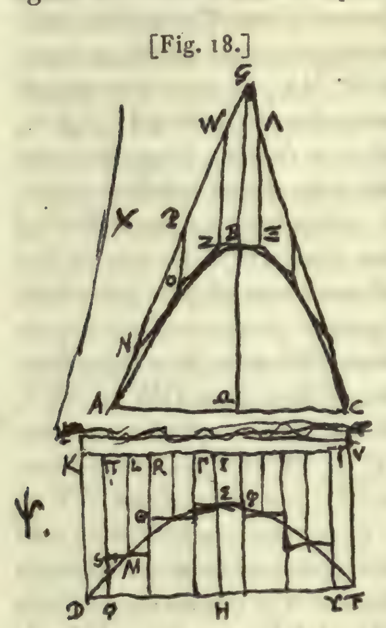
[6]) Il s'agit toujours du „Theorema VIII"; voir la p. 251 où l'on lit: „sicut singulæ partes lineæ AGC, ad partes singulas lineæ ordinatè circumscriptæ, quæ inter easdem secum parallelas continentur, ita □a singula altitudinem DK habentia ad ea quæ easdem cum ipsis bases habent"; c'est-à-dire les rectangles ΓE, ΓΘ, RS, ΠD.

[7]) Il s'agit du „Lemma IV", p. 259.

[8]) Il s'agit cette fois encore d'une application de la proposition d'Archimède mentionnée dans la note 5 de la p. 251. Ici les *a* sont les surfaces décrites par les lignes GW, WP, etc.; les *b* les solides décrits par les rectangles ΓH, ΓΔ, etc.; les *c* les surfaces décrites par les lignes BZ, ZO, etc.; les *d* les solides décrits par les rectangles EΓ, ΘΓ, etc.

ſpatium reſiduum DEFVKD. Ratio autem cylindri DV ad dictum ſolidum ex figura ordinatè circumſcripta genitum minor eſt ratione ejuſdem cylindri DV ad partem ſui quæ relinquitur dempto conoide DEF. quoniam ſolidum ex figura ordinatè circumſcripta majus eſt dicta parte reſidua [1]). Ergo et ſuperficiei conicæ AGC ad ſuperficiem à linea ANOZB ordinatè circa parabolam deſcripta, minor erit ratio quam cylindri DV ad partem ſui reſiduam dempto conoide DEF. Huic autem eadem poſita fuit ratio ſuperficiei conicæ AGC ad circulum circa X diametrum. Ergo ſuperficiei conicæ AGC ad ſuperficiem à linea ANOZB, minor erit ratio, quam ejuſdem conicæ ſuperficiei AGC ad circulum circa X. Quare major erit ſuperficies à linea ANOZB circulo circa X. Eadem vero minor hoc circulo ſuperius dicta fuit. quod fieri non poteſt. Itaque non eſt ſicut cylindrus DV ad partem ſui quæ remanet demto conoide DEF, ita ſuperficies conica AGC ad majorem aliquam quam ſit ſuperficies ABC conoidis parabolici.

[Fig. 18.]



Sed neque ad minorem. Nam ſi dicatur eſſe ut cylindrus DV ad dictam partem reſiduam, ita ſuperfic. conica AGC ad minorem aliquam ſuperficiem quam ſit conoidis ABC, Ergo quoque ſicut ſuperf. conica AGC ad ipſam ſuperf. conoidis ABC, ita erit cylindrus DV ad ſolidum quoddam majus dicta parte reſidua. Eſto id ſolidum in quo ψ. Ergo quia ſolidum ψ majus eſt parte cylindri DV reſidua poſt ablatum conoides DEF, ſive ſolido quod oritur ex converſione ſpatij DEFVKD; conſtat circa ſpatium DEFVKD figuram ordinatè ex ▭is deſcribi poſſe, quæ ſimul circumlata, ſolidum efficiat quod minus ſit ſolido ψ [2]). Deſcripta itaque intelligatur ejuſmodi figura; et ex quot ▭is ipſa compoſita erit, ex totidem rectis conſtans linea ordinatè circa parabolam ABC itidem deſcripta ſit. Similiter itaque ut prius, oſtendemus ſuperficiem conicam AGC ad ſuperficiem genitam à linea ordinatè parabolæ circumſcripta, eandem habere rationem quam cylindrus DV ad ſolidum ex figura ordinate circa ſpatium DEFVKD deſcripta. Eſt autem minor ratio ſuperficiei conicæ AGC, ad ſuperficiem, à linea ordinatè circumſcripta, ortam, quam ejuſdem ſuperficiei conicæ AGC ad ſuperficiem conoidis parabolici ABC [3]).

[1]) Voir le Théorème XI, p. 257.

[2]) Voir le dernier alinéa du Théorème XII, p. 258.

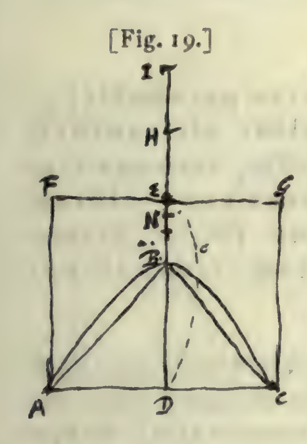
[3]) Puisque, d'après le postulat d'Archimède mentionné dans la note 5 de la p. 255, la surface décrite par la figure rectiligne circonscrite à la parabole, excède celle du conoïde parabolique.

Ergo et ratio cylindri DV, ad ſolidum quod fit ex converſione figuræ ordinatè circa ſpatium DEFVKD deſcriptæ, minor erit ea quam ſuperficies conica AGC habet ad ſuperficiem conoidis ABC. Huic autem rationi eadem poſita fuit ratio cylindri DV ad ſolidum ψ. Ergo cylindrus DV ad ſolidum à dicta figura ordinatè deſcripta genitum minorem habebit rationem quam cylindrus idem DV ad ſolidum ψ. Quare ſolidum à figura ordinate circumſcripta majus erit ſolido ψ. Sed et minus antea dictum fuit. Quod eſſe nequit.

Ergo neque erit cylindrus DV ad partem ſui reſiduam demto conoide DEF, ita ſuperf. conica AGC ad minorem aliquam quam ſit ſuperf. conoidis parabolici ABC. Sed neque ad majorem, ut modo oſtendimus. Ergo reliquum eſt, ut ſicut cylindrus DV ad dictam ſui partem reliquam ita ſit ſuperf. conica AGC ad ſuperf. conoidis parabolici ABC. quod erat demonſtr.

[Theorema XIV.]

[Fig. 19.]



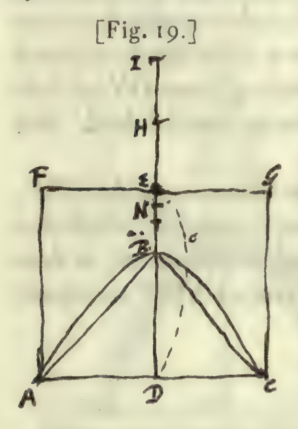
Eſto hyperbolæ portio ABC, cujus axis BD ſit baſi ad angulos rectos. latus autem tranſverſum ſit BH; centrum ſectionis E. et deſcribatur ſuper eadem baſi □m ad centrum terminatum FC. Et manente axe ED, dictum □m unà cum portione ABC circumvertatur. Dico cylindrum FC ex converſione □i genitum, ad partem ſui reſiduam, dempto conoide ABC, eam habere rationem quam linea tripla ED ad æqualem utrique ſimul et duplæ ED, et ei lineæ; quæ ſeſe habeat ad EB ſicut BH ad HD.

Producatur enim latus tranſverſum BH ad I ut HI ſit æqualis EH vel EB et ſicut HD ad DI ita ſit BD ad DN. Quoniam igitur conoides hyperb. ABC ad conum eandem baſin et altitudinem cum ipſo habentem, eam habet rationem quam ID ad DH *, hoc eſt quam ND ad DB. dictus autem conus ad cylindrum * Archim. de Conoid. [4])

[4]) Il s'agit de la Prop. 27: „Quælibet portio conoidalis obtusianguli" [conoïde hyperbolique] „abscisa plano super axem erecto, habet ad conum, qui eandem basim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quam habet utraque simul linea quæ sit æqualis axi portionis, et ea quæ sit tripla lineæ ad axem adiectæ, ad lineam his utrisque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam" (p. 84 de l'édition de Bâle, Heiberg I, p. 416—417, où elle porte le numéro 25). La „linea axi adjecta" d'Archimède est représentée dans la fig. 19 par la ligne BE, c'est-à-dire par le demi-axe transverse de l'hyperbole ABC.

FC, eſt ſicut BD ad triplam DE. Erit propterea ex æquo, conoides ABC ad cylindrum FC, ſicut ND ad triplam DE. Et invertendo, et per converſionem

[Fig. 19.]

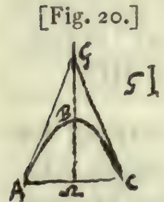


rationis, cylindrus FC ad partem ſui quæ dempto ABC conoide remanet, ſicut tripla DE ad exceſſum triplæ DE ſupra DN, hoc eſt, ad duplam DE una cum NE. Reliquum eſt igitur ut oſtendatur, eſſe NE ad EB ſicut BH ad HD. quod fiet hoc modo. HD eſt ad DI ſicut BD ad DN; quare et permutando HD ad DB ut DI ad DN, et per converſionem rationis DH ad HB ut DI ad IN. Et permutando rurſus et invertendo ID ad DH ut NI ad HB, ſive IE. Et dividendo IH ad HD ut NE ad EI. Et permutando et invertendo denique NE ad HI ſive ad BE, ut EI ſive BH ad HD. quod demonſtrandum ſupererat.

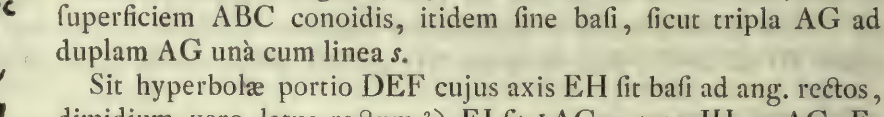
[Theorema XV.]

Si in eadem baſi conſiſtant conoidis portio parabolici et conus rectus, ſitque hujus altitudo ad illius altitudinem dupla; ſuperficies coni ad ſuperficiem conoidis, utrâque ſine baſi ſumptâ, eam habebit rationem, quam latus coni triplum ad idem latus duplum junctum ei lineæ quæ ſit ad diametrum baſeos, ſicut eadem diameter ad ambitum trianguli per axem coni[1]).

[Fig. 20.]

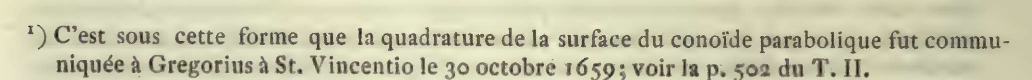


Eſto conoides parabolicum ABC, et in eadem baſi conus AGC rectus, cujus dupla ſit altitudo. Et utroque per axem ſecto, fiat ſectio conoidis parabola ABC; ſectio vero coni △^{m}AGC. Et ſicut hujus trianguli ambitus ad baſin AC ita ſit AC ad lineam *s*.



Oſtendendum eſt igitur, ſuperficiem coni AGC ſine baſi, eſſe ad ſuperficiem ABC conoidis, itidem ſine baſi, ſicut tripla AG ad duplam AG unà cum linea *s*.

Sit hyperbolæ portio DEF cujus axis EH ſit baſi ad ang. rectos, dimidium vero latus rectum [2]) EI ſit $\frac{1}{2}$AC et tota IH ∞ AG. Et deſcripto circa portionem ▭^{lo} DV ad centrum ſectionis I termi-



[1]) C'est sous cette forme que la quadrature de la surface du conoïde parabolique fut communiquée à Gregorius à St. Vincentio le 30 octobre 1659; voir la p. 502 du T. II.

[2]) Lisez: lateris transversi.

[3]) Comparez le „Theorema XIV," p. 263.

[4]) Voir le „Theorema XIII," p. 259—260. Dans la figure de ce théorème le conoïde hyper-

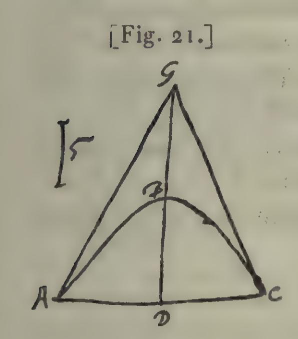
nato, intelligatur, manente axe HI, et portio et □ DV circumvolvi. Itaque cylindrus DV ex conversione $\square^{i}$ ortus ad partem sui quæ remanet dempto hyperbolico conoide DEF eam habebit rationem quam tripla HI ad duplam HI junctam ei lineæ quæ sit ad EI sicut 2EI ad utramque simul HI, IE [3]), sive permutando, quæ sit ad 2EI ut EI ad duas simul HI, IE. Est autem HI ∞ AG, et EI ∞ AΩ. Ergo dictus cylind. ad dictum residuum eam quoque habebit rationem, quam tripla AG habet ad 2AG una cum ea linea quæ sit ad 2AΩ hoc est ad AC, sicut AΩ ad utramque simul AΩ, AG, sive ut AC ad ambitum $\triangle^{i}$ AGC. Hæc vero linea est *s*. Ergo cylindr. DV ad partem sui reliquam dempto conoide DEF, eam habet rationem quam 3AG ad 2AG una cum *s* linea. Sicut autem dictus cylindrus ad dictum residuum ita est superficies coni AGC sine basi ad superficiem conoidis parabolici ABC sine basi [4]). Ergo et hæ superficies eam inter se rationem servant quæ est 3AG ad 2 AG una cum *s* linea. Quod erat ostend.

Hinc manifestum est superficiem coni AGC ad superficiem conoidis ABC, utrâque sine basi sumpta, minorem semper rationem habere quam sesquialteram [5]).

[Theorema XVI.]

Conoidis parabolici, cujus axis ad basin rectus sit, superficies convexa ad basin eam habet rationem quam inter se habent lineæ rectæ, quarum prior composita sit ex duobus lateribus trianguli isoscelis, basin habentis diametrum circuli qui conoidis basis est, altitudinem vero conoidis duplam, et ex ea linea quæ sit ad basin dicti trianguli sicut basis eadem ad totius dicti trianguli ambitum: altera vero linea dictæ baseos sit sesquialtera [6]).

[Fig. 21.]



---

bolique DEF a été construit de manière qu'on a 2 AG : AC = HI : IE (voir le „Theorema VIII" p. 249). Il est donc évident que le conoïde hyperbolique de la figure présente constitue un cas particulier de celui du Theorème XIII.

5) C'est-à-dire plus petit que le rapport 3 : 2.

6) Posant donc GC $= a$, DC $= r$ on trouve $2r^2 : (a + r)$ pour la ligne s qu'on doit ajouter à $2a$, et, par suite, pour la surface du conoïde parabolique $2(a^2 + ar + r^2)\, r\pi : 3(a + r)$. Introduisant plutôt, au lieu de a et r, la hauteur BD $= h$ du conoïde et le paramètre p de la parabole $y^2 = 2px$ on a $r = \sqrt{2ph}$; $a = \sqrt{2h(2h + p)}$; $s = 4ph : (\sqrt{2h(2h + p)} + \sqrt{2ph}) = p(\sqrt{2h(2h + p)} - \sqrt{2ph}) : h$, et l'on obtient pour la surface du conoïde la

[Fig. 21.]

Quia enim ſuperficies conoidis ABC ad ſuperficiem coni AGC eam oſtenſa eſt habere rationem quam dupla AG junƈta lineæ s ad tripla AG [1]: Eſt autem ſuperficies coni AGC ad circulum baſeos AC, ut AG latus ad AD ſemidiametrum baſeos*, hoc est ut tripla AG ad triplam AD, ſeu ſeſquialteram AC. Erit proinde ex æquo, ſuperficies conoidis ABC ad circulum baſeos AC ut dupla AG junƈta ipſi s ad ſeſquialteram AC quod erat dem.

15 *Archim.* 1. *de Sphæra* [2]).

[Theorema XVII.]

Iiſdem poſitis[3]), ſi fuerit latus AG [Fig. 21] ad baſeos ſemidiametrum AD ſicut numerus ad numerum; dico et ſuperficiem conoidis convexam ABC ad baſin ſuam fore ut numerus ad numerum[4]).

Quia enim GA commenſurabilis AD (6.10 Elem.)[5]) erit et componendo utraque ſimul GA, AD commenſurabilis AD (per 16.10 Eucl.)[6]); ſicut autem utraque GA et AD ad AD, hoc eſt ſicut ambitus trianguli AGC ad AC ita eſt AC ad s. Ergo et s ipſi AC commenſ. erit (11.10)[7]), ac proinde ipſis quoque AD et AG, ut et duplæ AG (12.10)[8]). Quare componendo rurſus erit dupla AG una cum s commenſurabilis ipſi s (16.10)[6]), ac proinde ipſi AD, uti et triplæ AD (12.10)[8]). Sicut autem dupla AG una cum s ad triplam AD ſive ſeſquialteram AC, ita eſt ſuperficies conoidis convexa ABC ad circulum baſeos AC (per præc.). Ergo illa quoque ſuperficies huic circulo commenſurabilis eſt (11.10)[7]) ac proinde ad ipſum rationem habebit quam numerus ad numerum (5.10)[9]). Quod erat oſtendendum.

---

formule $\frac{2}{3}\pi\,[(2h+p)\sqrt{p(2h+p)}-p^2]$, qu'on peut vérifier aisément par les méthodes modernes et qui est conforme à celle communiquée, en janvier 1658, par van Heuraet à van Schooten (voir la p. 131 du T. II), où l'on doit remplacer, afin d'y introduire nos notations, b par h et a, le „latus rectum" de la parabole, par $2p$. Consultez encore à ce propos le dernier alinéa de la p. 189 de l'Avertissement.

[1]) Voir le Théorème XV, qui précède.

[2]) Il s'agit de la Prop. 15 du Livre 1; voir la note 5 de la p. 261.

[3]) Voir le Théorème XVI, qui précède.

[4]) C'est le Théorème que Huygens a choisi pour le communiquer, avec les deux premiers des exemples qui suivent, à de Sluse (voir la lettre du 20 déc. 1657, p. 104 du T. II) et à van Schooten (lettre du 28 déc. 1657, p. 112—113 du T. II), afin de leur montrer qu'il avait trouvé la quadrature de la surface conoïde sans leur faire connaître le résultat précis qu'il avait obtenu et qu'il voulait réserver encore. On retrouve tous les trois exemples dans la lettre

Si fuerit AG dupla AD, erit ſuperficiei conoidis convexæ ABC ad baſin ea ratio quæ quatuordecim ad novem.

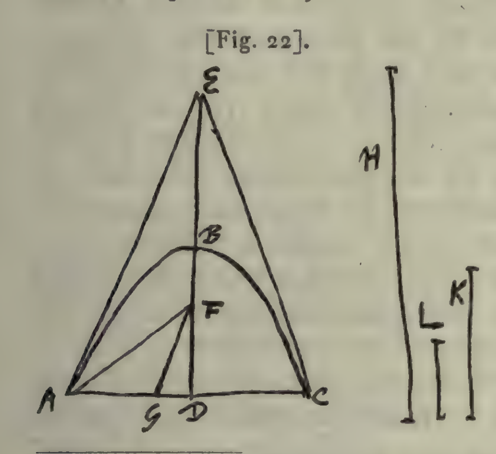
Si AG tripla AD, erit dicta ſuperficierum ratio ut 13 ad 6.

Si AG quadrupla AD, erit ſuperficierum ratio quæ 14 ad 5. quæ exempli gratia attuliſſe ſufficiat.

[Problema I.]

Dato conoide parabolico, invenire circulum conoidis ſuperficiei æqualem [10]).

[Fig. 22].



Eſto datum conoides parabolicum ABC, cujus axis BD: Et oporteat ſuperficiei conoidis convexæ ABC æqualem circulum invenire. Secetur conoides plano per axem, unde exiſtat parabola ABC, Et producatur axis et ſit ED dupla BD. Junctisque AE, EC, ducatur AF quæ bifariam dividat angulum EAD, occurratque axi in F, unde ducatur FG parall. EA. Deinde eſto H linea æqualis utrique ſimul AE et GD. Trienti vero diametri baſeos AC ſit æqualis recta L. Et inter utramque H et L media

à Gregorius à St. Vincentio du 30 octobre 1659 (voir la p. 502 du T. II) et dans l'„Horologium Oscillatorium", „Prop. IX" de la „Pars tertia", p. 74 de l'édition originale.

5) Il s'agit de la Prop. 6 du Livre 10 des Éléments d'Euclide, p. 215 de l'édition de 1607 de l'ouvrage de Clavius, cité dans la note 6 de la p. 477 du T. I, où l'on lit: „Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines".

6) „Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt" (Clavius, p. 235).

7) Il s'agit de la Proposition: „Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis: & tertia quartæ incommensurabilis erit" (Clavius, p. 225). Cette proposition porte chez Clavius le numéro 10; mais, comme Clavius le fait remarquer à la p. 230, elle fut numérotée 11 dans des éditions qui précédaient la sienne.

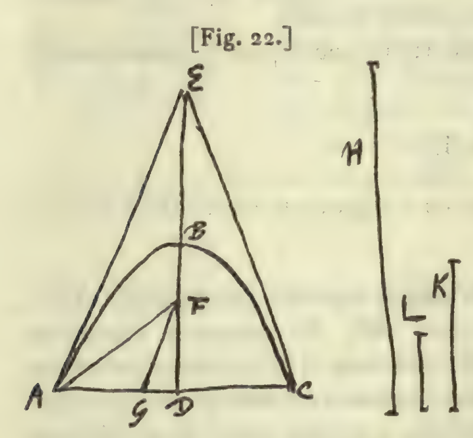
8) „Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se sunt commensurabiles" (Clavius, p. 230).

9) „Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum" (Clavius, p. 214).

10) On retrouve cette construction (avec les exemples mentionnés dans la note 4) à la p. 40 du Manuscrit N°. 13 dont il est question dans le dernier alinéa de la note 5 de la p. 235, et de même, sous une forme légèrement modifiée, dans l'„Horologium Oscillatorium", après la „Prop. IX" de la „Pars tertia", p. 73—74 de l'édition originale.

proport. ſumatur K. dico circulum à ſemidiametro K æqualem eſſe ſuperficiei conoidis convexæ ABC.

[Fig. 22.]



Quia enim bifariam dividitur angulus EAD à recta AF, Erit ut EA ad AD ita EF ad FD. Et compon.° ut utraque ſimul EA, AD ad AD ita ED ad DF. Ut autem ED ad DF ita eſt AD ad DG. Ergo ut utraque ſimul EA, AD ad AD ita erit AD ad DG. Et ſumptis tam antecedentium quam conſequentium duplis, ſicut ambitus △ⁱAEC ad AC ita AC ad duplam DG [1]). Quamobrem ſicut dupla AE una cum dupla DG ad ſeſquialteram ipſius AC, vel ſumptis utriuſque dimidijs ut AE una cum DG, hoc eſt ut H, ad ſeſquialteram ipſius AD, ita erit ſuperficies conoidis ABC ad circulum baſeos AC [2]). Ratio autem quam habet H ad ſeſquialteram AD, componitur ex rationibus H ad AD, et AD ad ſeſquialteram AD; quarum hæc eadem eſt quæ rectæ L ad AD; nam cum L ſit ſubtripla AC erit eadem ſubſeſquialtera AD. Igitur et ratio quam habet ſuperficies conoidis ABC ad circulum baſeos AC, eadem erit compoſitæ ex rationibus H ad AD et L ad AD, ac proinde eadem quæ ▭ⁱ ab H et L contenti hoc eſt quⁱ.K ad quad. AD. Sicut autem quadr. ex K ad qu.AD, ita eſt circulus radio K deſcriptus ad circulum baſeos cujus ſemid. DA. Ergo eadem erit ratio ſuperficiei conoidis ABC ad circulum baſeos AC, quæ circuli à K ſemid. ad eundem circulum AC. Ac proinde dicta conoidis ſuperficies æqualis erit circulo cujus K eſt ſemidiameter. Quod erat dem.

[1]) La ligne DG est donc la moitié de la ligne s, dont il est question dans les trois théorèmes précédents.

[2]) Par le „Theorema XVI”, p. 265.

[3]) On ne retrouve ce problème ni dans la correspondance de Huygens, ni dans l'„Horologium oscillatorium”. Afin de le résoudre posons MK [Fig. 23] $= x$, KN $=$ A, et soit s la ligne auxiliaire des Théorèmes XV (p. 264) et XVI (p. 265). On a alors d'après le Théorème XVI:

$$(2x+s):3\mathrm{A}=\mathrm{B}^2:\mathrm{A}^2,\ \text{où}\ s=2\mathrm{A}^2:(x+\mathrm{A}).$$

De la première équation on déduit:

$$s=\frac{3\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}-2x=3\mathrm{C}-2x.$$

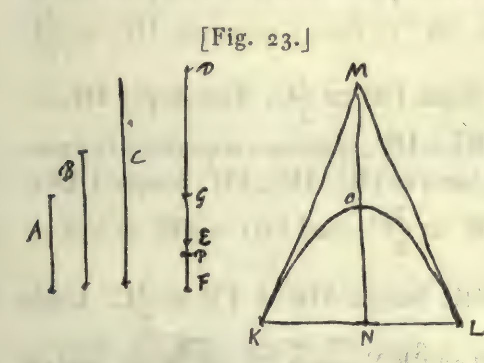
La substitution de cette valeur de s dans la seconde équation, amène l'équation quadratique:

$$2x^2-(3\mathrm{C}-2\mathrm{A})x+2\mathrm{A}^2-3\mathrm{AC}=0,$$

pour la racine positive de laquelle on trouve:

[PROBLEMA II.]

Datis circulis duobis inæqualibus, conoides parabolicum invenire cujus bafis fit circulus minor, fuperficies vero convexa majori circulo æquetur[3]).



[Fig. 23.]

Sunto dati circuli à femidiametris A et B. quorum A minor B major. Et oporteat facere quod proponitur. Sit duabus A, B tertia proportionalis [C]. Et fumatur DE ∞ $\frac{3}{4}$C. cui adjungatur in directum EF ∞ $\frac{1}{2}$A. Sitque EG ∞ EF. Et exceffui quo quadr. DF fuperat qu. A fit æquale qu. ex DP. Deinde triang. extruatur ifofceles KML, bafim habens KL ∞ duplæ A, crura vero KM, ML fingula ∞ utrique fimul GD, DP. Et ductâ ad mediam bafin recta MN, dividatur ea bifariam in O, et parabola defcribatur verticem habens O punctum; axem ON, bafin vero KL. Eaque manente axe ON circumverti intelligatur. Quod igitur bafis conoidis inde effecti &c manifeftum[4]). Dico autem convexam conoidis fuperficiem KOL ∞ circulo à femid.B.

Quia enim quadratum ex A æquale eft differentiæ qu.orum DF, DP, ac proinde æquale duplo □° DPF + qu° PF *, hoc eft ei □° quod fub PF et æquali utrifque FD, DP continetur: Erit proinde ut utraque fimul FD, DP ad A ita A ad FP *. Eft autem utraque fimul FD, DP æqualis utrique fimul MK, KN; quia

* 3.2 [5]).
* ... 6 [6]).

$$x = \frac{3}{4}C - \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}\sqrt{(3C - 2A)^2 + 24AC - 16A^2}$$

ou plutôt:

$$x = \frac{3}{4}C - \frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{3}{4}C + \frac{1}{2}A\right)^2 - A^2} \text{ (où } C = B^2 : A).$$

Or, on apercevra facilement que la construction, qui va suivre, ne fait que reproduire les opérations indiquées par cette expression algébrique.

[4]) Cette phrase inachevée fut intercalée après coup.

[5]) Lisez: 4.2 et consultez la p. 300 du T. XI, où la quatrième proposition du second livre des Éléments d'Euclide est appliquée d'une manière tout à fait analogue. La proposition s'y trouve citée dans la note 14.

[6]) Il s'agit ici de la „Prop." 17 du „Libr." 6, où l'on lit „Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: Illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt" (Clavius p. 568).

FG ∞ NK, et duæ ſimul GD, DP æquales KM. A vero ipſi KN æqualis eſt. Ergo, ſicut utraque ſimul MK, KN ad KN ita eſt KN ad FP. ideoque ut

[Fig. 23.]

MK + FP ad $\frac{3}{2}$KN ita eſt ſuperficies convexa conoidis KOL ad circulum baſeos KL, uti ex ſuperiori demonſtratione perſpicuum eſt [1]). Porro quoniam DE ∞ $\frac{3}{4}$C erit dupla DE ∞ $\frac{3}{2}$C. Sed dupla DE ∞ ∞ DG + DF, quoniam æqualiter ſe excedant hæ tres DG, DE, DF. Itaque DG + + DF ∞ $\frac{3}{2}$C. Sed DG + DF ∞ MK + + PF quoniam ex conſtr. DG + DP ∞ MK. Itaque MK + FP ∞ $\frac{3}{2}$C. Unde eandem quoque rationem habebit MK + FP ad $\frac{3}{2}$KN quam $\frac{3}{2}$C ad $\frac{3}{2}$KN, hoc eſt quam C ad KN ſive ad A. Quam autem habet C ad A eam habet circulus à ſemid. B ad circulum à ſemid. A, hoc eſt ad circulum baſeos KL. Ergo ut MK + FP ad $\frac{3}{2}$KN ita erit circul. à ſemid. B ad circulum baſeos KL. Atqui eandem quoque rationem habere oſtendimus ſuperficiem convexam conoidis ABC ad eundem baſeos circulum KL. Ergo æquales inter ſe neceſſe eſt circulum à ſemid. B et dictam conoidis ſuperficiem.

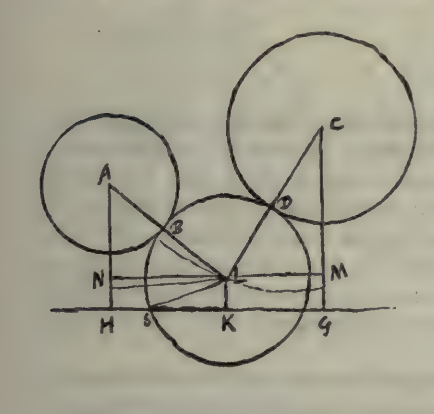
[1]) Lorsqu'on remplace les notations de la Fig. 21 (p. 266) par celles de la présente figure on trouve, en effet, que les deux surfaces sont, d'après le Théorème XVI, p. 265, dans le rapport de $[2MK + KL^2 : 2(MK + KN)]$ à $\frac{3}{2}$KL, ou bien de 2MK + 2FP à 3NK, c'est-à-dire de MK + FP à $\frac{3}{2}$NK.

VII[2].

1657.

Propofitum à Pafcalio. à Slufio miffum [3]).

Datis pofitione duobus circulis A, C et recta HG, invenire circulum BDS qui datos circulos tangat et relinquat fuper data recta arcum capacem anguli dati.



CD ∞ a; AB ∞ b; CG ∞ c; AH ∞ d; HG ∞ e; ratio data LB vel LS ad LK ut e ad f.

LB ∞ LD ∞ x.

LK ∞ $\frac{fx}{e}$ ∞ NH ∞ MG; $d - \frac{fx}{e}$ ∞ AN.

$$e \infty \sqrt{bb + 2bx + xx - dd + \frac{2fdx}{e} - \frac{ffxx}{ee}} + \sqrt{aa + 2ax + xx - cc + \frac{2fcx}{e} - \frac{ffxx}{ee}}$$

$$ee - 2e\sqrt{} + bb + 2bx + xx - dd + \frac{2dfx}{e} - \frac{ffxx}{ee} \infty aa + 2ax + xx - cc + \frac{2cfx}{e} - \frac{ffxx}{ee}$$

---

[2]) La Pièce est empruntée à la p. 35 du livret du frère Philips que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII.

[3]) Voir la Pièce N°. 418, p. 72 du T. II, qui accompagna la lettre de de Sluse à Huygens du 23 octobre 1657, p. 71 du T. II, et la réponse de Huygens du 2 novembre à la p. 80 du même Tome.

$$-2e\sqrt{.}\ \infty\ aa - cc + dd - bb - ee + 2ax - 2bx + \frac{2cfx}{e} - \frac{2dfx}{e}$$

$$2e\sqrt{}\ \infty - pp + qx$$

fiet quadrata æquatio [1]).

---

[1]) Probablement Pascal avait en vue une solution plus géométrique. En effet, il écrivit à Fermat, le 29 juillet 1654: „De même j'ai résolu le problème...et celui-ci: *De trois cercles*, *trois points*, *trois lignes*, [*trois*] *quelconques étant donnés*, *trouver un cercle qui*, *touchant les cercles et les points*, *laisse sur les lignes un arc capable d'un angle donné.* J'ai résolu ces problèmes *plainement*, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites; mais dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles: Je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane et doit passer pour telle" (voir la p. 298 du T. II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome).

Quant à la solution de de Sluse, à laquelle il fait allusion dans la lettre mentionnée dans la note 3 de la p. 271, elle se basait probablement sur une analyse analogue à celle de Huygens. On en trouve l'application à un cas particulier numérique dans une Pièce qui accompagne une lettre de de Sluse à Brunetti; voir les p. 241—247 du T. VII des „Œuvres de Blaise Pascal", citées dans la note 4 de la p. 196.

D'ailleurs le problème est un cas particulier de celui-ci: Décrire une circonférence qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés. Ce dernier problème est également plan. On en trouve une solution moderne par M. G. Tarry à la p. 290 du „Traité de géometrie par Rouché et de Comberousse", Paris, Gauthier-Villars, édition de 1891, première Partie. Fiedler en élabora une autre p. 169—172 de son ouvrage: „Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugel und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme", Leipzig, 1882. Steiner annonça, en 1826, dans son traité „Einige geometrische Betrachtungen", qu'il possédait une solution du problème qu'il n'a pas publiée (voir la p. 20 du T. I de l'ouvrage: „Jacob Steiner's gesammelte Werke" Berlin, G. Reimer, 1881).

[2]) La Pièce est empruntée aux p. 7—14 du Manuscrit N°. 13. Nous l'avons divisée en para-

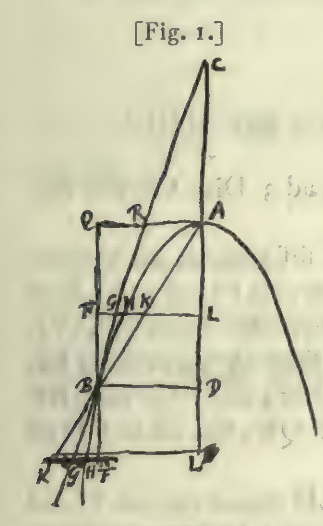
VIII [2]).

1657.

1657. Nov.

Quadratura Parabolæ et ſimilium curvarum altioris gradus. Item ratio ſolidorum ex ipſis ad cylindros. Et centrorum gravitatis inventio in planis ſolidiſque.

[Fig. 1.]



§ 1 [3]).

AB eſt Parabola. CA ∞ AD. Dico CB eſſe tangentem in B.

dem. DA [ad] AL [ut] BD [ad] LK [4]).
BD ſive FL [ad] LK [ut] qu.FL ad qu.LH.
ſed FL ad LK major quam qu.FL ad qu.LG, quia FG ∞ GK [5]). Eſt enim ut DC ad CA ita BD ſive QA ad AR, h. e. FK ad KG. Ergo qu.FL ad qu.LH major quam qu.FL ad qu.LG. Ergo LH minor quam LG. Ergo punctum G extra parabolam. Eadem ratione tota BGC.

---

graphes. Le texte du premier paragraphe et une partie de celui du second ont servi d'avant-projet pour la Pièce que nous reproduisons dans l'Appendice I, p. 283—287.

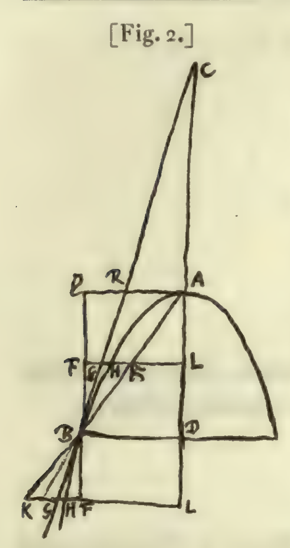
Ajoutons que les résultas obtenus dans cette Pièce et dans l'Appendice II (p. 288—293) sont mentionnés par Huygens à la dernière page de la „Pars terria" de son „Horologium oscillatorium" (p. 90 de l'édition originale).

[3]) Ce paragraphe contient la détermination de la tangente à la parabole ordinaire et aux paraboles d'autres degrés. Il a servi d'avant-projet à la première partie (jusqu'au „Theorema II") de l'Appendice I, p. 283—285.

[4]) Cette proportion et les raisonnements qui suivent s'appliquent également aux *deux* ensembles de points F, G, H, K, L, dont les uns se trouvent au-dessus et les autres au-dessous de la ligne BD.

[5]) Posons FL = a, FG = GK = b. L'inégalité en question peut alors s'écrire pour la ligne supérieure FGHKL: $\frac{a}{a-2b} > \frac{a^2}{(a-b)^2}$, et pour l'autre ligne KGHFL: $\frac{a}{a+2b} > \frac{a^2}{(a+b)^2}$. Dans les deux cas il est facile d'en vérifier l'exactitude.

[Fig. 2.]



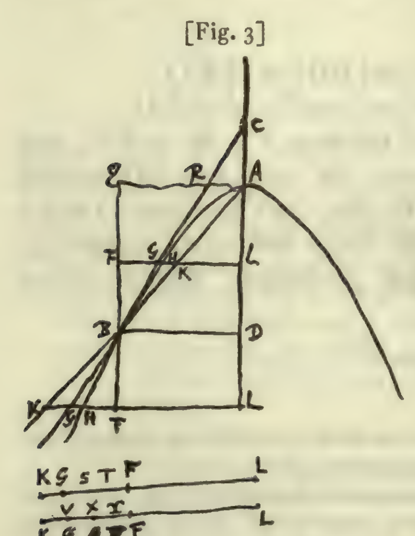
Sit Curva AB [Fig. 2] ejus naturæ, ut ficut DA ad AL ita fit cubus BD ad cubum HL. Fiat CD tripla DA. dico CB effe tangentem in B.

Ratio FL (BD) ad LK [∞ ratione] DA [ad] AL [∞] tripla rat.is BD five FL ad LH. Sed ratio FL ad LK major quam triplicata rat.is FL ad LG: quia FG $\infty \frac{1}{3}$ FK [1]). nam CA ad AD five BQ ut AR ad RQ, h. e. ut KG ad GF.

Ergo ratio FL ad LH major quam FL ad LG. Ergo LH minor quam LG. &c.

Sit DA³ ad AL³ ut BD⁴ ad HL⁴.

[Fig. 3]



Sit CD ad DA ut 4 ad 3. Dico CB effe tangentem in B.

Ratio FL [ad] LK fefquitertia eft rationis FL ad LH [2]). Eft enim cub.FL ad cub.LK ut qq.FL ad qq.LH. ex hypoth. Atqui ratio FL ad LK major eft quam fefquitertia rationis FL ad LG: quia KF ad FG ut 4 ad 3* [3]). Nam KF ad FG ut AQ (BD) ad QR, hoc eft ut CD ad DA (BQ).

Ergo ratio FL ad LH major ratione FL ad LG. Ergo LH minor quam LG. &c.

*Lemma. Sit KF differentia linearum FL, LK et FG $\infty \frac{3}{4}$FK. dico rationem FL ad LK effe majorem quam fefquitertiam rationis FL ad LG.

Sint enim inter LK, LF tres mediæ proportionales LV, LX, LY. Ergo etiam continuè proportionales erunt KV, VX, XY, YF. Et KV harum minima, ac

---

[1]) Les inégalités se réduisent ici (pour FL $= a$, FG $= b$) à $\frac{a}{a-3b} > \frac{a^3}{(a-b)^3}$ et $\frac{a}{a+3b} > \frac{a^3}{(a+b)^3}$.

proinde minor quam $\frac{1}{4}$FK [4]), quare ratio FL ad LG minor ratione FL ad LV.

Eſt autem ratio FL ad LV, triplicata rationis FL ad LY. Ideoque ratio FL ad LV eadem quæ cubi FL ad cub.LY. Ratio vero FL ad LK eſt quadrupla rationis FL ad LY; ac proinde eadem quæ qq.^{i}FL ad qq.^{m} LY. Ergo quum ratio qq.^{i}FL ad qq.^{mi} LY ſit ſeſquitertia rationis quam habet cub.FL ad cub.LY. Erit quoque ratio FL ad LK ſeſquitertia rationis FL ad LV. ſed ratione FL ad LV minor eſt ratio FL ad LG. Ergo ratio FL ad LK major quam ſeſquitertia rationis FL ad LG. quod erat prop.

Aliter. Ratio FL ad LK quadrupla eſt rationis FL ad LY. Ratio autem cubi FL ad cub.LK tripla eſt rationis FL ad LK. Ergo ratio cubi FL ad cub. LK erit tripla quadruple hoc eſt duodecupla rationis FL ad LY. Rurſus ratio FL ad LV eſt tripla rationis FL ad LY. Ratio autem qq.^{i}FL ad qq.^{m} LV eſt quadrupla rationis FL ad LV. Ergo ratio qq.^{i}FL ad qq.^{m} LV eſt quadrupla triplæ, hoc eſt duodecupla rationis FL ad LY. Itaque eadem eſt ratio qq.^{i}FL ad qq.^{m} LV quæ cub.FL ad cub.LK, Sed ratione qq.^{i}FL ad qq.LV minor eſt ratio qq.^{i}FL ad qq.^{m} LG [5]). Ergo ratio qq.^{i}FL ad qq.^{m} LG minor quoque ratione cubi FL ad cub.LK.

Semper ut exponens poteſtatis quæ conſideratur in ordinatim applicatis, quæ hic erat 4, ad exponentem poteſtatis quæ conſideratur in abſciſſis ab axe, quæ hic erat 3, ita debet eſſe KF ad FG [6]) hoc eſt AQ ad QR, hoc eſt CB ad BR, ac

---

[2]) Voir toujours les *deux* ensembles de points F, G, H, K, L. On a évidemment dans les deux cas: $\frac{FL}{LK}=\frac{BD}{LK}=\frac{AD}{AL}=\left(\frac{BD}{HL}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{FL}{HL}\right)^{\frac{4}{3}}$.

[3]) Voir le „Lemma", qui suit.

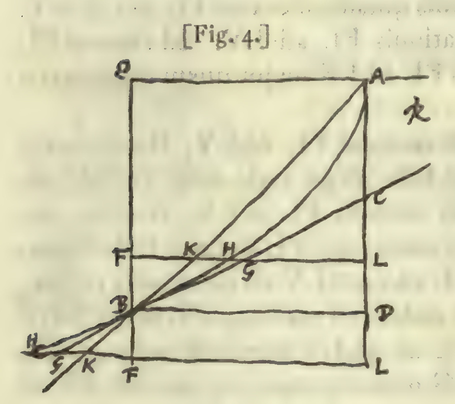
[4]) La relation KV $< \frac{1}{4}$KF n'est valable que pour l'ensemble qu'on trouve dans la figure principale au-dessus de la ligne BD; pour l'autre ensemble on a KV $> \frac{1}{4}$ KF; ce qui n'empêche pas que la conclusion que Huygens fait suivre ne soit véritable dans les deux cas; voir la note 5.

[5]) Puisqu'on a dans le premier des deux ensembles, qu'on trouve au-dessous de la figure principale: KV $>$ KG $= \frac{1}{4}$KF, dans le second: KV $<$ KG et, par suite, dans tous les deux: LG $>$ LV. Il est clair d'ailleurs que ces méthodes de démonstration géométrique peuvent s'appliquer également aux cas de la parabole propre et de la parabole cubique, qui précèdent.

[6]) Voir les Fig. 1—4.

proinde ita CD ad DA, ut fiat CB tangens in B. Vel fimplicius fic. Si ratio BD ad HL quadrupla æquatur triplæ rationi DA ad AL. debet effe CD ad DA ut 4 ad 3. Et fic de cæteris.

[Fig. 4.]



Sit AHB parabola cujus diameter AQ, contingens in vertice AD [1]).

Confiderentur autem BD, HL tanquam ordinatim applicatæ. Ergo quia BD ad HL proportio dupla eft proportionis DA ad LA. hoc eft quia ficut BD^2 ad HL^2 ita DA^2 ad LA^2, debebit effe CD ad DA ut 1 ad 2, ut fiat BC contingens in B.

Hoc autem modo curvas difponi ad quadraturam non eft neceffe, fed ad inveniendum folidum ex converfione circa tangentem in vertice. unde centrum gravitatis innotefcit [2]).

---

§ 2 [3]).

AD [Fig. 5] eft tangens in A. Dico trilineum BHAD effe ad fpatium BHAQ ut dimidia DB ad BQ [4]).

Si enim non. Ergo trilineum BHAD, vel ad fpatium majus vel minus ipfo BHAQ erit ut dimidia DB ad BQ.

Efto primum ad majus, quod fit X fpatium. Poteft ergo figura circumfcribi ex $\square^{\text{is}}$ quæ fit minor fpatio X [5]). factum fit igitur. Ergo trilineum BHAD

---

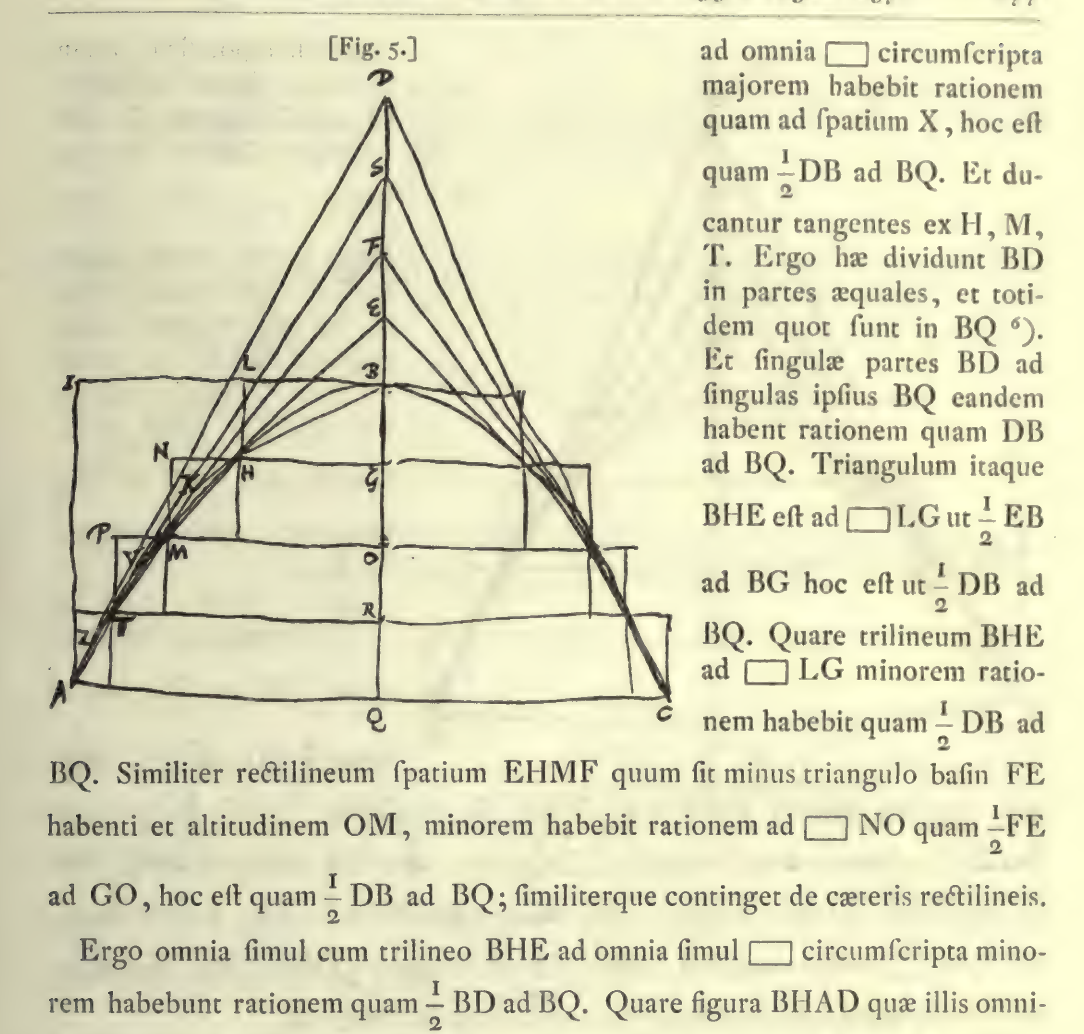
[1]) Dans ce qui suit la règle générale que Huygens vient de trouver est vérifiée dans le cas de la parabole ordinaire, la tangente au sommet étant considérée cette fois comme l'axe des abscisses.

[2]) Cette annotation fut ajoutée à une date postérieure à la rédaction de la présente Pièce. On verra, en effet, que les quadratures qui vont suivre sont fondées bien certainement sur la propriété de la tangente que Huygens vient de déduire.

[3]) Quadrature des paraboles de divers degrés et cubature de leurs solides de révolution.

[4]) La figure représente une courbe paraboloïde quelconque $y^a = kx^b$ (où B est l'origine et BQ l'axe des x), pourvu seulement qu'on ait $a > b$.

[Fig. 5.]



ad omnia □ circumscripta majorem habebit rationem quam ad spatium X, hoc est quam $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Et ducantur tangentes ex H, M, T. Ergo hæ dividunt BD in partes æquales, et totidem quot sunt in BQ [6]). Et singulæ partes BD ad singulas ipsius BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Triangulum itaque BHE est ad □ LG ut $\frac{1}{2}$ EB ad BG hoc est ut $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Quare trilineum BHE ad □ LG minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Similiter rectilineum spatium EHMF quum sit minus triangulo basin FE habenti et altitudinem OM, minorem habebit rationem ad □ NO quam $\frac{1}{2}$FE ad GO, hoc est quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ; similiterque continget de cæteris rectilineis.

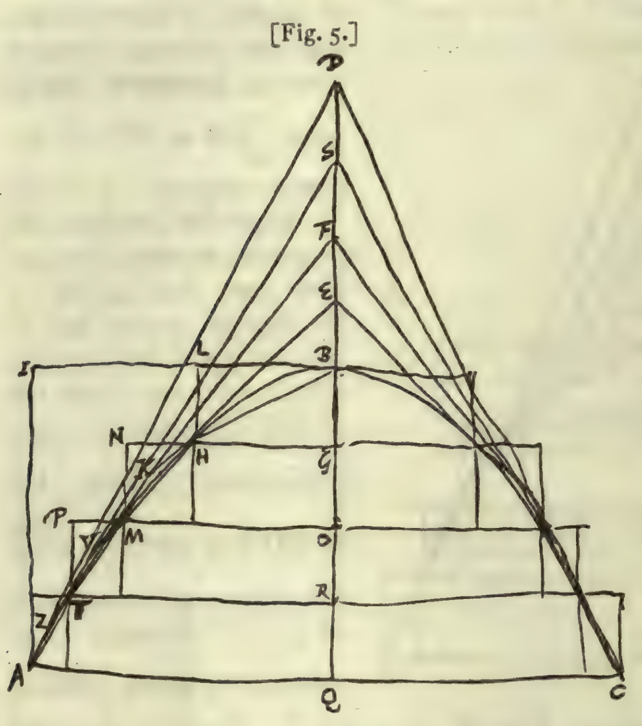
Ergo omnia simul cum trilineo BHE ad omnia simul □ circumscripta minorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Quare figura BHAD quæ illis omnibus minor est, ad omnia □ circumscripta multo minorem habebit rationem quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Sed et majorem habere ostensum fuit. Quod fieri non potest. Ergo &c.

---

[5]) Comparez le „Theorema I" des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", p. 289 du T. XI. Évidemment la méthode de démonstration employée au lieu cité s'applique également à la présente figure.

[6]) Puisqu'il résulte des propriétés de la tangente, déduites dans le paragraphe précédent, que les segments BE, BF, etc. sont proportionnels aux segments BG, BO, etc.

[Fig. 5.]



Jam ſi fieri poteſt ſit ſpatium X minus ſpatio BHAQ [1]) ad quod ſpatium X eam rationem habeat ſpatium BHAD quam $\frac{1}{2}$BD ad BQ. Ergo poteſt inſcribi figura ex □^{is} quæ ſit major ſpatio X. Sit factum igitur. Ergo ſpatium BHAD ad omnia inſcripta □ minorem habebit rationem quam ad X, hoc eſt quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Ducantur rurſus tangentes &c.

Habet igitur △EKF ad □ HO majorem rationem quam $\frac{1}{2}$ FE ad GO, hoc eſt quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Similiter majorem habebit △FVS ad □ MR. Et △SZD ad □ TQ. Ergo omnia ſimul △^{a} ad omnia ſimul inſcripta □ majorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$B D ad BQ. dictis autem triangulis majus eſt ſpatium BHAD. Ergo hoc ad omnia inſcripta □^{a} multo majorem habebit rationem quam $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Sed minorem habere antea oſtenſum fuit. Quod abſurdum eſt. Ergo &c.

---

[1]) Ici Huygens annota en marge „hoc primum". Évidemment cette indication se rapporte à la rédaction définitive du Traité que Huygens se proposait d'écrire sur ces matières. Toutefois l'indication n'a pas été suivie dans la nouvelle rédaction que nous reproduisons dans l'Appendice I; voir la p. 286 de cet Appendice.

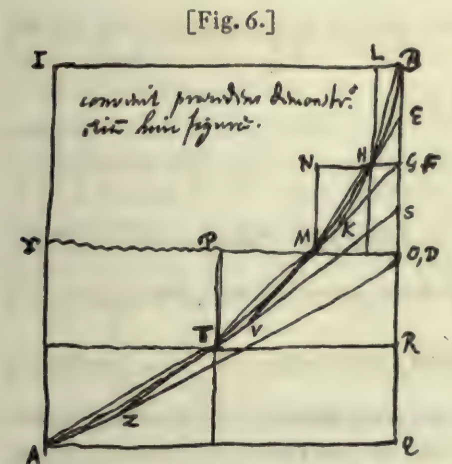
[2]) La figure représente le cas où $a < b$ dans l'équation $y^a = kx^b$ de la courbe paraboloïde; comparez la note 4 de la p. 276.

[3]) Puisqu'il y a évidemment entre le solide décrit par le triligne élémentaire DATS [Fig. 5] et le cylindre décrit par le rectangle AR le rapport de $\frac{1}{3}$DS à RQ.

[4]) Il s'agit des courbes représentées par l'équation $y^a x^b = k$, a et b entiers et positifs.

[5]) On trouvera ces recherches dans l'Appendice II, p. 288—293.

[Fig. 6.]



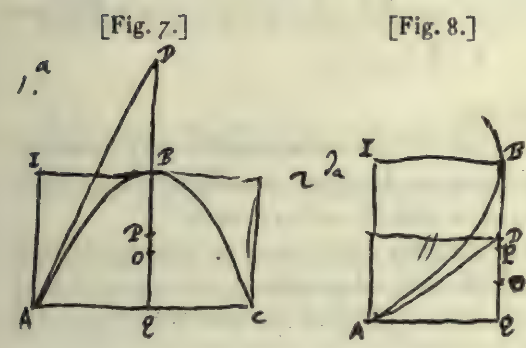
convenit præcedens demonſtr.° etiam huic figuræ [Fig. 6] [2]).

Haud abſimili modo oſtendemus ſolidum ex converſione ſpatij DBA [Fig. 5] circa axem DB ad ſolidum ex converſione ſpatij BAQ eſſe ut $\frac{1}{3}$ DB ad BQ [3]).

---

deſunt hic quæ de hyperboloidum [4]) infinitarum genere, ſpatijſque, inter ipſas et aſymptotos interjectis, inveni; quæ ſimili atque hæc ratione demonſtrantur [5]).

[Fig. 7.] [Fig. 8.]



Si modo curva BA ſit ejuſmodi, ut, ductâ tangente ad punctum quodvis ipſius ut A, eadem ſit ſemper ratio DB ad BQ, quadratura ſpatij BAQ, et ſolidi ex converſione circa axem BQ ratio ad cylindrum inveniri poterit.

Sit DQ ∞ a, BQ ∞ b [6]). Quia igitur trilineum DBA ad ſpatium BAQ ut $\frac{1}{2}$DB $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)$ ad BQ(b), vel in 2da [fig.] $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ ad b. Ergo componendo (vel in 2da fig. invertendo et per converſionem rationis, et rurſus invertendo) △DAQ ad ſpat.BAQ ut $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ [ad] b.

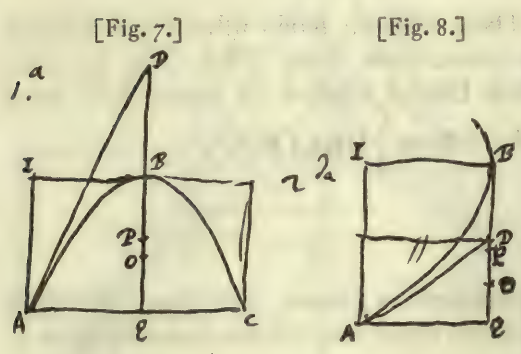
Sed ▭ IQ ad △DAQ ut b ad $\frac{1}{2}a$.

---

[6]) Il s'agit donc toujours des courbes $y^a = kx^b$, appelées *paraboloïdes* par Huygens dans les cas où a et b sont des nombres entiers et positifs.

Ergo ex æquo in perturbata [1]), erit □ IQ ad ſpat. BAQ ut $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ [ad] $\frac{1}{2}a$, hoc eſt ut $a + b$ ad a. 1.a Regula.

[Fig. 7.] [Fig. 8.]



Rurſus quia ſolidum ex tril. DBA ad ſolid. ex BAQ ut $\frac{1}{3}$ DB $\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right)$ ad BQ (b), vel in 2da $\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a$ [ad] b Erit componendo (vel in 2da fig. invertendo et per converſ. rationis, et rurſus invertendo) conus ex DAQ ad ſolid. ex BAQ ut $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ ad b. Sed cylindrus ex IQ eſt ad conum ex DAQ ut BQ ad $\frac{1}{3}$ DQ hoc eſt ut b ad $\frac{1}{3}a$. Ergo ex æquo in perturb. [1]) Erit cylindrus ex IQ ad ſolidum ex BAQ ut $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ ad $\frac{1}{3}a$ hoc eſt ut $a + 2b$ ad a. 2.a Regula.

Converſio fieri intelligitur circa axem BQ.

In lineis autem Paraboloidibus, ſemper eſt DQ commenſurabilis BQ. Itaque in his pro a ſumenda eſt exponens poteſtatis quæ conſideratur in ordinatim applicatis. Pro b exponens poteſtatis quæ conſideratur in abſciſſis ad verticem.

Ex. gratia in curva ſuperiori [2]) ubi ordinatim applicatarum ratio quadrupla æqualis ponebatur rationi triplicatæ abſciſſarum ad verticem, erit $a \infty 4$. $b \infty 3$. Itaque ſi BA fuerit curva ejuſmodi; erit ratio □ IQ ad ſpatium BAQ ut $a + b$ ad a, hoc eſt ut 7 ad 4.

Cylindrus vero ex IQ ad ſolidum ex BAQ in converſione, ut $a + 2b$ ad a, hoc eſt ut 5 ad 2. In prima nimirum figura. At in 2da, ubi tangens in vertice pro axe eſt. Erit DQ ſive $a \infty 3$. BQ ſive $b \infty 4$. Unde □ IQ ad ſpatium BAQ ut $a + b$ ad a, hoc eſt ut 7 ad 3. ut neceſſe erat [3]).

Cylindrus vero ex IQ ad ſolidum ex BAQ ut $a + 2b$ ad a, hoc eſt ut 11 ad 3.

---

[1]) On peut consulter sur cette expression la note 22 de la p. 304 du T. XI.

[2]) Voir la p. 274.

[3]) Voir la première phrase du deuxième alinéa de la p. 281.

[4]) Détermination des centres de gravité des paraboles de divers degrés et de leurs solides de révolution.

[5]) On n'en trouve rien dans ce qui suit. La relation est, d'ailleurs, une conséquence immédiate du théorème de Guldin, à propos duquel Huygens écrivit à de Sluze, le 3 septembre 1657:

Itaque per conv. rationis cylind. ex IQ ad folid. ex BAI, ut $a + 2b$ [ad] $2b$. hoc eft ut 11 ad 8.

Notandum quod fi in 1ª et 2ᵈᵃ figura [Fig. 7 et 8] eadem fuerit linea curva quamquam diverfo pofitu: quod a et b invicem quantitatem permutent. Sicut in propofito exemplo, in prima fig. fuerat a ∞ 4. b ∞ 3. In fecunda vero fig. fit a ∞ 3. b ∞ 4. Unde cum cylindrus ex IQ ad fol. ex BAI, fit ut $a + 2b$ [ad] $2b$ dicemus proinde in 1ª fig. cylindrum ex IQ (converfione facta circa BI) ad fol. ex BAQ effe ut $b + 2a$ ad $2a$ hoc eft propofito exemplo ut 11 ad 8. 3.ª Regula.

§ 3 [4]).

Centrum gravitatis plani ABC ex his fic nunc inquiremus. Sit O centrum grav. plani ABC. P vero centr. gr. ▭ IC, divifâ BQ bifariam in P. Sit BO ∞ x. BP autem eft ∞ $\frac{1}{2}b$.

Ratio cylindri ex IQ circa axem BI, ad folidum ex ABQ, vel cylindri ex IC ad folidum ex ABC, componitur ex ratione ▭ⁱ IC ad fpatium ABC, et ex ratione BP ad BO: ut poftea oftendemus [5]).

Itaque ratio $b + 2a$ ad $2a$ [6]) æqualis compofita ex rationibus $<\begin{matrix} a + b \text{ [ad] } a\,^{7)} \\ \frac{1}{2}b \text{ [ad] } x \end{matrix}$

Ergo $b + 2a$ [ad] $2a$ ut $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb$ [ad] ax.

BO ∞ $\frac{ab + bb}{b + 2a}$ ∞ x. fubtrahatur x à BQ ∞ b ∞ $\frac{bb + 2ab}{b + 2a}$ fit OQ ∞ $\frac{ab}{b + 2a}$.

„ad gravitatis vero centrum indagandum, theorema quoddam quod apud Guldinum reperi ἀναπόδεικτον", [c'est-à-dire: sans preuve] „sed tamen verissimum" (p. 51 du T. II). Peut-être Huygens avait-il l'intention de faire suivre une démonstration de ce théorème.

Ajoutons encore que, sous la date du 14 déc. 1653, on rencontre dans le Manuscrit K (p. 35) l'annotation suivante: „Theorema Guldini ipsius p. 147. Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiorem potestate sive quantitate rotata. Hujus demonstrationem nullam habet sed inductione probat tantummodo, ostendens sua cum aliorum inventis convenire. Verum est utique quod proponit, et non difficile demonstratu. Lemma addit hunc habens sensum. Quod Potestas Rotunda quævis ad aliam ejusdem generis, compositam habeat rationem, ex ratione potestatum rotandarum et ratione radiorum rotationis. quod ex theoremate consequitur. Radius autem rotationis est recta ex centro grav.ⁱˢ potestatis rotandæ ad axem rotationis perpendicularis. Via item rotationis est circumferentia à dicto gravitatis centro in conversione descripta". Comparez le „Liber secundus" de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 153 du T. I; mais remarquons que les „Libri secundus, tertius et quartus" parurent en 1640 et 1641, et non pas en 1650 et 1651 comme la note citée le donne.

6) Voir la „3ª Regula".

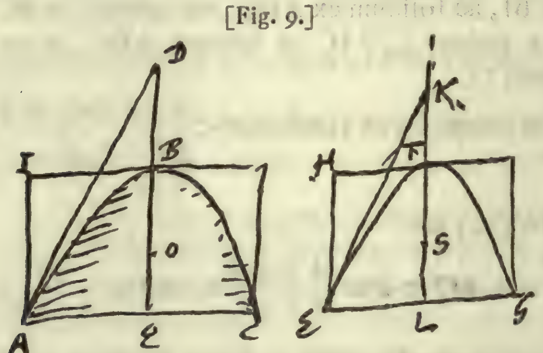
7) Voir la „1.ª Regula", p. 280.

Ergo BO ad OQ ut $a+b$ ad a, hoc est ut □ IC ad ſpat. ABC. 4.ª Regula.

Hinc rurſus invenimus rationem cylindri ex converſione □i IC circa axem AC, ad ſolidum ex ſpatio ABC circa eundem axem. Hæc enim ratio componitur denuo ex ratione □ IC ad ſpatium ABC et ex ratione QP ad QO. hoc eſt ex ratione $a+b$ [ad] a et QP $\left(\frac{1}{2}b\right)$ [ad] QO $\left(\frac{ab}{b+2a}\right)$ ſive $\frac{1}{2}b+a$ [ad] a, quæ compoſita ratio erit eadem quæ $aa+\frac{3}{2}ab+\frac{1}{2}bb$ ad aa, hoc eſt $a+\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\frac{bb}{a}$ ad a. 5.ª Regula. hoc eſt, in curva ſuperiori [1]) 77 ad 32, in parabola vero 15 ad 8.

Porro ad centrum gravitatis inveniendum in ſolido ABC. Invenienda eſt primum curva ejuſmodi, in qua ordinatim applicatæ ſeſe habeant ſicut quadrata ordinatim applicatarum in curva ABC [2]).

[Fig. 9.]



DQ ∞ a, BQ ∞ b; item KL ∞ a, LF ∞ n.

Eſto inventa ſitque curva EFG. igitur neceſſe eſt □ HG ad ſpatium EFG eandem habere rationem quam cylindrus IC ad ſolidum ABC. hoc eſt quam $a+2b$ ad a [3]). Sed □ HG ad ſpatium EFG eam quoque habet rationem quam $a+n$ ad a (per reg. 1.) [4]), quandoquidem hujus generis curva eſt EFG. Igitur quia $a+n$ ad a ut $a+2b$ ad a. Erit n ∞ $2b$. Unde curva EFG jam notæ eſt proprietatis. plani autem EFG centrum gr.ˢ eadem proportione ſecare neceſſe eſt axem FL, qua centrum gr. ſolidi ABC axem BQ. Sed FS eſt ad SL ut $a+n$ ad a, hoc eſt ut $a+2b$ ad a. Ergo et BO ad OQ ut $a+2b$ ad a. Regula 6.ᵗᵃ. Unde conſtat eſſe BO ad OQ ut cylindrus IC ad ſol. ABC.

---

[1]) C'est-à-dire pour laquelle $a=4$, $b=3$; voir la deuxième courbe de la p. 274.

[2]) La méthode que Huygens va suivre apprend donc à réduire la détermination du centre de gravité du solide de révolution, décrit par un segment de la courbe $y=f(x)$ autour de l'axe des abscisses, à la détermination du centre de gravité du segment correspondant de la courbe $y=[f(x)]^2$.

[3]) Voir la „2.ª Regula", p. 280.

[4]) Voir la p. 280.

APPENDICE I À LA PIÈCE N°. VIII [5]).

[1657].

Lemma [6]).

[Fig. 1.]

[Fig. 2.]

Si differentia linearum FL, KL quæ eſt KF dividatur in partes quotcunque æquales punctis T, S, G; Ratio FL ad LT rationis FL ad LT ſæpius multiplex erit quam linea FK lineæ FT [7]). Eademque ratio FL ad LK rationis FL ad LS ſæpius multiplex quam linea FK lineæ FS. Et rationis FL ad LG, quam linea FK lineæ FG [8]).

Sint enim inter FL, KL mediæ proportionales YL, XL, VL; totidem nempe quot ſunt puncta lineam FK dividentia. Ergo etiam continue proportionales

---

5) Dans cet Appendice, que nous avons emprunté à deux feuilles détachées, on retrouve, dans une rédaction plus achevée, une partie des matières traitées dans la Pièce N°. VIII.

6) Comparez le „Lemma" de la p. 274.

7) Soit n le nombre des divisions du segment FK, on a alors, comme Huygens le démontrera, dans les *deux* cas representés respectivement par les Fig. 1 et 2, $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$. Afin que les raisonnements qui suivent, et les conclusions que Huygens en tire dans le „Theorema" qui suit, soient justes, on doit donc donner à la phrase précédente une interprétation conforme à cette relation. Toutefois, dans le cas de la Fig. 2, où LK > FL, cette phrase semble plutôt mener à la relation: $\frac{FL}{LK} < \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$, puisqu'elle exige que dans la relation $\frac{FL}{LK} = \left(\frac{FL}{LT}\right)^\nu$, ν soit plus grand que n. Nous croyons, en effet, que la phrase a été mal choisie et qu'elle est le résultat d'une inadvertance.

8) Soit, plus généralement, P le point terminal de la $p^{\text{ième}}$ des n divisions du segment FK, on aura alors $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LP}\right)^{\frac{n}{p}}$, c'est-à-dire, posant FL $= a$, FT $= b$, dans le cas de la Fig. 1 : $\left(\frac{a}{a-nb}\right)^p > \left(\frac{a}{a-pb}\right)^n (a > nb)$ et dans l'autre cas $\left(\frac{a}{a+nb}\right)^p > \left(\frac{a}{a+pb}\right)^n$.

[Fig. 1.]

[Fig. 2.]

erunt, differentiæ FY, YX, XV, VK. patetque proinde ratione FL ad LT minorem fore quam FL ad LY [1]). Atqui ratio FL ad LK toties multipla eſt rationis FL ad LY quoties linea FK multipla eſt FT. Ergo eadem ratio FL ad LK rationis FL ad LT ſepius multipla erit quam linea FK lineæ FT [2]).

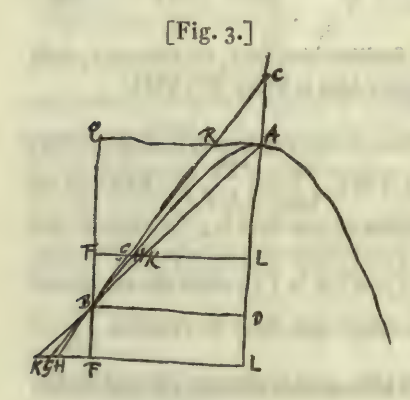
Similiter cum ratio FL ad LS minor ſit ratione FL ad LX. ratio autem FL ad LK toties multipla ſit rationis FL ad LX quoties linea FK lineæ FX. Erit ratio FL ad LK rationis FL ad LS ſæpius multipla quam linea FK lineæ FS.

Similiterque oſtendetur rationem FL ad LK ſæpius multiplicem eſſe rationis FL ad LG quam linea FK lineæ FG.

Theorema [I.]

Si a puncto in paraboloide recta ad axem ordinatim applicetur et accipiatur in axe, à puncto ubi applicata ei occurrit, recta verticem verſus; quæ ad partem axis interceptam inter applicatam et verticem ſeſe habeat ut exponens poteſtatis quæ in ea paraboloide conſideratur in ordinatim applicatis ad exponentem poteſtatis quæ conſideratur in abſciſſis ad verticem, Recta quæ ducitur a terminò lineæ in axe acceptæ ad punctum in paraboloide ab initio ſumtum, paraboloidem in puncto illo continget.

[Fig. 3.]



Sit paraboloidis AB, cujus axis AD, vertex A. Sitque ejus naturæ ut quadratoquadrata ordinatim applicatarum BD, HL, ſint inter ſe ut cubi abſciſſarum ad verticem DA, LA [3]).

Dico ſi ſumatur in axe DC quæ ſit ad DA ut 4 ad 3 (quoniam nempe hi ſunt exponentes qu.qu. et cubi) et ducatur recta CB, eam tangere paraboloiden in B. Sumto enim in recta CB puncto quolibet alio G, oſtendemus id cadere extra paraboloiden AB.

Sit GL [4]) rectæ BD parallela, et occurrat axi in

[1]) Puisque, évidemment, dans le cas de la première figure FY > FT et dans celui de la seconde FY < FT; par conséquent, pour les deux figures, LT > LY.

[2]) Lisez $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LT}\right)^{n}$.

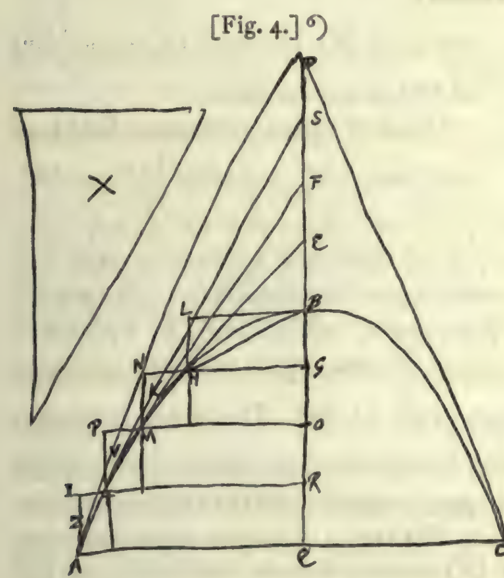
[3]) Huygens va donc choisir un cas particulier mais on verra facilement que la méthode de

L, rectæ vero BF axi parallelæ in F, et paraboloidi in H. Ei vero quæ conjungit puncta A B, in K. Et compleatur rectang. ADBQ, cujus latus AQ secet recta CB in R.

Est ergo ut CD ad DA ita CB ad BR et AQ ad QR et KF ad FG, nimirum ut 4 ad 3. Ac proinde ratio FL ad LK sæpius multipla rationis FL ad LG quam FK multipla est FG [5]). Id est, ratio FL ad LK major quam sesquitertia rationis FL ad LG. Atqui ratio FL sive BD ad LK sive DA ad AL est sesquitertia rationis BD seu FL ad LH. Ergo ratio FL ad LG minor quam FL ad LH. Ideoque LG major quam LH. Unde patet totam lineam CB, præter punctum B, cadere extra paraboloidem. quod erat dem.

THEOREMA [II].

[Fig. 4.] [6])



Paraboloidis cujusvis portio ad triangulum eandem cum ipsa basin habentem, latera vero rectas quæ portionem ad terminos basis contingunt, eam habet rationem quam portionis axis ad dimidiam compositæ ex eodem axe et axe dicti trianguli.

Sit Paraboloidis portio recta ABC, cujus axis vel axi perpendicularis recta BQ [7]); vertex B; basis AC; tangentes vero in terminis basis rectæ

démonstration s'applique également au cas plus général de l'énoncé du théorème, pourvu seulement que les ordonnées soient élevées à une plus haute puissance que les abscisses; voir pour un exemple du cas contraire, où les raisonnements ont besoin de quelques modifications faciles à apporter, la Fig. 4 de la p. 276.

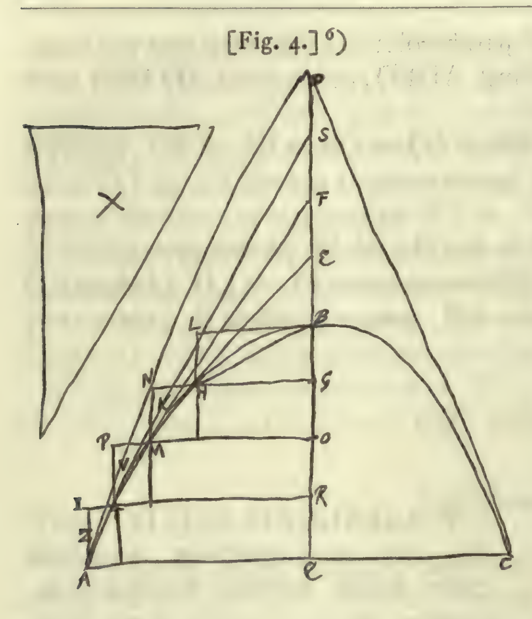
[4]) Voir les *deux* droites GL indiquées dans la figure. Les raisonnements qui suivent s'appliquent également à toutes les deux.

[5]) Consultez la note 7 de la p. 283.

[6]) À propos de cette figure Huygens annota en marge: „Il faut retrancher la moitiè BC". Probablement Huygens a-t-il aperçu que dans le cas où a est impair la partie BC n'appartient pas à la courbe $y^a = kx^b$ ($y =$ MO, $x =$ BO).

[7]) Au lieu de cette phrase on lisait primitivement: „cujus axis BQ". Probablement Huygens a-t-il remarqué plus tard que dans le cas où a est impair et b pair, la ligne BL est le véritable axe de la courbe. Toutefois il n'a pas apporté dans la suite les changements que cette constatation aurait dû entraîner.

[Fig. 4.] [6])



AD, CD, convenientes cum axe in D.

Dico portionem ABQ esse ad triang. ADQ, ut BQ ad semissem lineæ æqualis duabus DQ, QB [1]).

Hoc autem patebit si ostenderimus trilineum BHAD, curvâ BA et rectis AD, DB comprehensum, esse ad semiportionem BAQ, ut $\frac{1}{2}$BD ad BQ [2]). Erit enim, componendo, triangulum DAQ ad semiportionem ABQ ut $\frac{1}{2}$DB una cum BQ sive ut $\frac{1}{2}$DQ cum $\frac{1}{2}$BQ ad BQ. et convertendo.

Quod si igitur trilineum BAD ad semiport. ABQ non est ut $\frac{1}{2}$DB ad BQ, Ergo hanc rationem habebit ad spatium quod vel majus erit vel minus semiportione ABQ. Habeat primó ad majus, quod dicitur X [3]). Itaque cum spatium X sit majus quam BAQ, poterit huic figura circumscribi ordinatim ex rectangulis æque altis ut sunt IQ, PR, &c. quæ sit minor spatio X. Factum id intelligatur; itaque trilineum BAD ad omnia ista rectangula majorem rationem habebit quam ad spatium X, hoc est, quam $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Ducantur tangentes paraboloidem ad puncta T, M, H, in quibus latera dictorum rectangulorum ipsam secant, nimirum rectæ TS, MF, HE; Ergo hæ dividunt BD in partes æquales inter se, ac totidem numero quod sunt in axe BQ latera dictorum rectangulorum. Et singulæ partes ipsius BD ad singulas axis BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Triangulum itaque BHE est ad rectang. LG ut $\frac{1}{2}$ EB ad BG, hoc est, ut $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Quare trilineum BHE ad idem rectang. LG minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$DB ad BG [4]). Similiter spatium EHMF, quum sit minus triangulo basin FE habenti et altitudinem MO, minorem rationem habebit ad rectang. NO quam

[1]) Comparez les dernières lignes de la p. 279.

[2]) Comparez le § 2, p. 276.

[3]) Voir la note 1 de la p. 278. Dans ce qui va suivre la rédaction plus primitive des pp. 277 et 278, est suivie de très près, à l'exception du dernier alinéa, où la rédaction est un peu plus complète dans la présente Pièce.

$\frac{1}{2}$ FE ad GO, five quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Idemque verum eſt de ratione ſpatiorum cæterorum FMTS, STAD, ad rectang.ª PR, IQ. Ergo omnia prædicta ſpatia unà cum trilineo BHE, hoc eſt trilineum totum BAD ad omnia ſimul rectang.ª circumſcripta minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Sed et majorem habere dictum fuit, quod eſt abſurdum. Ergo trilineum BAD ad ſemiport.BAQ non habet majorem rationem quam $\frac{1}{2}$BD ad DQ [4]).

Jam ſi fieri poteſt habeat minorem, ſitque proinde ſpatium aliquod X minus ſemiportione BAQ, ad quod ſe habeat trilineum BAD ut $\frac{1}{2}$ BD adDQ [5]). Cum igitur ſpatium X ſit minus ſemiportione BAQ, poterit ei inſcribi figura ordinatim ex rectangulis æque altis quæ ſit major ſpatio X. Sit igitur factum, ac ſunto ea rectangula HO, MR, TQ. Ergo trilineum BAD ad hæc rectang.ª minorem rationem habebit quam ad ſpatium X, hoc eſt minorem quam $\frac{1}{2}$BD ad BQ.

Ducantur rurſus tangentes curvam ad puncta quibus anguli inſcriptorum ▭orum ipſi occurrunt, quæ ſint HE, MF, TS, quæ itaque dividunt rectam DB in partes æquales, et totidem numero quot ſunt in axe BQ, et ſingulæ partes DB ad ſingulas BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Singulæ vero tangentes productæ occurrant ſibi proximis in punctis K, V, Z. Itaque triang.EKF ad ▭ HO majorem habet rationem quam $\frac{1}{2}$FE ad GO, hoc eſt quam $\frac{1}{2}$BD ad BQ. Ac ſimiliter majorem habebit triang. FVS ad ▭ MR, et triang.SZD ad ▭TQ. Ergo omnia ſimul triang. dicta ad omnia inſcripta rectang.ª majorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$BD ad BQ. Dictis autem triangulis majus eſt trilineum BAD, ergo hoc ad figuram ex ▭ inſcriptis majorem utique rationem habebit quam $\frac{1}{2}$DB ad BQ. Sed et minorem habere dictum fuit, quod eſt abſurdum. Ergo nec minorem rationem habet trilineum BAD ad ſemiportionem BAQ quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ, nec majorem. quare eandem habeat neceſſe eſt, quod erat dem.ᵐ [5]).

---

4) Lisez: BQ.

5) On trouve encore sur la même feuille une figure entièrement analogue à la Fig. *6* de la p. 279, avec la remarque: „Convenit præcedens demonſtratio etiam huic figuræ. Oſtendemus autem utrobique ſimili ratione ſolidum ex converſione spatij trilinei DBA circà axem DB ad ſolidum ex converſione ſpatij BAQ circa BQ eſſe ut $\frac{1}{3}$ DB ad BQ" (voir la note 3 de la p. 278). Enfin on y lit une annotation au crayon: „Addenda quadratura Hyperboloidum" (voir l'Appendice II qui suit).

APPENDICE II À LA PIÈCE N°. VIII [1]).

[1657].

§ 1 [2]).

$x^p y^q \infty a^{p+q} \infty a^s$. fit $p+q \infty s$. p major q. QO $\infty \frac{q}{p}x$ ex regula tang. [3]).

$$\text{QO}\left(\frac{qx}{p}\right) \text{ [ad] QA } (y) \text{ [ut] OL } \left(\frac{sx}{p}\right) \text{ [ad] LP } \left(\frac{sy}{q}\right)$$

$$\left.\frac{1}{2}\text{OL}\left(\frac{1}{2}\frac{sx}{p}\right)\right\} \text{m.}$$

[Fig. 1.]

$$\frac{ssxy}{2pq} \infty \triangle\text{PLO}.$$

$$ee \infty \triangle\text{PLO}\left(\frac{ssxy}{2pq}\right);\ y \infty \frac{2pqee}{ssx};$$

$$a^s \infty \left(\frac{2pqee}{ssx}\right)^q x^p;$$

$$x^{p-q} \infty \frac{(ss)^q a^s}{(2pqee)^q};$$

$$x \infty \sqrt[p-q]{\frac{(ss)^q a^s}{(2pqee)^q}}$$

---

[1]) Cet Appendice, que nous empruntons à la même feuille où se trouve la première partie de l'Appendice I, contient les recherches de Huygens sur la quadrature des hyperboles de divers degrés. Nous l'avons divisé en paragraphes.

[2]) Ce paragraphe se rapporte au cas général d'une hyperbole de degré quelconque. Probablement Huygens y veut démontrer que l'aire du triangle LPO s'approche indéfiniment de zéro lorsque le point de contact A s'éloigne indéfiniment vers le côté droit; c'est-à-dire il se

§ 2 [4])

$$xxy \infty a^3; \ \frac{xxy}{2xy} \infty \frac{1}{2} x [\infty] QO$$

PLE ad AEO ut 4 ad 1 [5])
PLO ad AOE ut 3 ad 1 feu 9 ad 3
fed PLO ad AQO ut 9 ad 1
PLO ad AQE ut 9 ad 4 [6])
fed PLO ad LA ut 9 ad 4 [7])
Ergo LA ∞ AQE [8]).

Dico PLE effe ad AOE ut 4 ad 1. hoc eft PLO ad AOE ut 3 ad 1. hoc eft fumta LΘ ∞ $\frac{1}{3}$ LO, dico effe ΘPO ad ΘPL ut PLE ad AOE.

---

propose de faire voir qu'on peut donner une telle valeur à LQ $= x$, que l'aire de ce triangle prend une valeur *ee* aussi petite qu'on le veut. C'est du moins ce qui résulte immédiatement de la dernière formule de ce paragraphe.

[3]) Il peut s'agir ici d'une application de la règle du Theorema I de la p. 284 au cas analogue des hyperboles de divers degrés, auquel cas le point L de la présente figure remplace le point A de la figure 3 de la p. 284; toutefois il résulte de la première ligne du § 2 qui suit que Huygens était déjà en possession de la „Regula" qu'il communiqua à de Witt dans sa lettre du 25 février 1663; voir la p. 315 du T. IV. Il s'agit donc plutôt d'une application de cette dernière „Regula".

[4]) Dans ce paragraphe Huygens esquisse une méthode qui conduit à la quadrature des hyperboles de divers degrés. Il se borne à cet effet à la considération du cas $p = 2$, $q = 1$.

[5]) Puisque les triangles élémentaires (comme PΣX) qui composent l'aire de la figure mixtiligne PAHNP sont à ceux (comme ΣOS) qui constituent l'aire de la figure OAHEO comme 4 à 1 (PA étant égal à 2AO), Huygens en a pu conclure que ces figures elles-mêmes sont dans ce même rapport. Passant ensuite à la limite en supposant que le point H s'éloigne à l'infini il en déduit que PLEAP (où E représente cette fois un point à l'infini) est à OAEO comme 4 à 1, et que, par suite, PLEAP—OAEO (c'est-à-dire PLO) est à OAEO comme 3 à 1.

[6]) Puisque AQE est la somme de AOE et AQO.

[7]) Voir l'expression obtenue au § 1 pour △PLO, dans laquelle on a ici $s = 3$, $p = 2$, $q = 1$.

[8]) La méthode est applicable au cas général, auquel cas Huygens aurait pu écrire:

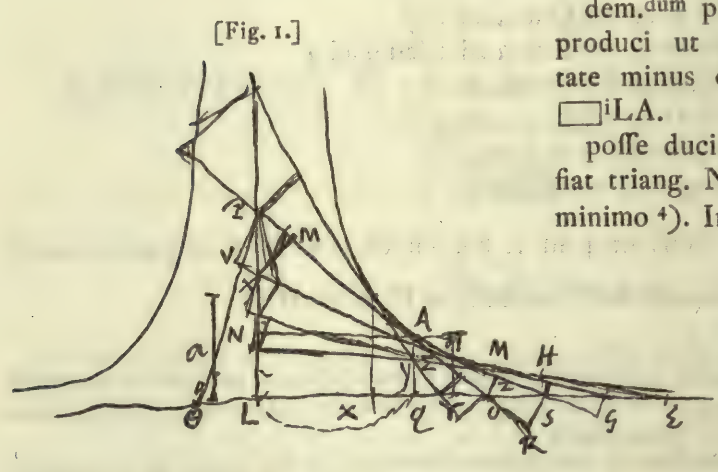
PLE ad AOE ut p^2 ad q^2
PLO ad AOE ut $p^2 - q^2$ ad q^2 seu s^2 ad $\frac{sq^2}{p-q}$
sed PLO ad AQO ut s^2 ad q^2
PLO ad AQE ut s^2 ad $\frac{2pq^2}{p-q}$
sed PLO ad LA ut s^2 ad $2pq$
Ergo LA ad AQE ut $p-q$ ad q;

résultat identique à celui qu'on obtient par l'analyse moderne.

Toutefois la méthode suivie par Huygens présuppose que l'aire AQEA (E à l'infini) pos-

§ 3 [1].

PAHN'[ad] AHEO [ut] 4 [ad] 1 [2]).



[Fig. 1.]

dem.dum poſſe AEQ [3]) eouſque produci ut qualibet data quantitate minus deficiat a magnitudine □ iLA.

poſſe duci tangentem NHE, ut fiat triang. NEL dato quovis ſpatio minimo [4]). Intelligatur quaſi in infinitum ſpatia æqualia OS, SG, GE &c. progredientur et tangentes a ſingulis punctis.

△PΣV majus quam 4ΣOZ. ſed △MΣX minus quam 4ΣSR.

Omnia trilinea ut AΣT [5]) poſſunt fieri minora dato quovis ſpatio. nam minora quam AoT [6]). quæ omnia minora quam □ AY [7]).

ſupp. $xxy \propto a^3$.
dem.dum xy æquale dato quolibet minimo [8]).

$$xy \propto ee \text{ minimum datum. } y \propto \frac{ee}{x};\ eex \propto a^3;\ x \propto \frac{a^3}{ee}$$

$$x^{10}y^9 \propto a^{19};\ xy \propto ee;\ y \propto \frac{ee}{x};\ \frac{e^{18}}{x^9} \propto y^9 \text{ duc in } x^{10};\ xe^{18} \propto a^{19} \propto x^{10}y^9;\ x \propto \frac{a^{19}}{e^{18}}.$$

---

sède une valeur finie; comme on le voit facilement en l'appliquant au cas $p < q$. Huygens paraît s'en être aperçu, car dans les deux paragraphes qui suivent, où il prépare une démonstration archimédienne, il s'occupe surtout de montrer la valeur finie des aires qui devaient entrer dans cette démonstration qu'il ne semble jamais avoir achevée.

[1]) Consultez sur la portée de ce paragraphe le dernier alinéa de la note précédente.

[2]) Voir la première phrase de la note 5 de la p. 289.

[3]) Il s'agit de la figure mixtiligne AHEQA.

[4]) Voir le § 1, p. 288.

[5]) T est le point de contact de la tangente VTS.

[6]) Voir la très petite lettre o à l'angle supérieur du côté droit du rectangle AQYo.

[7]) Voir la lettre Y, entre Q et O, qui indique un point de la droite LE.

§ 4 [9]).

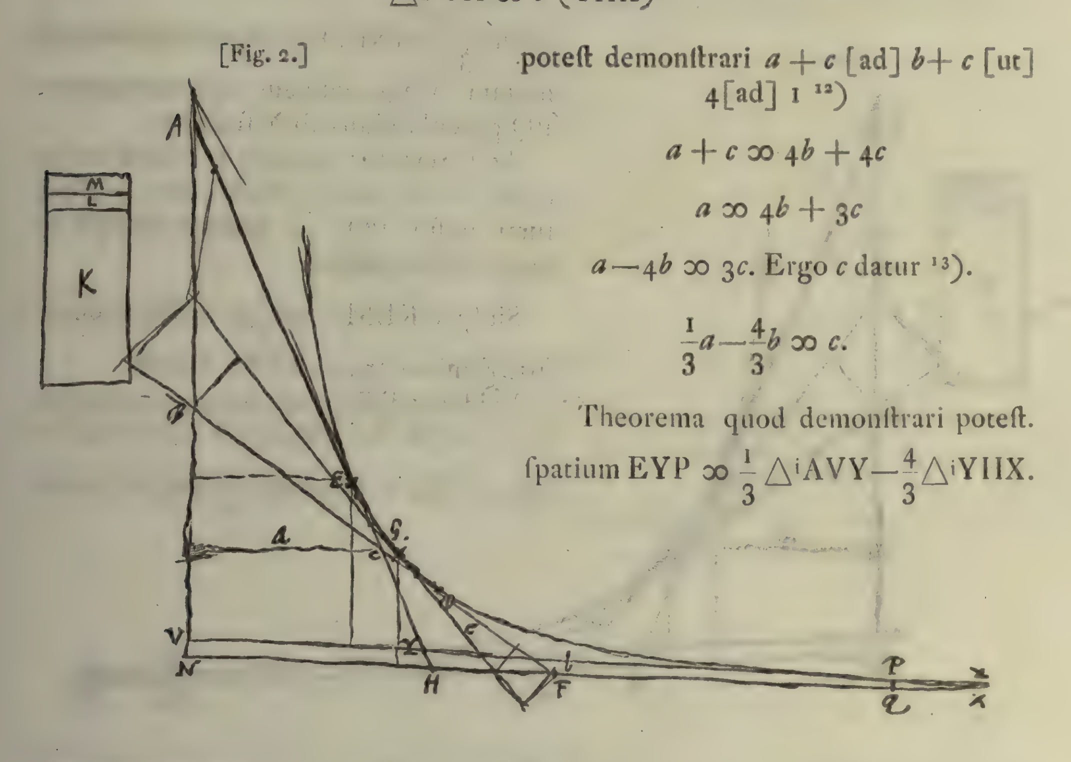
ſpat. AEPV [ad] EPXH ut 4 ad 1 [10]).

$\triangle$ABC ∞ a (AVY) [11])

trilineum ECD ∞ c (EYP)

$\triangle$FCH ∞ b (YHX)

[Fig. 2.]



poteſt demonſtrari $a + c$ [ad] $b + c$ [ut] 4 [ad] 1 [12])

$a + c \infty 4b + 4c$

$a \infty 4b + 3c$

$a - 4b \infty 3c$. Ergo c datur [13]).

$\frac{1}{3}a - \frac{4}{3}b \infty c.$

Theorema quod demonſtrari poteſt.

ſpatium EYP ∞ $\frac{1}{3}$ $\triangle$ⁱAVY $-$ $\frac{4}{3}$ $\triangle$ⁱYHX.

[8]) Huygens veut montrer que l'aire du rectangle LA s'approche indéfiniment de zéro lorsque le point A s'éloigne sur la courbe vers le côté droit.

[9]) Ce paragraphe donne la quadrature du triligne ECDCE et la valeur limite de l'aire comprise entre EH, l'asymptote HQ et la courbe EDP prolongée à l'infini.

[10]) Comparez la note 5 de la p. 289. On a dans le cas général AEPV : EPXH $= p^2 : q^2$.

[11]) Huygens veut indiquer que les relations qui suivent sont valables aussi bien dans le cas où les lettres a, b et c représentent respectivement les aires AVY, EYP, YHX que dans le cas où elles représentent les aires ABC, ECD et FCH.

[12]) Comparez la première ligne du § 3.

[13]) C'est-à-dire, puisqu'on peut calculer les aires des triangles AVY et YHX, la quadrature du

dico ubicunque ſumatur P, ſpatium EHQP eſſe minus tertiâ parte trianguli AHN.

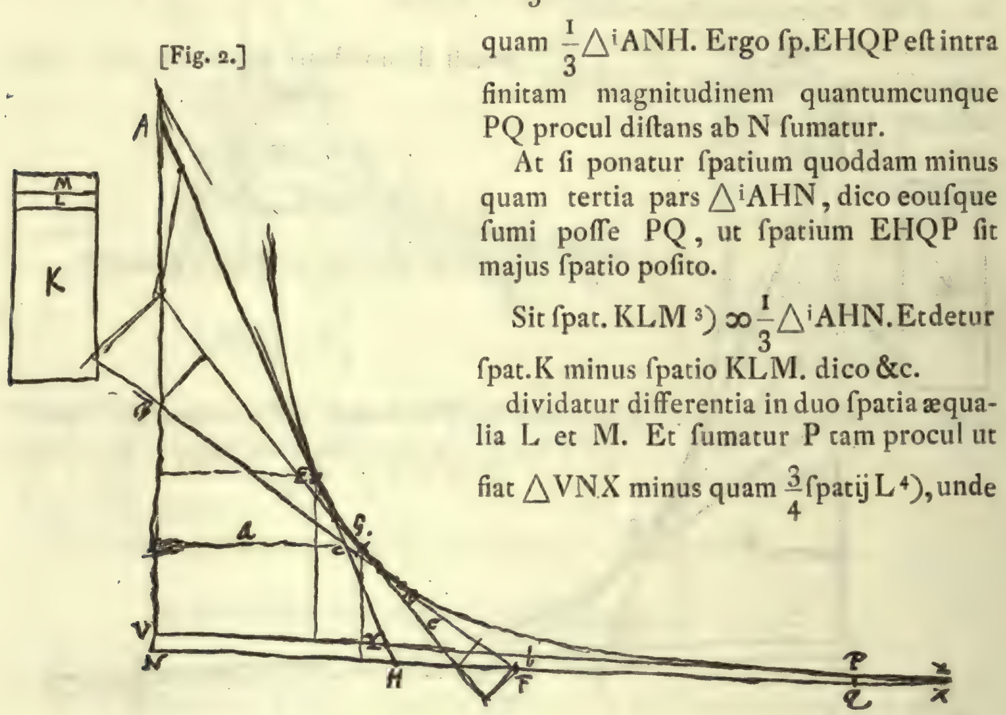
Sit VPX tangens, nempe ut XQ ſit ſubdupla ad QN [1]). Jam ſpatium EYP æquatur $\frac{1}{3}\triangle$AVY $-\frac{4}{3}\triangle$VXN [2]). Sed ſpat. YHQP eſt minus quam $\frac{4}{3}$VXN [2]). cum ſit pars hujus trianguli. Ergo EYP eſt minus quam $\frac{1}{3}$AVY—YHQP. Ergo EYP + + YHQP, hoc eſt EHQP minus eſt quam $\frac{1}{3}\triangle$AVY. Ergo omnino EHQP minus quam $\frac{1}{3}\triangle$ⁱANH. Ergo ſp. EHQP eſt intra finitam magnitudinem quantumcunque PQ procul diſtans ab N ſumatur.

At ſi ponatur ſpatium quoddam minus quam tertia pars $\triangle$ⁱAHN, dico eouſque ſumi poſſe PQ, ut ſpatium EHQP ſit majus ſpatio poſito.

Sit ſpat. KLM [3]) ∞ $\frac{1}{3}\triangle$ⁱAHN. Et detur ſpat. K minus ſpatio KLM. dico &c.

dividatur differentia in duo ſpatia æqualia L et M. Et ſumatur P tam procul ut fiat $\triangle$VNX minus quam $\frac{3}{4}$ſpatij L [4]), unde

[Fig. 2.]



triligne EYP peut être considérée comme trouvée. Or, puisque la méthode suivie peut être appliquée sans aucune difficulté au cas général, il en est de même pour ce cas.

En effet, on trouve facilement dans ce dernier cas:

$$\text{tril.EYP} = \frac{q^2}{p^2-q^2}\,\text{AVY} - \frac{p^2}{p^2-q^2}\,\text{YHX} = \frac{(p+q)\{q^2(y_1-y_2)^2x_1x_2 - p^2(x_1-x_2)^2y_1y_2\}}{2pq\,(p-q)\,(x_2y_1-y_2x_1)}$$

où x_1, y_1 et x_2, y_2 représentent respectivement les coordonnées des points E et P.

[1]) Comparez la première ligne du § 2, p. 289.

[2]) Lisez: YHX.

[3]) Lisez: K + L + M et voyez la figure à gauche de la figure principale.

$\frac{4}{3}\triangle$VNX minus erit ſpatio L. Ergo cum EYP $+\frac{4}{3}\triangle^i$VNX [5]) æquatur $\frac{1}{3}\triangle^i$AYV, Erit EYP + ſpatio L majus quam $\frac{1}{3}\triangle^i$AYV. Eſt autem ſpatium VYHN, omnino minus ſpatio L vel M, quippe pars $\triangle^i$VNX. Ergo EYP + L + M majus quam $\frac{1}{3}$AYV + VYHN, eoque omnino majus quam $\frac{1}{3}$AYV $+\frac{1}{3}$VYHN hoc eſtquam $\frac{1}{3}\triangle^i$ANH. Sed ſpat. K + L + M æquatur $\frac{1}{3}\triangle^i$ANH. Ergo EYP majus eſt ſpatio K. quod erat demonſtr.m [6]).

---

[4]) Comparez le § 1, p. 288 et la note 2 de cette p. 288.

[5]) Lisez: YHX; mais puisque YHX < VNX, la conclusion qui suit n'en est pas moins valable.

[6]) On peut donc conclure que l'aire EHPQ s'approche indéfiniment, lorsque le point P s'éloigne vers la droite, de la valeur $\frac{1}{3}\triangle$ ANH (ou, dans le cas général, de la valeur $\frac{q^2}{p^2-q^2}\triangle$ ANH); valeur qu'elle ne surpasse jamais. Or $\triangle$ ANH $=\frac{(p+q)^2}{2pq}\square$EN (d'après le § 1, p. 288), par suite, la limite de l'aire EHPQ est égale à $\frac{(p+q)q}{2p(p-q)}\square$EN. En ajoutant à cette limite l'aire $\frac{q}{2p}\square$EN du triangle EKH, qu'on obtient en abaissant du point E une perpendiculaire BK sur NQ, on retrouve donc facilement le résultat formulé dans la note 8 de la p. 289.

IX.

[1657—1658.]

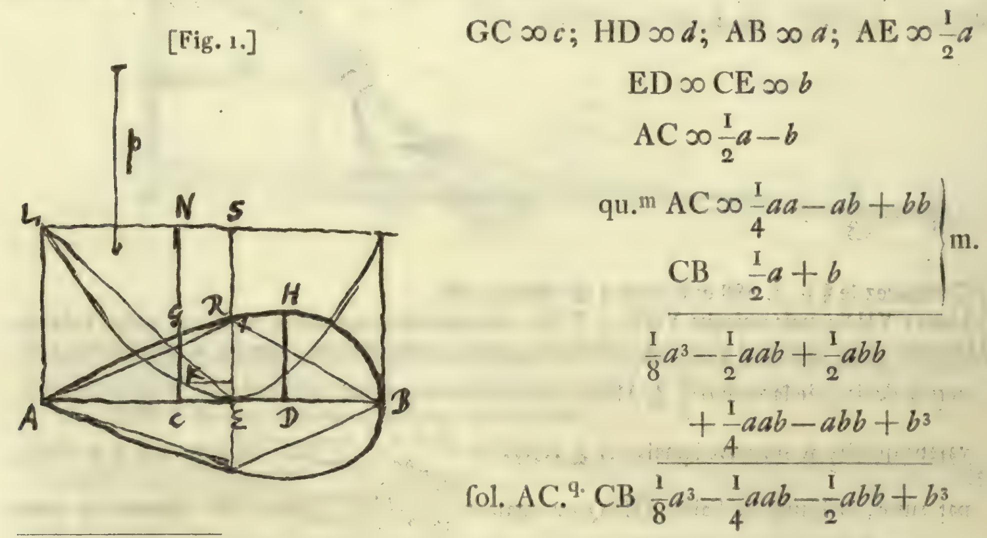
[*Recherches de* 1657 *et* 1658 *sur quelques lignes courbes.*]

§ 1 [1]).

[1657].

Linea AGHB ejus naturæ ut GC sit ad HD, sicut solid. ex quadrato AC in rectam CB, ad solidum ex quadr. AD in DB [2]).

[Fig. 1.]



$GC \infty c$; $HD \infty d$; $AB \infty a$; $AE \infty \frac{1}{2}a$

$ED \infty CE \infty b$

$AC \infty \frac{1}{2}a - b$

$$\left.\begin{array}{l} \text{qu.}^{\text{m}}\ AC \infty \frac{1}{4}aa - ab + bb \\ CB \quad \frac{1}{2}a + b \end{array}\right\}\text{m.}$$

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}aab + \frac{1}{2}abb$$

$$+ \frac{1}{4}aab - abb + b^3$$

$$\text{sol. } AC.^{\text{q.}}\ CB\ \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb + b^3$$

---

[1]) Ce paragraphe est emprunté aux pp. 2—5 et 62 du livret du frère Philips, que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII. Huygens s'y occupe, à propos d'une lettre de de Sluse du 14 août 1657 (voir la p. 47 du T. II), de la quadrature, du centre de gravité,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{q.}^{\text{m}}\ \text{AD} & \frac{1}{4}aa + ab + bb \\ \text{DB} & \frac{1}{2}a - b \end{array}\right| \text{m.}$$

$$\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{1}{2}abb$$

$$-\frac{1}{4}aab - abb - b^3$$

$$\text{AD}^2.\text{BD}\ \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3$$

Jam si GC ductum in ▭ ap, hoc est cap, fit ∞ AC² in CB et HD in ▭ ap, hoc est dap, ∞ AD² in DB: Erit ut c ad d ita

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb + b^3\ [\text{ad}]\ \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3$$

$$\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3$$

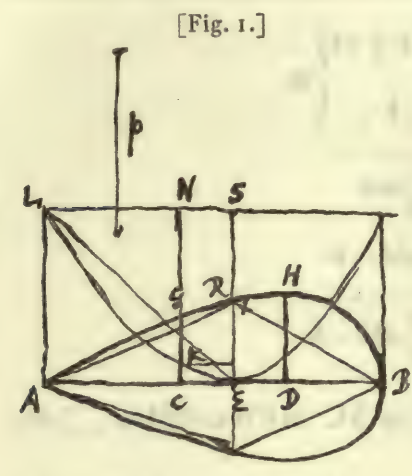
$$\frac{1}{4}a^3 - abb \infty cap + dap$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa - bb}{p} \infty c + d$$

---

de la tangente au contour et de la forme générale de la boucle incluse entre les courbes $apy = \pm x^2(a-x)$. On peut consulter sur les questions traitées dans ce paragraphe et sur les solutions que Hudde et van Heuraet en ont données les pp. 47, 52, 58, 62, 73—75, 80, 91, 94—101, 111, 112, 114, 115 et 116 du T. II.

[2]) Dans ce qui suit il s'agit de la quadrature de la boucle en question. Voici, en notations modernes, la méthode suivie par Huygens: Soit AE = EB = $\frac{1}{2}a$, CE = ED = b. Si l'on considère séparément les parties de la moitié supérieure de la boucle à gauche et à droite de la ligne SE, il est évident que l'aire de cette moitié est égale à $\int_0^{\frac{1}{2}a}\left[f\left(\frac{1}{2}a-b\right)+f\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right]db$, où $f(x) = \frac{x^2(a-x)}{ap}$. Or, puisque $f\left(\frac{1}{2}a-b\right)+f\left(\frac{1}{2}a+b\right) = \frac{\frac{1}{4}aa-bb}{p}$, la quadrature en question se réduit à la quadrature bien connue de la demi-parabole SELS, où ES $= \frac{a^2}{4p}$, LS $= \frac{1}{2}a$.



Sit ut p ad $\frac{1}{2}a$ ita $\frac{1}{2}a$ ad $\frac{1}{4}\frac{aa}{p}$ ∞ ES. Ea erit ∞ 2RE. quoniam hic $\frac{bb}{p}$ evanefcit. defcribatur parabola vertice E axe ES, latere recto p. Ea tranfibit per angulum L □li AS. Eritque CK ∞ ∞ $\frac{bb}{p}$. Eft autem CN ∞ $\frac{1}{4}\frac{aa}{p}$. Ergo KN ∞ ∞ $\frac{\frac{1}{4}aa - bb}{p}$ ∞ GC + HD. Ergo totum fpatium AGHB ∞ dimidiæ parab.LES. Ergo fefquitertium △iLES five △iARB [1]).

AC ∞ x [2]), CG ∞ y. □ AE × EB $\left(\frac{1}{8}a^3\right)$ [ad] □ AC × CB $(axx - x^3)$ [ut]

$$\text{RE}\left(\frac{1}{4}a\right)\text{ [ad] CG}\ \frac{\frac{1}{4}axx - \frac{1}{4}x^3}{\frac{1}{8}aa} \infty\ y$$

$$axx - x^3 \infty \frac{1}{2}aay;\ \frac{2xx}{a} - \frac{2x^3}{aa} \infty\ y$$

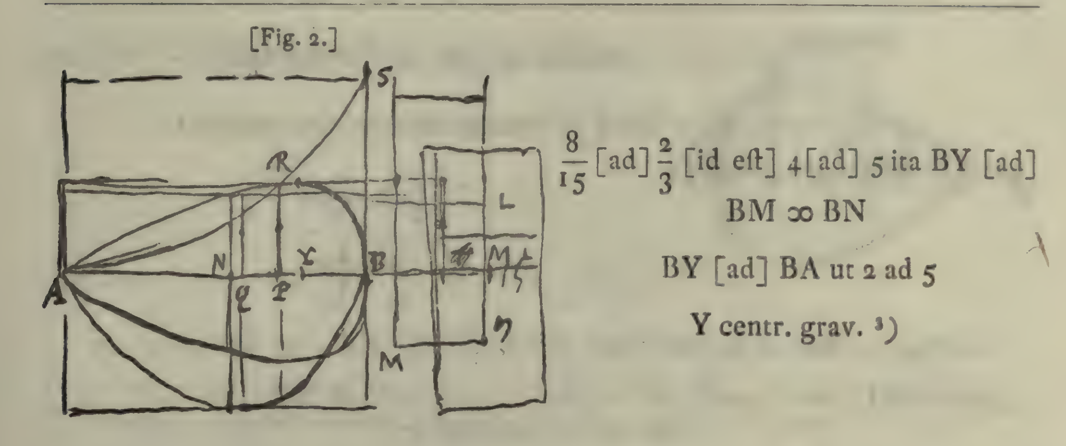
---

[1]) Ce résultat fut communiqué, avec la plupart des autres qui suivent, à de Sluse dans une lettre du 3 septembre 1657; voir les p. 50—51 du T. II. Huygens les avait trouvés le jour même où il reçut la lettre de de Sluse mentionnée dans la note 1 de la p. 294.

[2]) Dans ce qui suit Huygens détermine l'équation de la courbe AGRHB dans le cas particulier où ER $= \frac{1}{4}a$, c'est-à-dire, où $p = \frac{1}{2}a$.

[3]) Le résultat est exact, puisque $\frac{8}{15p}\left(\frac{1}{2}\text{AB}\right)^4$ représente le moment de l'aire ARBA par rapport à l'axe BS et $\frac{2}{3p}\left(\frac{1}{2}\text{AB}\right)^3$ cette aire elle-même; mais on ne voit pas de quelle manière ce

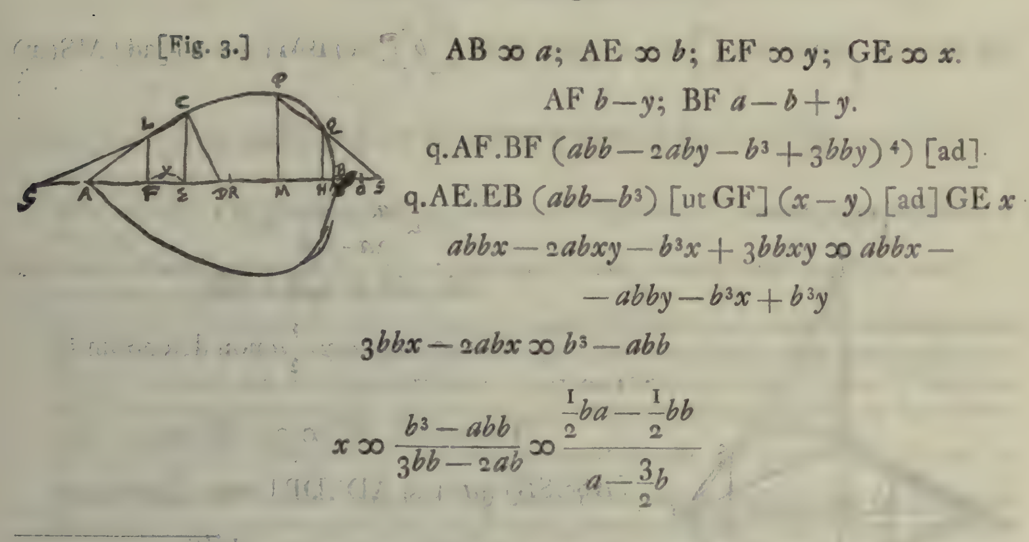
[Fig. 2.]



$\frac{8}{15}$ [ad] $\frac{2}{3}$ [id eſt] 4 [ad] 5 ita BY [ad]
BM ∞ BN
BY [ad] BA ut 2 ad 5
Y centr. grav. [3])

Inventio tangentis.

[Fig. 3.]



AB ∞ a; AE ∞ b; EF ∞ y; GE ∞ x.
AF $b-y$; BF $a-b+y$.
q.AF.BF $(abb - 2aby - b^3 + 3bby)$ [4]) [ad]
q.AE.EB $(abb - b^3)$ [ut GF] $(x-y)$ [ad] GE x

$$abbx - 2abxy - b^3x + 3bbxy \infty abbx - $$
$$- abby - b^3x + b^3y$$

$$3bbx - 2abx \infty b^3 - abb$$

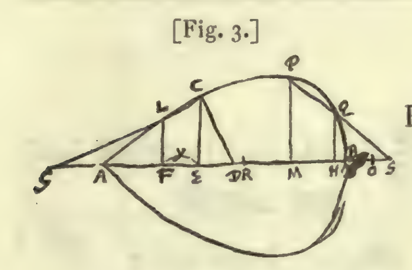
$$x \infty \frac{b^3 - abb}{3bb - 2ab} \infty \frac{\frac{1}{2}ba - \frac{1}{2}bb}{a - \frac{3}{2}b}$$

---

résultat a été obtenu. En effet, l'inspection de la figure ferait supposer que les deux rectangles à droite, qui semblent faire équilibre avec la boucle si l'on considère le plan de la figure comme mobile autour de l'axe BS, y ont joué un certain rôle; mais dans sa lettre à de Sluse Huygens dit expressément (voir la p. 51 du T. II) qu'il s'est servi du théorème de Guldin, auquel cas il a dû déterminer le volume du solide de révolution formé par la boucle tournant autour de l'axe SB. Or, nous n'avons trouvé cette cubature nulle part dans les manuscrits de Huygens.

[4]) Nous supprimons quelques calculs. Comme on le voit, Huygens néglige ici, et dans la suite, les termes qui contiennent y^2 et y^3. En effet, avec cette simplification, il applique la méthode de Fermat décrite à la p. 20 du T. XI.

[Fig. 3.]



Sit ER $\infty \frac{1}{2}$AE $\infty \frac{1}{2}b$ et ut BR$\left(a-\frac{3}{2}b\right)$ [ad] RE$\left(\frac{1}{2}b\right)$ ita fit BE $(a-b)$ [ad] EG

$$\frac{\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}bb}{a-\frac{3}{2}b}\ ^{1)}$$

AM $\infty\, b$; MH $\infty\, y$; MS $\infty\, x$; AB $\infty\, a$; AH $\infty\, b+y$; BH $a-b-y$

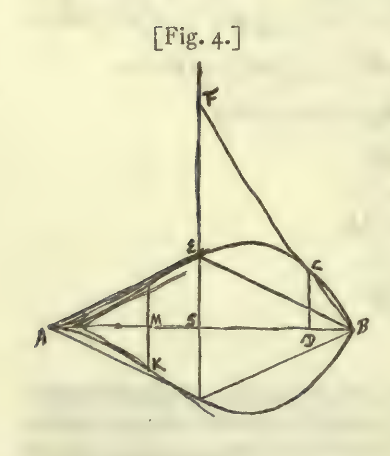
q.^{m}AH.BH $(abb+2aby-b^3-3bby)$ [2]) [ad] q.^{m}AM.MB $(abb-b^3)$ [ut] SH $(x-y)$ ad SM(x)

$$3bb-2abx\,\infty\, abb-b^3$$

$$x\,\infty\,\frac{ab-bb}{3b-2a}$$

Sit MO $\infty \frac{1}{2}$AM. BO $\left(\frac{3}{2}b-a\right)$ [ad] OM $\left(\frac{1}{2}b\right)$ [ut] BM $(a-b)$ [ad] MS(x)

[Fig. 4.]



$$x\,\infty\,\frac{ab-bb}{2a-3b}\,\infty\, b$$

$$ab-bb\,\infty\, 2ab-3bb$$

$2bb\,\infty\, ab$; $b\,\infty\,\frac{1}{2}a$ non delendum [3])

BD $\infty\, y$ [4]); SE $\infty\, p$; SF $\infty\, x$

[AS².SB] $\frac{1}{8}a^3$ [ad AD².DB] $aay-2ayy+y^3$

[ut] ES p [ad CD] $\dfrac{aapy}{\frac{1}{8}a^3}$ [5])

---

[1]) La construction est identique à celle indiquée par Huygens dans sa lettre à de Sluse; voir la p. 50 du T. II.

[2]) Comparez la note 4 de la p. 297.

[3]) Par ce petit calcul, qu'il avait biffé par mégarde, Huygens détermine la situation du point de contact E de la tangente qui passe par le sommet A de la boucle. Si nous nous rapportons à la Fig. 3, il est évident qu'on doit avoir dans ce cas GE = AE, c'est-à-dire $x=b$.

$$\mathrm{BS}\left(\frac{1}{2}a\right)\ [\mathrm{ad}]\ \mathrm{SF}\ (x)\ [\mathrm{ut}]\ \mathrm{BD}\ (y)\ [\mathrm{ad}]\ \mathrm{CD}\left(\frac{8py}{a}\right).$$

$xy \infty 4py$; $x \infty 4p$ quand[o] sc. BF tangit in B [6]).

$$[\mathrm{BG}\ \infty]\ ^{7)}\ a-b+\frac{ab-bb}{2a-3b}\ [\infty]\ \frac{2bb-4ab+2aa}{2a-3b} \infty$$

$$\infty \frac{2bb+4by-4ab-4ay+2aa}{2a-3b-3y}$$

$$-6bby+12aby-6aay \infty 8aby-8aay-12bby+12aby$$

$$bb \infty \frac{4}{3}ab-\frac{1}{3}aa$$

$b \infty \frac{1}{3}a \infty$ AM [6]). K punctum flexus contrarij

---

AD [Fig. 5] ∞ $3a$ [8]), AB ∞ a, CL ∞ d, BE ∞ BF ∞ b. [BA ∞ BC.] [9])

4) Dans ce qui va suivre Huygens se propose de déterminer la tangente au sommet B de la boucle.

5) C'est-à-dire en négligeant les termes contenant y^2 et y^3; comparez la note 4 de la p. 297.

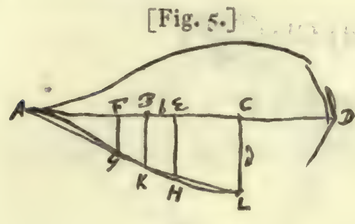
6) Comparez toujours la p. 50 du T. II.

7) Huygens va s'occuper de la détermination du point d'inflexion qui existe évidemment entre les points A et E. À cet effet il calcule la distance BG (voir le point G au côté gauche de la Fig. 3) qui doit être un minimum dans le cas où C coïncide avec le point d'inflexion. Or, afin de trouver la valeur de AM $= b$ (Fig. 4), qui correspond au minimum de l'expression $\frac{2bb-4ab+2aa}{2a-3b}$, il emploie la méthode de Fermat décrite à la p. 19 du T. XI, avec la modification qu'il y avait apportée, sur laquelle on peut consulter le § 5 de la p. 48 du Tome cité; c'est-à-dire il pose $f(b) = f(b+y)$, en omettant dans l'équation qui en résulte les termes de valeur finie, qui se détruisent mutuellement, et de même lestermes qui contiennent y^2 et y^3.

8) Dans ce qui suit Huygens donne la quadrature du segment AGKHLCA, où la courbe ne diffère pas essentiellement de celle de la Fig. 1. En effet, la proportion qui va suivre montre que la courbe AGKHLD satisfait à la définition formulée dans les premières lignes du § 1 (p. 294). Afin d'identifier entièrement les deux courbes, il suffit de représenter la ligne AB de la Fig. 1 par $3a$, au lieu de a, et de supposer $d = 4a^2 : 3p$.

9) Le point K est donc le point d'inflexion de la courbe, puisqu'on a AB $= \frac{1}{3}$AD. De même, le point L est le point de la plus grande largeur de la boucle, puisque AC $= \frac{2}{3}$AD.

[Fig. 5.]

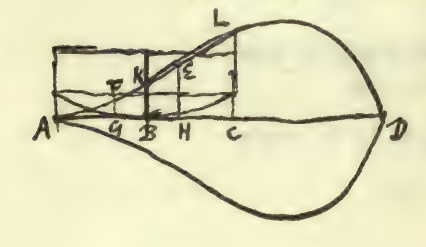


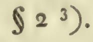
ACq. CD ($4a^3$) [ad] AEq. ED ($2a^3 + 3aab - b^3$) [ut] CL (d) [ad] EH

$4a^3$ [ad AFq. FD] ($2a^3 - 3aab + b^3$) [ut] d [ad] FG

Ergo $8a^3$ [ad] $4a^3$ [ut] $2d$ [ad] d. Ergo FG + + EG [1]) ∞ d. Ergo portio AGHLCA ∞ △ACL.

[Fig. 6.] [2])





§ 2 [3]).

EBD [Fig. 7] eſt hijperbola Æqualium laterum, axis BC, BO arbitraria. OK parallela et æqualis EC. Curva KLL ejus naturæ ut qu.HL ſit æquale □° HGF. Sluſius contemplandam propoſuit [4]).

[Fig. 7.]

BC ∞ a; BO ∞ b; c ∞ l. tr. [5]); HO, CF ∞ x; GF ∞ y

MS ($c + a - y$) [ad] SG (x) [ut] SG (x) [ad] SB [6]) $\left(\frac{xx}{c + a - y}\right)$ ∞ $a - y$

$\frac{1}{2}c + a - \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx}$ ∞ y [7])

[HG ∞] $b + a - \frac{1}{2}c - a + \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx}$

[GF ∞] $a + \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx}$

$ab - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}cc - xx + a\sqrt{.} - b\sqrt{.} + c\sqrt{.}$ [∞] □HGF

ſi $a + c$ ∞ b [8]) erit □ HGF [∞] $aa + ac - xx$ [9]).

---

[1]) Liſez : EH.

[2]) Par cette figure Huygens indique la manière dont il pourrait déterminer l'aire d'un segment, comme AFELCA, limité par la courbe, une ordonnée quelconque LC et l'axe AC. En effet, en ſuppoſant GB = BH, il est facile de constater que la ſomme de FG et de EH est égale au double de KB diminué d'une quantité proportionnelle au carré de BH. Par ſuite le double de l'aire en queſtion eſt égal au rectangle qui a pour côtés la ligne AC et le double de KB, dimi-

§ 3 [10]).

[Fig. 8.]

25 Sept. 1657.

Proprietas curvæ AC, ut, ſumptâ AB ad arbitrium, erectâque perpendiculari BC quæ curvæ occurrat in C; fiat cubus ex AB + cubo ex BC æqualis ſolido ex AB, BC, AG.

Ductâ AH ut ∠HAG ſit $\frac{1}{2}$ recti, ſit AH diameter lineæ, ita ut omnes quæ ipſam ad angulos rectos ſecant, bifariam ipſæ ſecentur. Quæritur itaque hujuſmodi ordinatim applicata EC quæ maxima ſit omnium.

Si ſumatur AF ∞ BC, erit perp. FE viciſſim ∞ BA. Si itaque CE eſt maxima, etiam BF debebit eſſe maxima; eſt autem BF ∞ AB — BC.

---

nué d'une aire parabolique indiquée dans la figure. Cette dernière aire disparaît dans le cas de la Fig. 5, ou le point K est le point d'inflexion de la courbe.

C'est bien à cette invention que Huygens fait allusion, lorsqu'il écrit à van Schooten dans une lettre du 23 novembre 1657 (p. 91 du T. II): „Cæterum id quod Slusius submonet posse ostendi secundum quam rationem curvæ suæ spatium dividatur ab ea quæ axem bifariam dividit, et ab alijs; adeo verum experior, ut in universum, qualitercunque sectum fuerit spatium curvæ suæ à recta linea, partium inter se ratio exhiberi queat".

3) Ce paragraphe est emprunté à la p. 11 du livret de Philips. Huygens y considère une courbe qui lui avait été proposée par de Sluse; voir les pp. 52, 55, 57, 66, 69, 70, 79, 88 et 94 du T. II, où l'on trouve des renseignements sur l'origine de cette courbe que de Sluse avait rencontrée chez les anciens.

4) Voir sa lettre du 4 septembre 1657, p. 52 du T. II.

5) Il s'agit de la ligne MB de la figure, M étant le sommet de l'autre branche de l'hyperbole EBD.

6) D'après une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère.

7) Nous supprimons quelques calculs.

8) Huygens procède ici à la considération du cas particulier à propos duquel il écrivit à de Sluse, le 7 septembre 1657 (p. 55 du T. II): „In contemplatione lineæ curvæ quam antiquis notam fuisse asseris frustra aliquantum temporis insumpsi, neque adhuc ullam insignem ejus proprietatem deprehendere potui, nisi quod uno casu in circulum perfectum evadit".

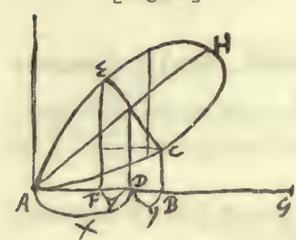
9) On trouve encore à la p. 13 du livret de Philips une épure très précise du cas du cercle ($a + c = b$) et quelques petits calculs inachevés.

10) Il s'agit dans ce paragraphe, emprunté aux p. 26—27 du livret de Philips, de la détermination de la plus grande largeur de la boucle qui appartient au folium de Descartes. Sans doute cette recherche fut entreprise à propos de la lecture des „Exercitationum mathematicarum Libri quinque" de van Schooten (voir les pp. 50 et 52 du présent Tome) qui venaient de paraître. En effet, aux pp. 493 et 497—499 de cet ouvrage van Schooten a reproduit la solution de Hudde du même problème. Hudde y emploie sa méthode pour trouver les maxima et minima; méthode qu'il n'exposa que deux années plus tard dans la seconde édition de la „Geometria Renati Descartes opera Fr. a Schooten" (voir la note 5, p. 360 du T. II). Par conséquent, Huygens vérifie ici à l'aide de la méthode de Fermat le résultat obtenu par Hudde.

AG ∞ n est data. $x^3 + 3xyy + 3yyx + y^3$ cub.AB
$x^3 - 3xxy + 3yyx - y^3$ cub.BC ∞ AF
$2x^3 + 6yyx \infty nxx - nyy$ solid.AB, BC, AG.

$$yy \infty \frac{nxx - 2x^3}{6x + n} \text{ [1]} \infty \frac{nxx + 2nzx - 2x^3 - 6xxz}{6x + 6z + n}; \; x \infty x + z$$

[Fig. 8.]



$$6nxxz - 12x^3z \infty 12nxxz - 36x^3z + 2nnzx - 6nxxz$$

$$12xx \infty nn$$

$$x \infty \sqrt{\frac{1}{12}nn} \infty \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}nn} \text{ [2]}$$

$$\frac{nxx - 2x^3}{6x + n} \infty \frac{2nxz - 6xxz}{6z} \text{ [3]}$$

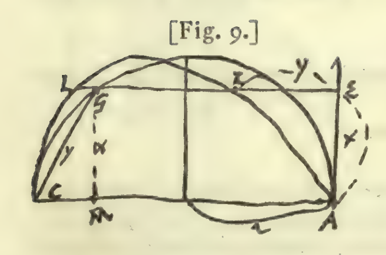
$$6nxxz - 12x^3z \infty 12nxxz - 36x^3z + 2nnxz - 6nxxz$$

$$-6xx \infty -18xx + nn$$

$$12xx \infty nn$$

§ 4 [4].

[Fig. 9.]



$$2a \text{ [ad] } y \text{ [ut] } y \text{ [ad] } \frac{yy}{2a} \text{ CM}$$

$$xx \text{ [MG}^2\text{]}$$

$$[\text{CM}^2 + \text{MG}^2 \infty] \frac{y^4}{4aa} + xx \infty yy \; [\text{CG}^2 \infty \text{IE}^2]$$

$$y^4 \infty 4aayy - 4aaxx$$

---

[1]) Dès ce moment il ne s'agit plus que de déterminer la valeur de x qui correspond à la valeur maxima de la fraction $\frac{nx^2 - 2x^3}{6x + n}$. À cet effet Huygens applique la méthode que nous avons mentionnée dans la note 7 de la p. 299.

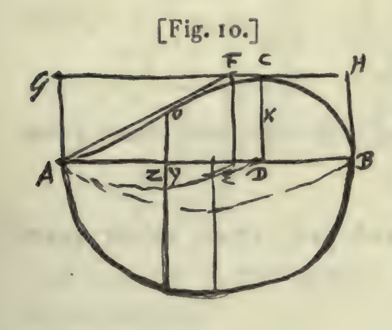
[2]) Le résultat s'accorde avec celui obtenu par Hudde, qui trouve $\sqrt{\frac{1}{6}nn}$ pour la distance du point A au point où l'axe AH de la boucle est coupé par la droite EC. Ajoutons que Descartes et Fermat se sont occupés en 1638 du même problème; mais leur correspondance sur ce sujet avec Mersenne n'était encore accessible ni à Hudde ni à Huygens, puisque la lettre

§ 5 [5]).

1658.

Curva ACB ejus naturæ ut posita AB ∞ a. AD ∞ y. DC ∞ x, fiat $ay^3 - y^4 \infty$ ∞ $aaxx$, $\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa} \infty xx$. Hanc Slusius dicebat ad circumscriptum ▭BG sicut circulus ad quadratum circumscriptum [6]). Quod falsum esse docebimus.

[Fig. 10.]



Sit AB partium 10. AE sive GF 6 et ducatur AF. Ergo trapezium AFHB ad ▭BG ut 7 ad 10 quæ multo minor est ratio quam circuli ad circumscr. quadratum [7]). Atqui trapezio AFHB adhuc minus ostendemus esse spatium à curva AOCB comprehensum [8]). Ergo hujus spatij ad ▭BG multo minor erit ratio quam circuli ad circumscr. quadratum.

---

qui contient la solution de Descartes (voir les p. 313—317 du T. II de l'édition d'Adam et Tannery des „Œuvres de Descartes"), ne parut qu'en 1667 dans le troisième volume de l'édition de Clerselier des „Lettres de Descartes"; tandis que la solution de Fermat, où une faute de calcul s'est glissée, ne fut publiée qu'en 1894, pp. 169—171 et 174—175 du T. II de l'édition de Tannery et Henry des „Œuvres de Fermat".

3) Consultez sur cette nouvelle modification de la méthode de Fermat la note 3 de la p. 76 du T. XII.

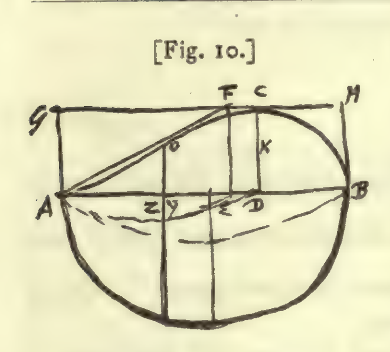
4) Déduction de l'équation de la „parabola virtualis" de Gregorius à St. Vincentio, dont on trouve la description à la p. 842 de l'„Opus Geometricum" cité dans la note 6 de la p. 53 du T. I. C'était de Sluse qui avait dirigé l'attention de Huygens sur cette courbe dans sa lettre du 4 septembre 1657, p. 52 du T. II. Le 12 octobre Huygens lui répondit (p. 67 du T. II) qu'il n'avait pu deviner ce que de Sluse avait trouvé de remarquable à propos de cette courbe; après quoi de Sluse l'avertit (p. 70 du T. II) qu'il en avait découvert la quadrature, et que l'aire de la demi-boucle CLIA est égale aux deux troisièmes du rectangle circonscrit (ce qui est exact). Enfin, dans sa lettre du 7 décembre 1657 (p. 94 du T. II), Huygens complimenta de Sluse sur ce résultat et promit d'essayer s'il pourrait y arriver à son tour. Ajoutons que nous n'avons rien trouvé sur cette quadrature dans les Manuscrits de Huygens.

5) Dans ce paragraphe, emprunté à une feuille détachée, Huygens s'occupe à propos de sa correspondance avec de Sluse de la quadrature de la boucle formée par la courbe $a^2x^2 = ay^3 - y^4$.

6) Voir, à la p. 135 du T. II, la lettre du 19 février 1658 de de Sluse à Huygens. On peut encore consulter sur cette question les pp. 122, 124, 132, 134, 140, 144 et 149—150 du T. II et surtout les p. 150—151 et 154 de ce Tome, où l'on trouve expliquée la véritable pensée de de Sluse qu'il avait mal exprimée dans sa lettre du 19 février.

7) Puisqu'on a $\pi : 4 = 7 : 8{,}91\ldots$

8) Comparez la note 3 de la p. 304.



[Fig. 10.]

$\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa}$

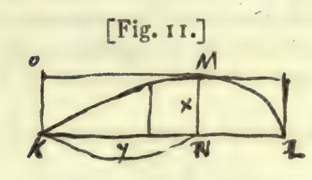
$\begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix}$

$\frac{3y^3}{a} - \frac{4y^4}{aa}$ [1]) ∞ o; $3ay^3 \infty 4y^4$; $\frac{3}{4}a \infty y$. Ergo ſi AD $\infty \frac{3}{4}$ AB ſit DC maxima altitudo

$\frac{27}{64}aa - \frac{81}{256}aa \infty xx$; $\sqrt{\frac{27}{256}aa} \infty \frac{3}{16}\sqrt{3aa} \infty$ ∞x [∞] DC.

qu.AZ (yy) [ad] qu.ZO $\left(\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa}\right)$ [ut] aa [ad] $ay - yy$; non minor quam 4 ad 1 [2]).

qu. $\left[\frac{\text{AE}}{\text{AB}}\right] \left(\frac{36}{100}\right)$ ad qu. $\left[\frac{\text{EF}}{\text{AB}}\right] \left(\frac{27}{256}\right)$ [ut] 9216 [ad] 2700; minor quam 4 ad 1 [3]).



[Fig. 11.]

$\frac{ay^3 - y^4 \infty x^4}{y\sqrt{ay - yy} \infty xx}$ hac linea circa axem KL circumvoluta dicit ſolidum ab ea genitum eſſe ad cylindrum à $\square$° LO in eadem circulatione factum, ut circulus ad circumſcr. quadratum [4]).

---

[1]) Huygens se propose ici de déterminer la valeur de y qui correspond au maximum de l'expression $\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa}$. Il applique à cet effet une méthode publiée en 1659 par Hudde (p. 510 de la seconde édition de la „Geometria à Renato Descartes" de van Schooten) dans son „Epistola secunda de maximis et minimis". Toutefois cette méthode avait déjà été trouvée auparavant par Huygens, comme il l'assure dans sa lettre à Wallis, du 9 juin 1659, p. 417 du T. II.

[2]) Puisque la valeur maxima de $ay - yy$ est égale à $\frac{1}{4}a^2$.

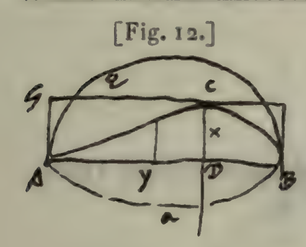
[3]) On a donc toujours $\frac{\text{ZO}}{\text{AZ}} < \frac{\text{EF}}{\text{AE}}$, d'où il suit que le point O, qui décrit la boucle, se trouve partout en dessous de la ligne AF.

[4]) Voir toujours la p. 135 du T II.

[5]) Sur ce point Huygens et de Sluse sont d'accord; voir les pp. 149 et 151 du T. II..

[6]) Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 22 mars 1658; voir la p. 154 du T. II.

[Fig. 12.]



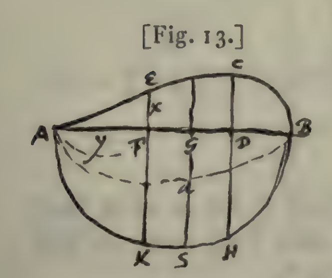
$ay^3 - y^4 \infty\, aaxx$

$y\sqrt{ay - yy} \infty\, ax$

Hujus curvæ ſpatium ad $\square$BG eſt ut ſolidum præcedens ad cylindrum. (quod et Sluſium puto voluiſſe) [5]). Ergo et ſpatium hoc erit ad $\square$ BG ut circulus ad circumſcr. quadratum quod falſum eſt.

Sed deſcripto ſuper AB ſemicirculo [Fig. 13]: invenio hunc duplum eſſe ſpatij ACBA [6]).

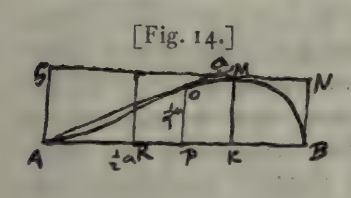
[Fig. 13.]



Eſt enim AFq. ad FEq. ut yy ad xx ſive $\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa}$ hoc eſt ut aa ad $ay - yy$, ductis omnibus in aa: hoc eſt ut qu.AB ad qu.FK. Ergo AF ad FE ut AB ad FK. Sit BD ∞ AF. Ergo eadem ratione AD ad DC ut AB ad DH ſeu FK. Quare componendo erit AF + + AD ad FE + DC ut AB ad FK. Sed eſt AF + + AD ∞ AB, quia AF ∞ DB.

Ergo, AB ad FE + DC ut AB ad FK. Quamobrem erit FE + DC ∞ FK. Unde colligo ſpatium totum AECB eſſe ∞ quadranti GSKA.

[Fig. 14.]



Si [7]) AP ∞ PB ſit PO ∞ $\frac{1}{4}$AB. Et AOQ tangens in O [8]). GQ ∞ 2GA. AK ∞ $\frac{3}{4}$AB; KM ∞ $\infty \sqrt{\frac{27}{256}}$ [AB].

Ergo qu.GR ∞ $\triangle$GAQ. Ergo $\square$BG ad trapez.AQNB ſive $\square$RN ut AB ad BR hoc eſt ut 1 ad $1 - \sqrt{\frac{27}{256}}$ quam proportionem dico majorem quam quadrati ad circ. inſcriptum. eſt enim major quam 1 ad $1 - \frac{5}{16}$ hoc eſt quam 16 ad 11, quæ major quam 15 ad 11 [9]).

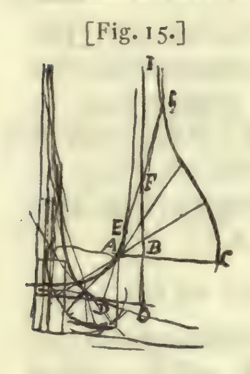
---

7) Dans ce qui suit Huygens cherche pour l'aire AOMBA une limite supérieure plus rapprochée que celle qu'il avait trouvée à l'aide de la Fig. 10. À cet effet il se sert de la tangente menée du point A à la courbe AOMB.

8) On trouve, en effet, que la tangente en O passe par le point A.

9) On retrouve ce calcul dans la lettre à de Sluse du 12 mars 1658 (p. 149—150 du T. II) où Huygens ajoute: „Atqui circulus ad circumscriptum quadratum majorem habet quam 11 ad 15, ac ferè eam quam 11 ad 14".

[Fig. 15.]

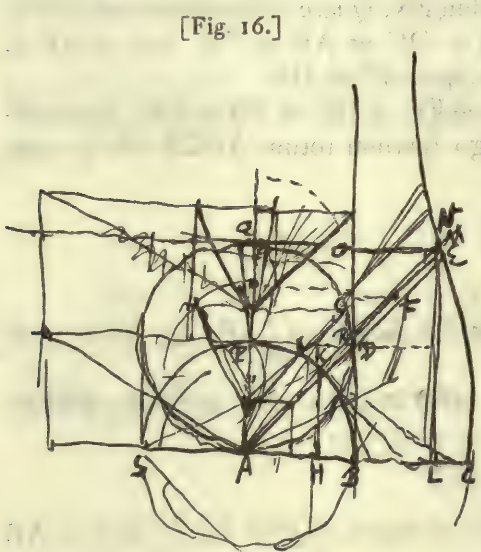


§6 [1]).

Omnis conchoidis ſpatium infinitæ eſt magnitudinis. Oſtenditur per aſymptotos hyperbolæ [2]).

Sphæræ et ſpiræ [3]).

[Fig. 16.]



▱DE [4]) [ad] △AK ut 2DB [ad] KH [5]) h. e. ut 2BA [ad] HA vel EO. h. e. ut BA ad FG [6]).

▱DE in FG ∞ △AK in AB.

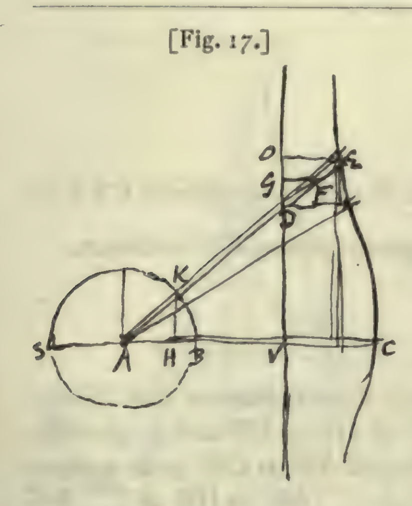
omnia ▱[a] DE in FG hoc eſt ſolida ex converſione ▱[orum] DE ∞ ſolido quod fit circa axem AB à quadrante ABP ſuſpenſo ſecundum centrum gravitatis ſuæ in P [7]). Unde duplo utriuſque sumto, fit ſolidum à tota conchoide præter ſphæram in ipſo contentam quæ fit à △[is]RMN æquale ſemiſpiræ, quæ fit converſione ſemicirculi ADQ circa axem AB. Ergo totum omnino ſolidum conchoidis infinitum æquale ſphæræ BS et dimidiæ ſpiræ à ſemicirculo BPS [8]).

---

[1]) Ce paragraphe, emprunté à une feuille détachée et à la p. 39 du Manuscrit A, traite de la quadrature de la conchoïde et de la cubature du solide de révolution autour de son asymptote.

[2]) Voir la figure à côté où nous avons ajouté quelques lettres, celle de Huygens n'en ayant point. Soit donc A le pôle de la conchoïde, AC son axe, I le point à l'infini de l'asymptote BF; évidemment on peut placer la seconde asymptote OD de l'hyperbole en sorte que AD = EF < FG = BC. Mais alors, si l'on fait tourner le rayon vecteur AG autour du pôle, tous les éléments qui constituent l'aire hyperbolique EIF sont plus petits que les éléments

[Fig. 17.]



▱DE [9]) [ad] △AK ut 2VA ad AH vel ad EO.

▱DE in FG ∞ △AK in AV. Hinc ſolidum totum conchoidis æquale ſphæræ BS + ſemiſpiræ à ſemicirculo BKS, circa axem VD [10]).

---

correspondants de l'aire FIG. Or, Huygens savait que l'aire de la figure comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes est de grandeur infinie; il en est donc de même de l'aire FIG. Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 5 avril 1658, p. 164 du T. II, et à Wallis le 6 septembre 1658 (p. 212 du T. II.) Comparez la dernière partie de ce paragraphe (p. 308—309), où l'on trouvera une démonstration encore plus élégante du même théorème.

3) Dans la Correspondance de Huygens et de Sluse le mot „spira" signifie une surface ou un solide de révolution quelconque.

4) Il s'agit ici de trouver le volume du solide engendré par la révolution de la conchoïde NMEC autour de l'asymptote OB dans le cas où AB = BC = DE.

5) La base RM du parallélogramme RMED et celle AK = AB = BC = DE du triangle peuvent être considérées comme égales; par suite, leurs aires sont dans le rapport du double de la hauteur du parallélogramme à celle du triangle; rapport qu'on peut remplacer par celui de 2AD à AK, ou de 2BD à KH.

6) F est le centre de gravité du parallélogramme RMED, qu'on peut considérer dans cette recherche comme situé sur la droite ADE.

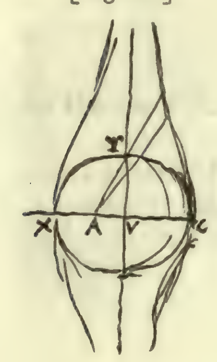
7) Huygens veut dire que le volume total engendré par la révolution des parallélogrammes en question autour de l'asymptote OB est égal au volume d'un solide engendré par la révolution autour de l'axe AB d'une figure plane dont l'aire est égale à celle du quart de cercle BAPB et dont le centre de gravité se trouve à la distance AP = AB de cet axe.

8) C'est-à-dire autour de l'asymptote OB; posant AB = BC = a, on trouve donc pour le volume du solide $\frac{4}{3}a^3\pi + a^3\pi^2$.

9) Huygens applique la même méthode au cas où la distance AV du pôle de la conchoïde à son asymptote n'est pas égale à la longueur constante VC = DE.

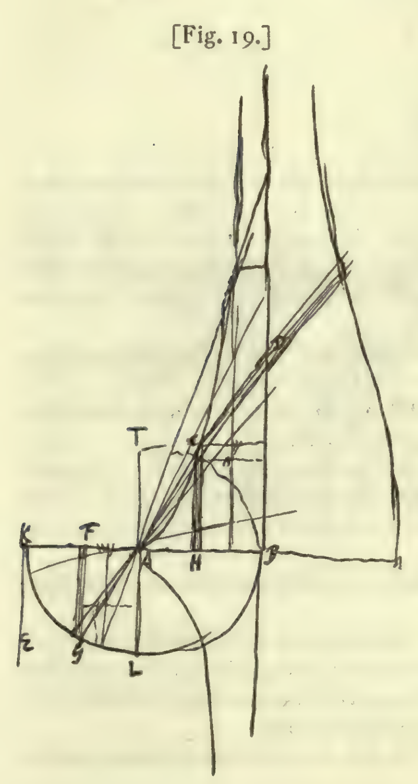
10) Posant AV = a, VC = l, on trouve donc $\frac{4}{3}l^3\pi + al^2\pi^2$. Ajoutons que Huygens fait allusion à ce résultat lorsqu'il écrit à de Sluse dans sa lettre du 5 avril 1658 que les solides de révolution de la conchoïde et de l'hyperbole autour de leurs asymptotes n'excèdent pas une certaine grandeur (voir la p. 164 du T. II).

[Fig. 18.]



Si A polus conchoidis et CV ad VA ut $\frac{3}{4}$ circumfer.æ CYX ad CV [1]) fiet ſolidum conchoidis duplum ſphæræ CX inſcriptæ.

[Fig. 19.]



AC eſt altera Conchoides in qua ſemper CD ∞ AB. CH ad HA ut GF ad FA, ſeu HB. nam FA ∞ HB quia AG ∞ CD. unde quoque HA ∞ FK. Ergo □ CH in HB ∞ □ FG in FK, fiunt enim ejuſdem latitudinis hæc rectangula [2]). Ergo ſolidum infinitum conchoidis circa BD æquale ſolido quod fit a quadrante ALK circa axem KE. ſive BAL circa BD.

Vel ſi Conchois ad alteram partem quoque deſcribatur, erit totum ſolidum æquale ei quod fit a ſemicirculo LBT circa axem BD [3]). Hoc autem ſphæræ integræ additum æquatur annulo dimidio, qui fit a ſemicirculo BLK circa axem BD.

AC [Fig. 20] [4]) conchoides. D polus. EF regula.

B punctum in Conchoide. BDH linea. DH ∞ ∞ EA. HK parall. DA.

BG eſt curva ejuſmodi ut ſemper MG ∞ ∞ DN.

Eam dico eſſe hyperbolam per punctum B

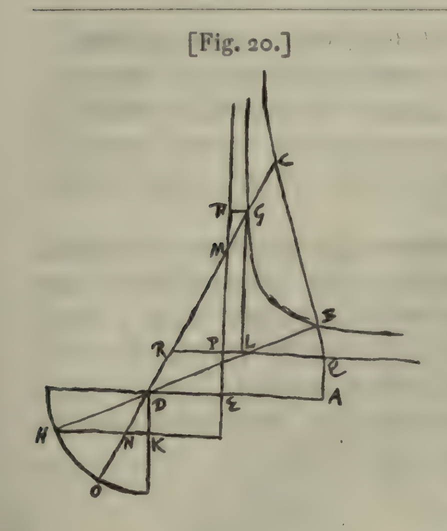
---

[1]) On a donc, $l : a = \frac{3}{4} l\pi : l$; c'est-à-dire $a = \frac{4}{3\pi} l$.

[2]) Parce que, en effet, lorsque les points F et H se déplacent, on a à chaque instant KF = AH.

[3]) Puisque la distance du centre de gravité du demi-cercle LBT à l'axe BD est égale à $\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) l$ (où l = AB), on a donc pour le volume en question $\left(\pi - \frac{4}{3}\right) \pi l^3$.

[Fig. 20.]



defcriptam ad afymptotos PF, PQ. fumptâ videlicet EP ∞ DK, et ductâ PQ parall. DA.

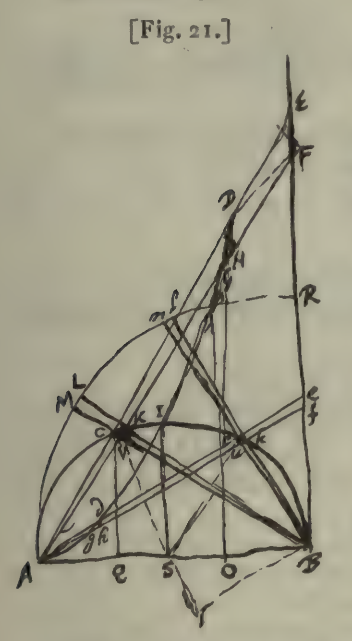
Hanc hyperbolam apparet à B verfus G totam cadere intra conchoidem. Sed Hyperbolam inter et afymptoton infinitæ magnitudinis fpatium interjicitur. Ergo et Conchoidis fpatium infinitum erit.

Quod BG fit hyperb. hinc conftat. Quia MG ∞ DN vel DR, erit RG ∞ MD; et GL ∞ ME. Item MF ∞ DK. Sed ut MF (h.e.DK) ad FG, ita GL (five ME) ad ED. Ergo ▭ DK, DE ∞ ▭ FG, GL. idque femper. ergo BG eft hijperb.

§ 7 [5]).

18 Mart. 1658.

[Fig. 21.]



AIGD eft Ciffoides. Ergo AC ∞ DE; AK ∞ GF; Ac ∞ de. &c.

trapezij DEFH eadem eft altitudo ac △li CVA [6]) unde illud trap. ad hoc △.m ut EF + DH ad CV. hoc eft ut EB + DO ad CQ, hoc eft ut BA + AO ad AQ; five ut AB + BQ ad QA. hoc eft ut qu.AB + + qu.BC ad qu.CA. hoc eft ut △BML + △BCK

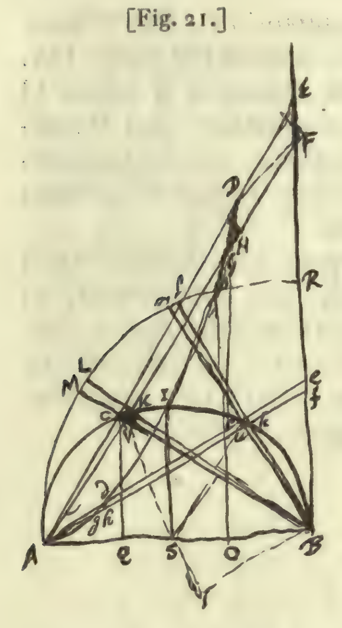
---

[4]) Ce nouvel arrangement de la démonstration indiquée par la Fig. 15 (p. 306) doit dater de l'un des derniers mois de l'année 1658, comme cela résulte de la place qu'il occupe (p. 39 du Manuscrit A). Il nous semble probable qu'il fut rédigé à l'occasion de la correspondance de Huygens avec Wallis. Ce qu'on lit dans la lettre à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 du T. II): „non videris animadvertisse spatium infinitum conchoidis etiam magnitudine infinitum esse quod ego aliquando me demonstrasse memini", doit se rapporter à la remarque qui accompagne la Fig. 15; mais Huygens aura alors senti le besoin de vérifier la justesse de cette remarque et d'en rédiger une démonstration formelle.

[5]) Ce paragraphe, emprunté à quelques feuilles détachées, traite de la quadrature de la cissoïde.

[6]) Le point V est situé sur la droite CQ, par suite la hauteur du triangle ACV est AQ, qui est égale à OB, hauteur du trapèze, puisque AC = DE.

[Fig. 21.]



ad △ACK, ſive CVA. Ergo hinc ſequitur △BML + + △BCK æquari trapez.° DEFH. Et hoc ſemper: unde colligo ſpatium infinitum à curva AIH et rectis AB, BE comprehenſum æquari quadranti BAMR + ſemicirculo AIB hoc eſt triplo ſemicirculo AIB.

Item partem quamlibet abſciſſam recta ex A educta, velut AIDEBA æqualem eſſe ſectori BMR + ſegmento BkC. hoc eſt triplo ſegmento CkB + duplo △°CBS [1]) hoc eſt △° cujus baſis ∞ 3 arcus CB—CQ, altitudo radius SB. arcus autem BkC ſemper duplus eſt MR [2]). unde data arcus BkC longitudine, dabitur quadratura dictæ partis AIDEBA.

Dato quadrato vel circulo æquali ſpatio ABCX [Fig. 22] dabitur quadratura circuli.

Poteſt circulus inveniri qui unà cum ſpatio ABCX æquatur quadrato dato.

[Fig. 22.]

ABCED ∞ ſemicirc. APCMD + + *n* [3])

commune auferatur ABCMD

CMDE ∞ ABCP + AFCP (*n*)

CMDE + *n* hoc eſt qu.AC ∞ ∞ ABCP + 2*n*

auferatur utrinque 2*n*

APCB ∞ 2APCX. add. utrique APCX

ABCX ∞ 3APCX

ſemicirc. ACD + ſpatio ABCPA æquatur ▭ AXLD [4]) circumſcripto. ſive quadrato circulo AD inſcripto.

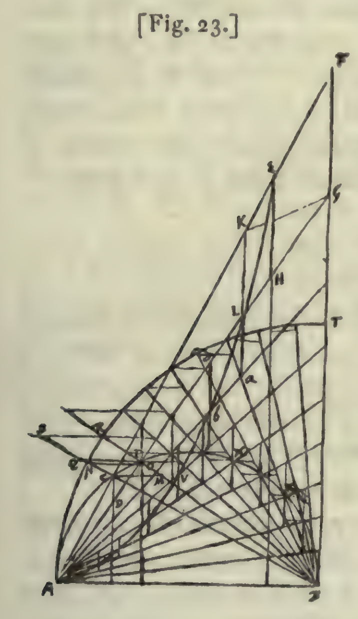
---

[1]) Écrivons *m* pour l'aire du triangle CSB = CSA et *n* pour celle du segment CkB, alors le secteur MBR dont l'aire est le double de celle du secteur CSBkC sera representé par 2*m* + 2*n* et l'espace AIDEBA par 2*m* + 3*n*.

Spatium infinitum ABCRRQD eſt triplum ſemicirculi ACD.

Semper ſpatium ABCHD eſt triplum ſegmenti DZM. nam △DHO ∞ ∞ DZA ∞ 2DZS [5]).

[Fig. 23.]



Oſtendendum [6]) eſt ſpatium AVLEFBA [Fig. 23] æquari ſectori BNT + ſegmento CXB.

Primo ſpatium minus dicatur, ſitque exceſſ. Ω. Erit figura inſcripta EHLab&c. multo minor. trapezium EFGH æquale oſtenditur △lis BCM + BNO [7]). Ejuſmodi igitur figura inſcribatur, ut fiant omnia ſimul fruſta qualia CPM et NRO minora exceſſu Ω quo ſpatium AVLEFBA ſuperari dicitur à ſectore BNT + ſegmento CXB (hoc fieri poſſe oſtendatur).

Sed hæc fruſta omnia trapezijs addita, æquantur ſectori BNT + ſegm. CXB. Ergo trapezia una cum priori exceſſu Ω majora erunt ſectore BNT + ſegm. CXB. Unde trapezia majora ipſo ſpatio cui inſcripta ſunt quod abſurdum.

Si ſpatium majus eſſe dicatur, erit figura circumſcripta FKLdb&c. multo major. Jam trapezium KG æquale oſtenditur △lis BPQ + BRS.

---

[2]) C'est-à-dire en degrés, leurs longitudes étant égales.

[3]) Puisqu'on a ici, les segments APC et CMD étant égaux, APCMD $= 2m + 2n$.

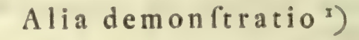
[4]) Puisque APCBA = 2APCXA. On a donc ▭AXLD = semicirc. APCMD + $\frac{2}{3}$ABCXA, d'où il s'ensuit que si l'on saurait carrer l'espace ABCX, ou bien construire un cercle égal à cet espace, on aurait trouvé la quadrature du cercle.

[5]) On a trouvé ABCHODA $= 2m + 3n$; mais DHO = AZD $= 2m$; par suite, ABCHD $= 3n =$ 3 segm. DZM.

[6]) Dans ce qui suit Huygens prépare une démonstration plus archimédienne du résultat qu'il vient d'obtenir. Ajoutons qu'on trouve encore sur une des feuilles dont nous empruntons le présent paragraphe une autre rédaction plus détaillée d'une démonstration de ce genre, qui est également restée inachevée. Nous croyons pouvoir la supprimer, d'autant plus que l'on rencontre encore deux autres rédactions complètes d'une telle démonstration, envoyées respectivement à Wallis et à de Sluse, aux pp. 170—173 et 178—180 du T. II. Il est vrai que dans la rédaction que nous supprimons la figure est composée d'une autre manière que nos Fig. 21 et 22; mais on retrouve cette composition dans la lettre envoyée à de Sluse, p. 178 du T. II.

[7]) Comparez le deuxième alinéa du § 7, p. 309.

[Fig. 24.]



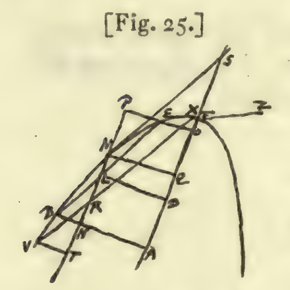
Alia demonſtratio [1])

triangulum KHG ∞ ABC. ▭ KF ad △ABC ut 2KL ad BC, hoc eſt ut 2KA ad AB, hoc eſt ut 2BH ad BA, hoc eſt ut 2EM ad MA. hoc eſt ut 2 qu.EB ad [qu.]BA, hoc eſt ut 2△BED ad △BAC [2]). ergo ▭ KF ∞ 2△BED. Ergo trapezium KHFL ∞ △ABC + 2△BED. Unde facile colligitur ſpatium AOKHE ∞ parti ſemicirculi ABSE + + 2 ſegm.° BES, hoc eſt 3 ſegmento BES + △^{lo} ABE [3]).

§ 8 [4]).

Sit parabola cujus diameter FA, et linea MS ſectionem contingat, per M vero ipſi FA æquediſtans ducatur MN, et ipſi MS in ſectione ducantur æquidiſtantes quælibet BLE, VRX. dico ipſas à recta MN bifariam ſecari; et quadrata ipſarum VR, BL eſſe inter ſe ſicut RM ad LM longitudine. ducantur enim ordinatim BA, MQ, LD, EO et conveniat EO cum LM in P. et ſit parabolæ rectum latus FZ.

[Fig. 25.]



Quia igitur ▭ ſub FQ et lat. recto æquale eſt qu.° MQ, erit lat. r. ad MQ ut MQ ad QF, et ſumptis conſequentium duplis, lat.r. ad 2MQ ſeu 2AN ut MQ ad QS; (eſt enim QS dupla ipſius QF, quia MS parab. contingit) hoc eſt ut BN ad NL. Quare ▭ ſub lat.r. et NL ∞ 2▭° ANB. ▭^{m} autem ſub lat.r. et NL ſive AD et ▭^{m} ſub lat.r. et DF, utrumque ſimul æquatur qu.AB. Ergo et 2▭ ANB + ▭ [lat.]r., DF æquabitur qu.° AB; Et

[1]) Cette démonstration, non moins élégante que celle qu'on trouve au commencement de ce § 7, n'a pas été utilisée par Huygens dans sa correspondance.

[2]) À cause de la similitude de ces deux triangles.

[3]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 310.

[4]) La Pièce qui suit doit dater d'avril ou de mai 1658, d'après la place qu'elle occupe à la p. 19 du Manuscrit A On en trouve une rédaction moins achevée à la p. 16 du même Manuscrit, laquelle est accompagnée de l'annotation: „*Volebat D. de Wit ut ostenderem de diametris parabolæ*". Or, dans les premières pages de ses „Elementa curvarum linearum", ouvrage cité dans la note 1, p. 371 de notre T. II, dont il envoya le manuscrit quelques mois plus tard à van Schooten, Johan de Witt déduit les propriétés de la parabole, dont il va être question, en partant de la méthode de génération de cette courbe, qu'il expose dans le premier chapitre de cet ouvrage. Ajoutons qu'on trouve les démonstrations d'Apollonius de ces mêmes propriétés aux Theorèmes 46 et 49 du Livre I de ses „Coniques", p. 33 verso et 35 recto de l'édition de 1566 par Commandin citée dans la note 4 de la p. 6 de notre T. I.

ablato utrinque 2□ANB, erit □ [lat.]r,DF æquale qu.° AN + qu.° NB. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, l. r. ad 2MQ hoc eſt 2PO ut MQ ad QS, hoc eſt ut EP ad PL ſive OD; erit □ ſub l. r. et OD æquale 2□OPE. Sed □[l.] r., OD + □° [l.]r., OF æquatur □ [l.]r., DF; ergo etiam 2□OPE + □ [l.]r., OF ſive qu.°OE æquabitur □ [l.]r., DF. Sed 2□OPE + qu.OE æquatur etiam — per 7.1. Elem. [5]) — duobus qu.^{is}EP, et OP. Ergo patet □ [l.]r., DF æquari qu.^{is} EP et OP. atqui □° eidem [l.]r., DF etiam æqualia oſtenſa ſunt qu.^{a} BN et NA. Ergo duo qu.^{a} EP et OP æqualia duobus BN et NA. ſed qu.^{m} NA æquale qu.° OP. Ergo reliquum etiam qu.BN æquale qu.° EP. ac proinde BN ipſi EP etiam longitudine æqualis erit, Et, quoniam ſimilia ſunt △^{a} BLN, ELP, et latera æqualibus angulis oppoſita BN, EP habent æqualia etiam reliqua latera æqualibus oppoſita angulis æqualia habebunt, nimirum BL ipſi LE. Eadem ratione oſtend. etiam VR ipſi RX æqualis. Jam porro ducatur VT ipſi AB æquidiſtans. Quia ergo oſtenſum fuit □ [l.]r., DF æquale qu.^{is} AN et NB, ſed idem □ [l.]r., DF etiam æquale □^{is} [l.]r., QF et [l.]r., QD quorum □ [l.]r., QF qu.°QM hic qu.AN æquale eſt, patet etiam reliquum □ [l.]r., QD ſeu [l.]r., LM æquari reliquo qu.°NB. Similiter oſtenditur qu.VT æquale □ [l.]r., RM. Erit itaque qu.VT ad qu.BN ut □ [l.]r., RM ad □ [l.]r., LM, hoc eſt ut RM ad LM. Sed ut qu.VT ad qu.BN ita qu.VR ad qu.BL. Ergo &c.

---

[5]) Lisez „7.2. Elem.", puisqu'il s'agit de la Prop. 7 du Livre 2 des „Elementa" d'Euclide. Voici cette proposition: „Si recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato." (Clavius, p. 181).

X[1]).

1658.

[*Réduction de la quadrature de la ſurface du conoïde elliptique allongé à la quadrature du cercle, et réduction de celle des ſurfaces du conoïde elliptique aplati et du conoïde hyperbolique à la quadrature de l'hyperbole.*]

[Première Partie[2]).]

§ 1[3]).

[Fig. 1.]

BA eſt parab. lat. rect. a.

Superficies ex tangentibus HG, GV &c. ad circulum ex CA ſemidiam. ſunt ut omnia □ ſub AC, HG; SQ, GV; &c. ad □ACO, ſive $\frac{1}{2}$qu.AC.

CE eſt ∞ AD quæ occurrit in A ad angulos rectos. Et ut AD ſive EC ad AC ita HG ad LK ſive NR. Ergo □ EC, NR ∞ □ AC, HG. Ergo ut omnia □ CE, NR. MQ, WL, &c. hoc eſt ut parabolæ fruſtum EXBC (ſunt enim puncta E, M, &c. ad parabolam cujus lat. rect. item a. ſed vertex in F, ſumpta BF ∞ $\frac{1}{4}a$[4])) ad □ ACO, ita ſuperficies conoidis BAC ad circulum baſeos CA. Ergo ut $(4b + a)\sqrt{4ab + aa} - aa$ ad $6ab$[5]).

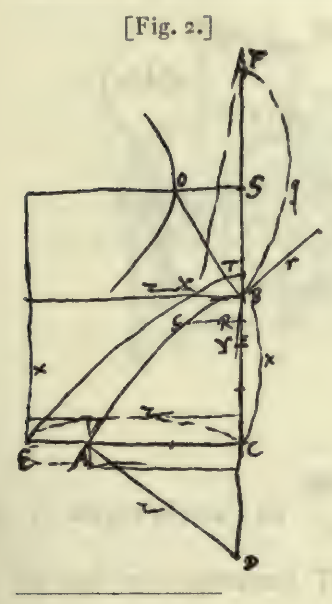
---

[1]) La Pièce, que nous avons divisée en quatre Parties et en paragraphes, a été empruntée aux p. 103—113 du Manuscrit A et à quelques feuilles détachées.

[2]) On trouve cette Première Partie presqu'en entier (voir les notes 4 de la p. 320 et 8 de la p. 323) sur une feuille détachée de quatre pages dont la troisième contient la date du 3 février 1658. Il nous semble probable que toutes les découvertes exposées sur ces pages furent faites pendant cette journée.

[3]) Ce paragraphe contient l'exposition d'une nouvelle méthode pour la quadrature des surfaces

[Fig. 2.]



§ 2 [6]).

In Hyperbola.

Superficies conoidis hyperbolici BA ad circulum basis suæ, ut spatium EXBC ad $\frac{1}{2}$qu.AC [7]).

[latus rectum ∞ r; latus transversum BF ∞ q; BS ∞ ∞ $\frac{1}{2}$ BF; BC ∞ x; AD ∞ EC ∞ z.]

$$CD \infty \frac{1}{2}r + \frac{rx}{q} \text{ [8])}$$

de révolution et son application au conoïde parabolique dont la surface courbe avait été déterminée auparavant par Huygens; voir la Pièce N°. VI, p. 234—270 du présent Tome.

[4]) Les calculs qui ont mené à cette conclusion nous sont inconnus; voir pour une démonstration en règle le „Theorema I" de la Quatrième Partie, p. 338—339.

[5]) C'est, dans les mêmes notations, la formule communiquée, en janvier 1658, par van Heuraet à Huygens par l'intermédiaire de van Schooten; voir la p. 131 du T. II. Comme nous l'avons vu dans la note 6 de la p. 265, elle ne peut être déduite du résultat obtenu par Huygens en 1657 qu'à l'aide de quelques réductions relativement compliquées. Sans doute Huygens doit avoir été frappé par cette circonstance, et il en aura conclu que van Heuraet devait posséder une méthode différente de la sienne. Par conséquent il se sera mis à rechercher cette méthode.

Quant au résultat obtenu cette fois, il est évident qu'il conduit facilement à la formule de van Heuraet. Posant BC $= b$, on a CE $= \sqrt{a(b+\frac{1}{4}a)}$. Par suite, on trouve pour l'aire parabolique FEC: $\frac{2}{3}(b+\frac{1}{4}a)\sqrt{a(b+\frac{1}{4}a)}$, laquelle, diminuée de l'aire BXF $= \frac{1}{12}a^2$, donne pour le rapport indiqué:

$$\left\{\frac{2}{3}(b+\frac{1}{4}a)\sqrt{a(b+\frac{1}{4}a)}-\frac{1}{12}a^2\right\}:\frac{1}{2}ab.$$

[6]) Application de la nouvelle méthode à la quadrature du conoïde hyperbolique.

[7]) Ce résultat est une conséquence immédiate de la méthode indiquée au § 1. Il ne s'agit donc plus que de déterminer la nature de la courbe XE.

[8]) Consultez la p. 217 de l'édition de 1649 (ou la p. 245 des éditions de 1659 et de 1683) de la „Geometria" de Descartes, publiée par van Schooten (voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 218 de notre T. I). Van Schooten y déduit dans ses „Commentarii" l'expression $x+\frac{rx}{q}+\frac{1}{2}r$ pour la longueur de la ligne BD. Ajoutons que Descartes avait donné dans le texte de sa „Géométrie" la formule correspondante pour le cas de l'ellipse; comparez la note 8 de la p. 317.

$$q\,[\text{ad}]\; r\;[\text{ut}]\;\square FCB(qx+xx)\;[\text{ad}]\;\frac{rqx+rxx}{q}\;\text{qu.CA}\;\Big\}\;\text{a[dde]}$$

$$\frac{1}{4}rr+\frac{rrx}{q}+\frac{rrxx}{qq}\;\text{qu.CD}$$

Fig. 2.]

$$\frac{1}{4}rr+\frac{rrx}{q}+rx+\frac{rrxx}{qq}+\frac{rxx}{q}\;\infty\;zz\;{}^{1})$$

z major quam $\frac{1}{2}r$

$$xx\;\infty\;\frac{qqzz-\frac{1}{4}qqrr}{qr+rr}-qx$$

$$x\;\infty\;-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3r+qqzz}{qr+rr}}\;\text{ex Carteſij regula}\;{}^{2})$$

T vertex hyperb. TE. ST ſumenda ∞ m hoc eſt $\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q+r}}$. Ergo ſit BY $\infty\,\frac{1}{2}r$, et SR media prop. inter SY, SB. Et ut RS ad BS ita ſit BS ad TS [3]).

p [ad] m [4]) [hoc eſt] qq [ad] $qr+rr$ [ut] $2m$ [h. e.] $\left(\sqrt{\frac{q^3}{q+r}}\right)$ [ad] $\sqrt{rr+\frac{r^3}{q}}$ latus rect. hyperb. TE. Ergo media prop. inter hoc et l. tranſv. erit $2SO\;\infty\;\sqrt{rq}\;\infty$ diam. conjugatæ hyperb. TE. Ergo cum hyperbolæ TE, BA habeant eandem diam. conjug.^m habebunt latera recta reciproce rationem laterum tranſverſorum [5]).

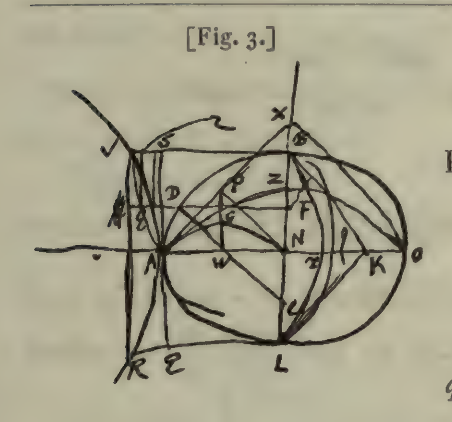
$\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}qr}\;\infty$ SR [6]); R eſt focus hyperb. BA, OB ∞ SR. RG $\infty\,\frac{1}{2}r$.

[1]) La courbe XE est donc une hyperbole, dont Huygens va chercher les dimensions et la situation par rapport à l'hyperbole BA.

[2]) Voir les règles pour la résolution des équations quadratiques, formulées par Descartes dans sa „Géométrie", p. 375 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes.

[3]) Construction pour trouver le sommet de l'hyperbole TE. On a, en effet, $SY=\frac{1}{2}(q+r)$; $SB=\frac{1}{2}q$; donc $RS=\sqrt{\frac{1}{4}q(q+r)}$, et par suite : $\sqrt{\frac{1}{4}q(q+r)}:\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}q:TS$ $\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q+r}}\right)$.

[Fig. 3.]



§ 3 [7]).

[latus rect. ∞ r; latus transv. BL ∞ q; BF ∞ x; DC ∞ EF ∞ z.]

$$\frac{1}{2}r - \frac{rx}{q}\ \mathrm{FC}\ ^{8})$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{qu.FC}\ \frac{1}{4}rr - \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq} \\ q\,[\text{ad}]\,r\ [\text{ut}]\ qx - xx\ [\text{ad}]\ \text{qu.FD}\ rx - \frac{rxx}{q}\end{array}\right\} \infty\ zz$$

$$xx \infty \frac{qqzz - \frac{1}{4}qqrr + qrrx - qqrx\ ^{9})}{rr - qr}$$

---

[4]) La signification de la lettre p nous est restée énigmatique jusqu'à l'instant où nous avons retrouvé cette notation dans la „Géométrie" de Descartes (voir les p. 399—405 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery). Au lieu cité l'équation générale du second degré est réduite dans le cas de l'hyperbole à la forme $y = \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$, où les x sont mesurées sur l'axe imaginaire lorsqu'on a $4mp > oo$. Si l'on compare cette équation à celle de la forme $CA = y = \sqrt{rx + \frac{r}{q}xx}$, où r représente le „latus rectum" et q le „latus transversum" et où les x sont mesurées sur l'axe réel, on trouve facilement $\frac{p}{m} = \frac{q}{r} = \frac{\text{latus transversum}}{\text{latus rectum}}$. En appliquant ces considérations à l'hyperbole TXE dont le „latus transversum" est égal à $2ST = 2m$ (où m a une signification entièrement différente de celle qu'elle a dans la fraction $\frac{p}{m}$), on aura donc, comme dans le texte:

$$\frac{p}{m} = \frac{qq}{qr + rr} = \frac{2m}{\text{latus rectum}} = \frac{\sqrt{\frac{q^3}{q+r}}}{\sqrt{rr + \frac{r^3}{q}}}.$$

[5]) On retrouve ces résultats, avec une modification légère quant à la détermination du sommet T, dans l'„Horologium oscillatorium, Pars Tertia" après la Prop. IX (p. 75 de l'édition originale) sous l'en-tête: „Conoidis hyperbolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire".

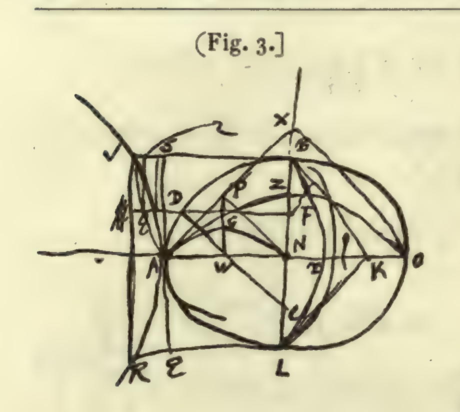
[6]) Comparez la note 3.

[7]) Application de la nouvelle méthode à la quadrature du sphéroïde aplati.

[8]) Comparez la note 8 de la p. 315. Le cas de l'ellipse est traité à la p. 52 de l'édition de 1649 de la „Geometria" (p. 46 de celles de 1659 et 1683). Dans l'édition des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery on le trouve à la p. 419 du T. VI.

[9]) Équation de l'hyperbole VEAR.

(Fig. 3.)



$$xx \infty \frac{qqzz - \frac{1}{4}qqrr}{rr - qr} + qx$$

$$x \infty \frac{1}{2}q \,\text{♎}\,[1] \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}q^3r + qqzz}{rr - qr}}$$

m [ad] p [2]) [hoc eſt] $rr - qr$ [ad] qq [ut]

lat. tranſv. $\sqrt{qr}$ [ad] $\frac{qq\sqrt{qr}}{rr - qr}$ lat. rectum hyperb.

Ergo diam. conjugata $\sqrt{\frac{q^3}{r - q}}$ [3]).

AE eſt hyperb. centrum ejus N. vertex A.

Superficies ſphæroidis dimidij ABO eſt ad circ. AO ut ſpatium RAVBL ad qu. AN [4]).

Sit AP + PN ∞ BV $\infty \frac{1}{2}$ lat. rect. [5]) AGN parab. ut GW ſit $\infty \frac{1}{2}$PW [6]).

Erit ut linea parabolica AGN ad $\frac{1}{4}$ lateris recti ellipſis ita ſuperficies ſpheroi-

---

[1]) Par ce signe Huygens indique qu'on doit employer, selon les circonstances, le signe + ou le signe —.

[2]) Comparez la note 4 de la p. 317. L'emploi de la lettre p s'explique ici d'une manière analogue.

[3]) Puisque, d'après une règle alors bien connue, ce diamètre est moyen proportionnel entre les deux „latera".

[4]) D'après la méthode générale exposée au § 1, p. 314. La quadrature de la surface sphéroïdale est donc déjà réduite à celle de l'hyperbole. Or, Huygens entrevoit le moyen de la réduire de même d'une manière simple et élégante à la rectification de la parabole.

[5]) On trouve, en effet, en posant $x = 0$ dans l'expression pour zz (p. 317), $BV = \frac{1}{2}r$, où r représente le „latus rectum" de l'ellipse ABOL par rapport à l'axe BL.

[6]) De cette manière la parabole AGN et l'hyperbole VEAR sont dans la relation indiquée dans l'énoncé du „Theorema VIII" de la p. 249 puisqu'on a $\frac{AP + PN}{AN} = \frac{BV}{AN}$. On peut donc appliquer ce théorème; mais aussi le „Theorema IX" (p. 253). Or, d'après ce dernier théorème, on a:

$$\text{par. AGN} : \text{AN} = \text{aire RAVBL} : \text{AN} \times \text{BL},$$

d'où il résulte, puisqu'on peut remplacer AN par une quantité quelconque pourvu qu'on le fasse à la fois dans le deuxième et dans le quatrième terme de la proportion :

$$\text{par. AGN} : \frac{1}{4}r = \text{aire RAVBL} : \frac{1}{4}qr = \text{aire RAVBL} : \text{AN}^2 = \text{surf. ABO} : \text{cercle AO}.$$

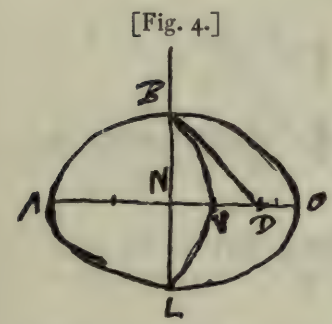
dis dimidij ABO ad circulum AO. Vel ſumpta parabola dupla, ut ſint AX, XO ſingulæ ∞ $\frac{1}{2}$ latus rectum, erit curva AZO ad $\frac{1}{4}$ lat. rect. ſicut tota ſpheroidis ſuperficies ad dictum circulum AO.

Applicato ſpatio RAVBL ad lineam BL ∞ q fit longitudo parabolæ AGN. applicato vero quadr.° AN ad lin. BL, fit $\frac{1}{4}r$ [7]).

NO ∞ BK $\left(\sqrt{\frac{1}{4}rq}\right)$ [ad] BN $\left(\frac{1}{2}q\right)$ [ut] XA $\left(\frac{1}{2}r\right)$ [ad] AN $\left(\sqrt{\frac{1}{4}rq}\right)$ hinc video mutari poſſe conſtructionem ut pro △°AXO ſumatur BKL. et pro $\frac{1}{4}$ lat. recti ſumatur $\frac{1}{4}$AO [8]).

CONSTRUCTIO.

[Fig. 4.]



Sphæroidis lati axis eſt BL, ſectio per axem ellipſis ABOL cujus diam. maxima AO. BD ∞ NO, ſive D eſt focus.

NV ∞ $\frac{1}{2}$ND. BVL eſt parab. axis VN. Sicut linea parabolica ad $\frac{1}{4}$AO ita ſuperf. ſphæroidis ad circulum OA.

Circulus cujus ſemidiam. eſt media proport. inter OA et curvam BVL, æqualis eſt ſuperficiei ſphæroidis [9]).

---

[7]) C'est-à-dire: $\frac{\text{aire RAVBL}}{\text{BL}} = \text{long. par. AGN}; \frac{\text{AN}^2}{\text{BL}} = \frac{1}{4}r.$

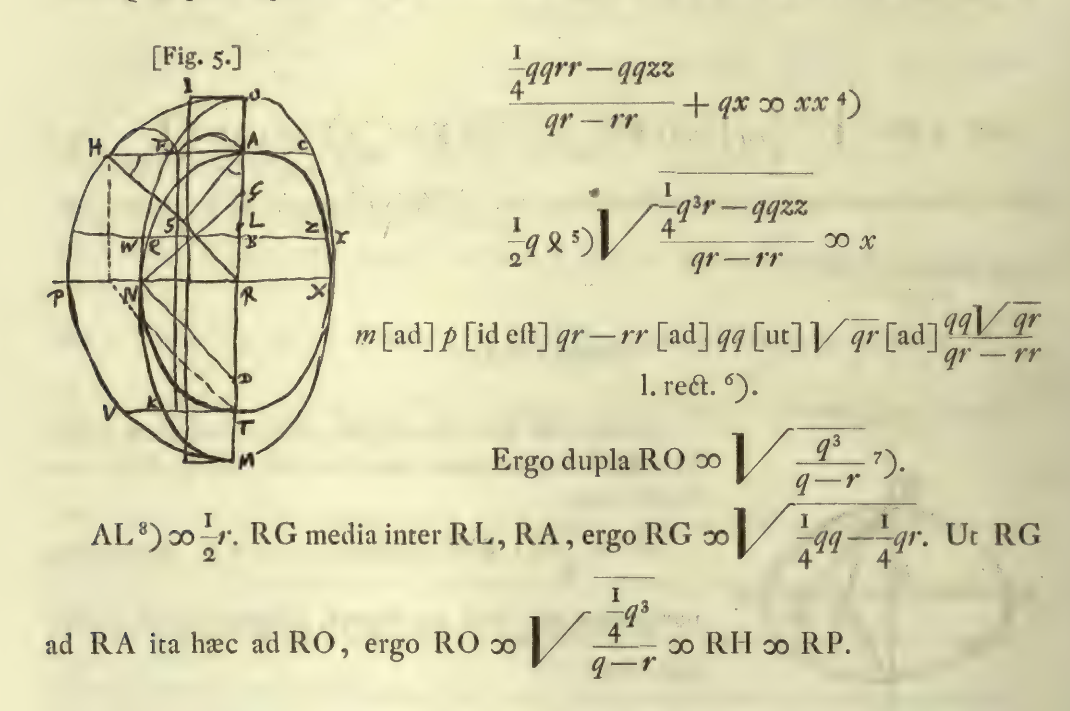
[8]) Voir la „Constructio" qui suit, où cette modification est apportée.

[9]) Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 26 février 1658 (voir la p. 141 du T. II); on le retrouve aussi à la p. 39 du Manuscrit N°. 13 (mentionné dans la note 5 de la p. 235) et de même dans l'„Horologium oscillatorium" (p. 75 de l'édition originale) après la „Prop. IX" de la „Pars tertia" sous l'en-tête: „Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire".

§ 4 [1]).

3 Febr. 1658.

AT ∞ q. lat. rect. Ellipsis A[N]T[X] ∞ r. [AB ∞ x; BW [2]) ∞ z]. Superficies QAZ partis sphæroidis, ad circulum QZ, ut spatium WFACY ad qu.QB [3]).



[Fig. 5.]

$$\frac{\frac{1}{4}qqrr - qqzz}{qr - rr} + qx \infty xx \;^{4})$$

$$\frac{1}{2}q \,\&\, ^{5}) \sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3r - qqzz}{qr - rr}} \infty x$$

m [ad] p [id est] $qr - rr$ [ad] qq [ut] $\sqrt{qr}$ [ad] $\frac{qq\sqrt{qr}}{qr - rr}$ l. rect. [6]).

Ergo dupla RO $\infty \sqrt{\frac{q^3}{q - r}}$ [7]).

AL [8]) $\infty \frac{1}{2}r$. RG media inter RL, RA, ergo RG $\infty \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qr}$. Ut RG ad RA ita hæc ad RO, ergo RO $\infty \sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q - r}} \infty$ RH ∞ RP.

---

[1]) Application de la nouvelle méthode à la quadrature du sphéroïde allongé.

[2]) BW représente la longueur de la normale au point Q, comptée de ce point jusqu'à l'intersection avec l'axe AT.

[3]) Consultez la méthode exposée au § 1, p. 314.

[4]) Cette équation et les trois lignes qui la suivent ont été copiées d'une autre feuille détachée; comparez la note 2 de la p. 314. La déduction de l'équation se trouve sur la même feuille, mais nous l'avons supprimée parce qu'elle est entièrement analogue à la déduction de l'équation correspondante du § 3, p. 318.

[5]) Voir la note 1 de la p. 318.

[6]) Cette proportion s'explique d'une manière analogue à celle que nous avons exposée dans la note 4 de la p. 317. Comparons, à cet effet, la forme générale $y = m - \frac{n}{z}x +$

$$\text{f.}\left|\begin{array}{l}\text{q.RH}\ \dfrac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}\\[2ex] \text{q.RA}\ \frac{1}{4}qq\end{array}\right.$$

$$\text{AH}\ \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}qqr}{q-r}}$$

quia qu. RH ad qu.AH ut q ad r, ideo RH ad HA ut q ad $\sqrt{rq}$, hoc est ut RA ad RN. Sit ND ∞ RT, et RH parall. DN. Est autem D focus [9]).

Superficies sphæroidis dimidij NAX ad circulum NX ut spatium AFNKT ad qu.NR [10]).

fiat ut AFNKT [ad] AHPVT, [id est] NR$\left(\sqrt{\frac{1}{4}qr}\right)$[ad]RP$\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}}\right)$[ita]

$+\sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx}$, de l'équation de l'ellipse, obtenue par Descartes (p. 399 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery), aux formes $y=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}q^3r-qqxx}{qr-rr}}$ et $y=$ $=\sqrt{r'x-\frac{r'}{q'}xx}$, dans lesquelles l'équation de l'ellipse NOKMN peut être écrite si l'on prend NX pour axe des x et R ou N pour origine, et si l'on représente par r' le „latus rectum" par rapport à l'axe NX et par q' la longueur de cet axe. On trouve alors:

$$\frac{m}{p}=\frac{qr-rr}{qq}=\frac{q'}{r'},$$

où $q'=$NX, le petit axe de l'ellipse NAXTN, est égal à $\sqrt{qr}$, d'après une formule bien connue.

7) D'après la même formule, mentionnée dans la note précédente, on a MO = 2RO = $\sqrt{q'r'}=$ $=\sqrt{\sqrt{qr}\times\frac{qq\sqrt{qr}}{qr-rr}}=\sqrt{\frac{q^3}{q-r}}$.

8) Dans les trois lignes qui suivent il s'agit de trouver une construction pour RO qui, avec NR, détermine l'ellipse NOXMN dont il s'agit de carrer la partie AFNKTA, afin d'en déduire la quadrature de la surface du sphéroïde en question.

9) Simplification de la construction de RO = RH. Il suffit donc de déterminer le foyer D de l'ellipse NAXTN et de tirer ensuite les droites RH et AH qui sont parallèles respectivement à DN et à RN.

10) Comparez le premier alinéa du présent paragraphe.

qu.NR $\left(\frac{1}{4}qr\right)$ [ad] aliud ſpatium $\sqrt{\frac{1}{4}qr}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}}$, h[oc] eſt $q\sqrt{\frac{\frac{1}{16}qqr}{q-r}}$ [1]).

hoc applica ad OM ∞ $\sqrt{\frac{q^3}{q-r}}$ fit $\frac{1}{4}\sqrt{rq}$ ∞ OI ∞ $\frac{1}{2}$RN.

[Fig. 5].

itaque jam ſuperfic. ſphæroidis dimidij NAX ad circulum NX ut ſpatium AHPVT ad ▭ IM. ſit AS perpend. in RH. Itaque ſpatium AHPVT æquatur ▭° ſub RP et HP [2]) + AS, quarum AS æqualis ſupra oſtenſa eſt ipſi RN [3]). Ergo dicta ſuperf. ad dictum circulum ut ▭ ſub PR et HP + NR ad ▭ IM, hoc eſt ▭ ſub RO, ſive RP, et RN. Unde abjecta communi altitudine PR, erit dicta ſuperficiei ad circulum ratio ea quæ HP + NR ad NR. Et duplicatis antecedentibus erit tota ſphæroidis ſuperf. ad circulum NX ut HPV + NX ad NR.

Ergo conſtructio eſt hæc [Fig. 6]. Sphæroidis oblongi axis eſt AT. ſectio per axem Ellipſis ANTX, minor axis NX. ND ∞ RT ſive D eſt focus Ellipſeos.

---

[1]) On a donc surf. NAX : cercle NX = esp. AHPVT : $q\sqrt{\frac{\frac{1}{16}qqr}{q-r}}$. Or, écrivant le dernier terme sous la forme $\sqrt{\frac{q^3}{q-r}} \times \frac{1}{4}\sqrt{rq}$, on aperçoit que ce terme peut être représenté par un rectangle dont les côtés sont égaux à MO et $\frac{1}{2}$NR, c'est-à-dire par le rectangle IM.

[2]) Il s'agit de l'arc HP.

[3]) On rencontre, en effet, dans un coin de la feuille dont nous empruntons cette partie du texte le petit calcul qui suit:

„q.^{m}RH $\left(\frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}\right)$ [ad] q. AH $\left(\frac{\frac{1}{4}qqr}{q-r}\right)$ [ut] q. RA $\left(\frac{1}{4}qq\right)$ [ad q. AS];

AS $\sqrt{\frac{1}{4}rq}$ ".

[4]) Cette TO remplace la ligne RH de la Fig. 5 à laquelle elle est égale; voir les lignes ponctuées de cette dernière figure.

[5]) C'est sous cette dernière forme que Huygens a donné sa quadrature de la surface du sphéroïde allongé à la p. 39 du Manuscrit N°. 13, sur lequel on peut consulter la note 5 de la p. 235, et de même dans l'„Horologium oscillatorium" sous l'en-tête „Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire" (p. 74 de l'édition originale).

[Fig 6.]

TO parallela DN [4]). TSA eſt arcus circuli deſcriptus centro O radio OT. Sicut TSA + NX ad RX, ita ſuperficies ſphæroidis NAXT ad circulum NX.

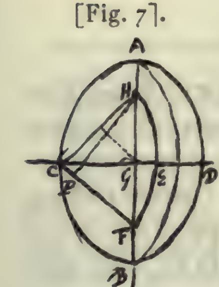
Vel, ſit D focus. ſuperque AT arcus AST ſemidiametro tertia proport.i duabus RD, RT.

Vel potius, ſit TO tertia prop. duabus RD, RT.

Circulus cujus ſemidiam. media eſt proport. inter RN et lineam æqualem AST + NX, æquatur ſuperf.ei ſpheroidis [5]).

Sphæroidis ſectio per axem eſt ellipſis [NAXT] [6]) ejuſmodi ut latus tranſv. [AT] ſit ſeſquitertium lateris recti. Dico ſuperficiem conoidis ad circulum per centrum cujus diam. [NX] eſſe ut triens peripheriæ circuli una cum ſua ſubtenſa ad ejuſdem ſubtenſæ ſemiſſem [7]).

[Fig. 7].



H [8]), F ſunt foci. ſive CH ∞ GA. FEH circumf. centro C. Semiſuperf. ſphæroidis ad maximum circulum CD ut ſector CFEH cum △CFH ad △CFH [9]). vel ut arcus HEF cum perpendiculari HP ad HP.

Ergo ſi axis ſphæroidis oblongi ad diametrum eam habeat rat.m quam radius circuli ad perpend. quæ ex centro in latus cadit alicujus polygoni ordinati circulo inſcripti, Erit dimidia ſphæroidis ſuperf. ad maximum in eo circulum ſicut circulus una cum illo polygono inſcripto ad ipſum polygonum.

---

[6]) Afin de ne pas multiplier inutilement le nombre des figures nous avons adapté les notations qui suivent à celles de la Fig. 6.

[7]) Dans ce cas, où $q = \frac{4}{3}r$, l'angle DNR égale $\frac{1}{6}\pi$. Or, si cet angle est représenté par α, on a dans le cas général (d'après le premier alinéa de cette page):

$$\text{surf. sphéroïde : cercle NX} = \left(\sqrt{\frac{q^3}{q-r}}\,\alpha + \sqrt{qr}\right) : \frac{1}{2}\sqrt{qr},$$

et cette proportion se réduit au cas particulier en question à celle-ci:

$$\text{surf. sphéroïde : cercle NX} = \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}\right) : \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

[8]) Les cinq alinéa's qui suivent ont été empruntés à une autre feuille détachée; comparez la note 2 de la p. 314.

[9]) Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans la lettre de Huygens du 26 février 1658 (p. 141 du T. II).

[Fig. 6.]

Si [AST] [1]) ſextans peripheriæ erit $\frac{1}{2}$ ſuperficies ſphæroidis ad circulum maximum [NX], ut circulus cum inſcripto ſibi hexagono ad ipſum hexagonum. atqui ita porro, ſi peripheria [AST] metiatur circumferentiam.

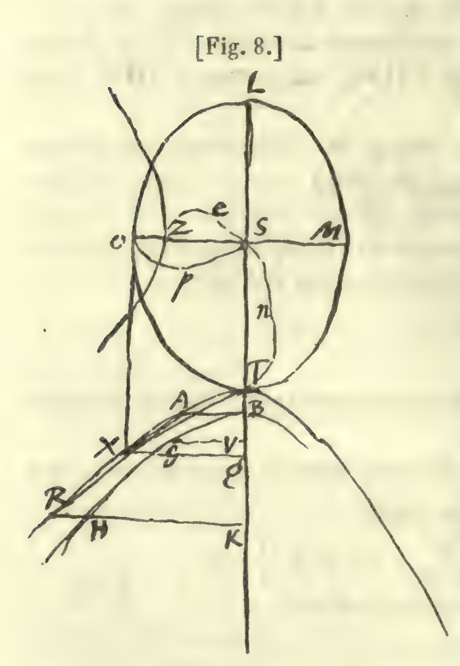
Ut autem fiat commenſurabilis debet [TA] ad [NX] eam habere rationem quam radius circuli ad perpendicularem quæ ex centro cadit in latus polygoni alicujus inſcripti. quia videlicet [AT] ad [NX] ut [TR] ſive [ND] ad [NR], hoc eſt [OT] ad [OR].

Sive [AST] peripheria non ſit commens. circumferentiæ; erit ſemiſuperficies ſphæroidis ad circulum [NX] ut ſector [OAST] cum △[OAT] ad △[OAT].

[Deuxième Partie] [2]).

§ 1.

[Fig. 8.]



Dato ſphæroide quovis lato ſeu compreſſo, poteſt inveniri conoides hyperbolicum, vel dato hyperbolico poteſt inveniri ſphæroides, et utriuſque ſimul ſuperficiei inveniri circulus æqualis [3]). Huc pertinent quæ hac et proxima pagina continentur [4]).

SO, ST, OX debent eſſe proportionales ſive OX ∞ $\frac{1}{2}$ l. rect. [5]) TX eſt hyperbola cujus centr. S vertex T [6]). Ergo data eſt. datumque ideo hyperbolæ lat. rectum et diam. conjugata [7]).

Invenienda autem eſt alia BG, quæ idem habeat centrum S et eandem diam.ᵐ conjuga-

[1]) Voir la note 6 de la p. 323.

[2]) Cette partie se rapporte à une nouvelle découverte, faite avant le 15 février 1658 (date de la

tam cum hyp. TX. utque, pofito V foco hyp. BG, fint proportionales ST, SB, SV.

His enim factis, ferviet hyperb. TX, tam fuperficiei fphæroidis dimid. LOT dimetiendæ quam fuperficiei conoidis hyperbolici BG [8]).

Oportet autem ad hoc, ducta BA tangente, ducere ex A rectam AR quæ abfcindat portionem AXR ∞ XAT. quod fieri poffe docetur pag. fequenti [9]).

Eo autem facto, erit fuperf. ex BGH hyperb. ad circulum TL ut fpat. RXABK ad $\frac{1}{2}$qu.ST [10]). Superf. autem dimidij fphæroidis TOL ad circulum TL ut fpatium TAXOS ad $\frac{1}{2}$qu.ST [11]). Ergò utraque fimul dictarum fuperfic.^{m} ad utrumque fimul fpatium RXABK, TAXOS, hoc eft ad duo trapezia RABK, XTSO, ut circulus TL ad $\frac{1}{2}$qu.ST. Et permutando. quare duarum fuperfic.^{m} ad circ. TL data erit ratio.

---

lettre à de Sluse citée dans la note qui suit). Elle est empruntée à une feuille détachée de quatre pages. Huygens y établit une relation entre les quadratures des surfaces du sphéroïde aplati et du conoïde hyperbolique. Consultez à ce propos les p. 192—195 de l'Avertissement.

³) Comparez la lettre à de Sluse du 15 février 1658 (p. 134 du T. II) où ce théorème est mentionné par Huygens. On le retrouve de même à la p. 76 de l'édition originale du „Horologium oscillatorium".

⁴) Nous avons reproduit ces considérations dans ce § 1 de la deuxième Partie.

⁵) D'après la règle mentionnée dans la note 3 de la p. 318; le „latus rectum" dont il est question est celui de l'ellipse TOLM par rapport à l'axe OM.

⁶) Remarquons que cette hyperbole est identique avec l'hyperbole VAR de la Fig. 3 de la p. 318 de la quadrature de laquelle Huygens fait dépendre celle de la surface du sphéroïde en question. En effet, en posant $x = 0$ dans l'équation de cette dernière hyperbole, on trouve $z = \frac{1}{2}r = VB$, d'où il suit que la ligne VB de la Fig. 3 est identique avec la ligne OX de la présente figure.

⁷) En représentant OM (identique avec BL de la Fig. 3 de la p. 318) par q et par r le „latus rectum" de l'ellipse OLMTO par rapport à l'axe OM, on trouve pour ces données, d'après les calculs de la p. 318, les expressions $\frac{qq\sqrt{qr}}{rr-qr}$ et $\sqrt{\frac{q^3}{r-q}}$.

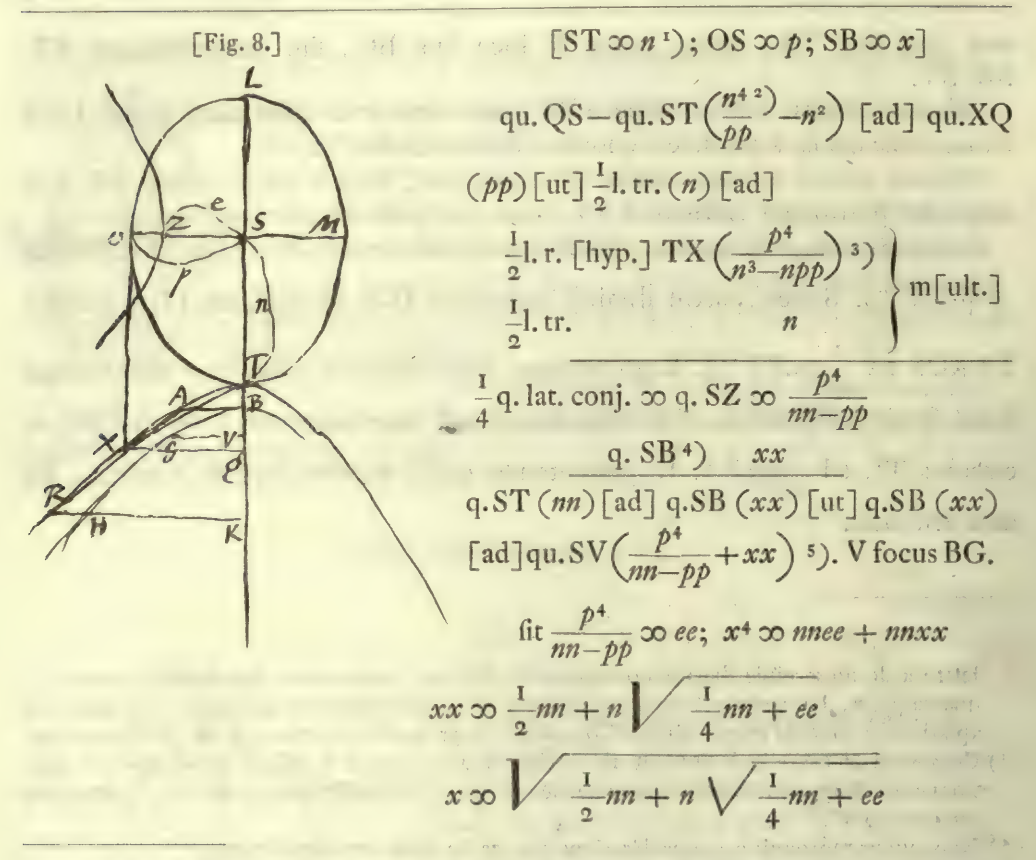
⁸) Comparez le § 2 de la Première Partie (p. 315—316), où l'on doit remarquer que le point R de la Fig. 2 de la p. 316, foyer de l'hyperbole BGA, est identique avec le foyer V de l'hyperbole BGH de la présente figure.

⁹) Consultez le „Problema I", p. 327 qui suit.

¹⁰) Comparez la proportion au début du § 2 de la Première Partie, p. 315, et remarquez qu'on peut remplacer le deuxième et le quatrième terme respectivement par un cercle quelconque et par la moitié du carré sur son rayon.

¹¹) Comparez le § 3 de la Première Partie, à la p. 318.

[Fig. 8.]



[ST ∞ n [1]); OS ∞ p; SB ∞ x]

$$\text{qu. QS} - \text{qu. ST}\left(\frac{n^4}{pp}\,[2]) - n^2\right) \text{[ad] qu. XQ}$$

$$(pp)\ \text{[ut]}\ \frac{1}{2}\text{l. tr.}\ (n)\ \text{[ad]}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\text{l. r. [hyp.] TX}\left(\frac{p^4}{n^3 - npp}\right)[3]) \\ \frac{1}{2}\text{l. tr.} \qquad\qquad n \end{array}\right\}\ \text{m[ult.]}$$

$$\frac{1}{4}\text{q. lat. conj.} \infty \text{q. SZ} \infty \frac{p^4}{nn - pp}$$

$$\text{q. SB}\,[4]) \qquad xx$$

$$\text{q.ST}\ (nn)\ \text{[ad] q.SB}\ (xx)\ \text{[ut] q.SB}\ (xx)$$

$$\text{[ad] qu.SV}\left(\frac{p^4}{nn - pp} + xx\right)[5]).\ \text{V focus BG.}$$

$$\text{fit}\ \frac{p^4}{nn - pp} \infty ee;\quad x^4 \infty nnee + nnxx$$

$$xx \infty \frac{1}{2}nn + n\sqrt{\frac{1}{4}nn + ee}$$

$$x \infty \sqrt{\frac{1}{2}nn + n\sqrt{\frac{1}{4}nn + ee}}$$

---

[1]) Dans ce qui suit Huygens procède au calcul des données qui déterminent le conoïde hyperbolique HB qui convient au sphéroïde LOTM. À cet effet il calcule d'abord le „latus rectum" de l'hyperbole RXAT afin d'en déduire par la règle mentionnée dans la note 3 de la p. 318 le demi-diamètre conjugué de cette hyperbole qui est égal, d'après un des résultats obtenus au § 2 de la Première Partie (voir l'avant-dernier alinéa de la p. 316), au diamètre conjugué de l'hyperbole BGH.

[2]) Par construction QS = OX est égal à $ST^2 : OS$; voir (p. 324) le deuxième alinéa du présent paragraphe.

[3]) Voir la „Prop. XXI" du „Libr. I" des „Conicorum libri quattuor" d'Apollonius, citée dans la note 12 de la p. 300 du T. XI, et remarquons que le rectangle sur LQ et TQ, dont il est question dans cette proposition, est égal à $QS^2 - ST^2$.

[4]) Il s'agit maintenant de calculer SV, où V représente le foyer de l'hyperbole HGB. On a donc $SV^2 = SZ^2 + SB^2$.

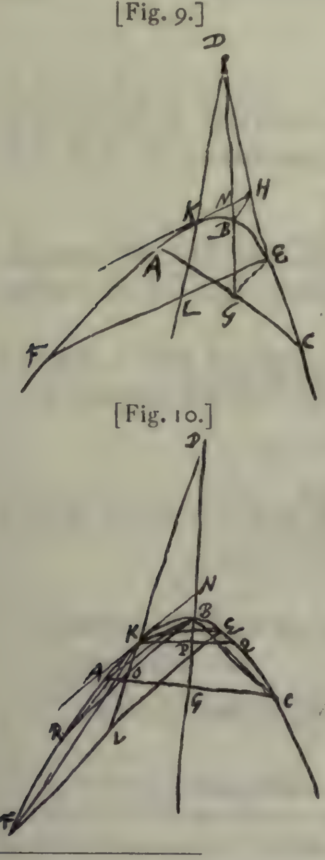
[5]) Comparez (p. 324—325) le troisième alinéa du présent paragraphe.

[6]) Voir le „Problema II" qui suit.

[7]) Puisque la démonstration de Huygens qui va suivre n'est pas complète nous en donnons ici une autre, afin de montrer que la construction élégante qui précède est légitime.

Représentons à cet effet par a' le demi-diamètre DK, par b' le demi-diamètre qui lui est conjugué, par θ l'angle DKN, et soit enfin $KL = ka'$. On trouve alors pour l'aire du segment FKE l'expression :

[Fig. 9.]



[Fig. 10.]

[PROBLEMA I.]

ABC est portio hyperb. centr. D. diam. BG. E est punctum in hyperb. datum. Oportet ducere EF, quæ abscindat portionem EKF ∞ ABC.

Constr. ut DB ad BG ita sit DH ad HE. Et sit tangens HK[6]), et EF parall. HK.

Ducta enim DKL, erit DK ad KL ut DH ad HE, hoc est, ut DB ad BG. Ergo portio FKE ∞ ABC ut hic demonstrabitur[7]).

Jungatur KB [Fig 10]. Et sit BR parall. KN. KQ paral. AC. Ergo quia NK est tangens, erunt proportionales DN, DB, DP, ut in hac pag. supra ostenditur[8]).

Ergo DK ad DO ut DB ad DP. Ergo △KBO ∞ △KBP[9]). Ergo et portio KBQ ∞ portioni BKR. Nam hæc consequ. ostendi potest[10]).

Sed △FKE ad △RKB ut △ABC ad △KBQ quia DL similiter divisa in K, O, ac DG in B et P[11]). Ergo △FKE ∞ △ABC. Ergo et portio FKE ∞ portioni ABC[12]).

$$\frac{2b'}{a'}\sin\theta\int_{a'}^{ka'}\sqrt{x^2-a'^2}\,dx,\text{ ou bien (en substituant } x=\lambda a'),\ 2a'b'\sin\theta\int_{1}^{k}\sqrt{\lambda^2-1}\,d\lambda.$$

Or, puisque $a'b'\sin\theta$ est invariant pour une hyperbole donnée, il est évident que l'aire du segment d'une telle hyperbole ne dépend que du rapport $k=\frac{\text{KL}}{\text{KD}}$, et, puisque ce rapport a par construction la même valeur pour les deux segments, il s'ensuit que leurs aires sont égales.

Consultez encore sur cette propriété de l'hyperbole la note 1 de la p. 194 de l'Avertissement.

8) Voir le calcul (p. 328—329) à la fin du présent paragraphe.

9) Puisque, en conséquence de la proportion précédente, la droite OP qui réunit les sommets de ces triangles est parallèle à leur base commune KB.

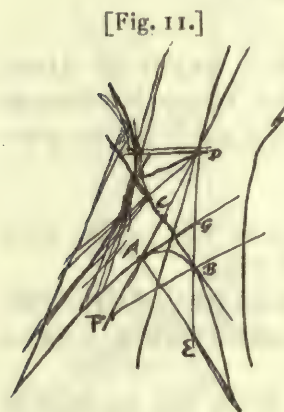
10) Cette démonstration nous manque, mais il est évident que la conclusion est légitime. En effet, les diamètres KO et BP divisent chacun des segments BKR et KBQ en deux parties égales. Or, en ajoutant aux triangles égaux OKB et PKB le segment KB on voit que les parties OKB et PKB sont égales entre elles.

11) Puisqu'on a dans ce cas $\frac{\triangle\text{FKE}}{\triangle\text{RKB}}=\frac{\text{KL}}{\text{KO}}\times\frac{\text{LE}}{\text{OB}}=\frac{\text{KL}}{\text{KO}}\times\frac{\sqrt{\text{DL}^2-\text{DK}^2}}{\sqrt{\text{DO}^2-\text{DK}^2}}=\frac{\text{BG}}{\text{BP}}\times$ $\times\frac{\sqrt{\text{DG}^2-\text{DB}^2}}{\sqrt{\text{DP}^2-\text{DB}^2}}=\frac{\text{BG}}{\text{BP}}\times\frac{\text{GC}}{\text{PQ}}=\frac{\triangle\text{ABC}}{\triangle\text{KBQ}}$.

12) Ce raisonnement manque de précision, mais probablement Huygens s'est assuré de l'exacti-

[PROBLEMA II.]

[Fig. 11.]

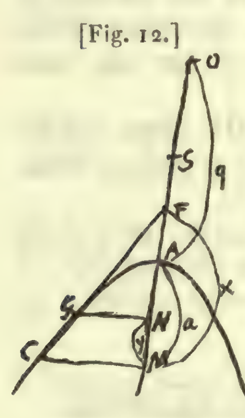


AB eſt hyperb. D centrum. C punctum datum non extra aſymptotos [1]). CB ducenda tangens.

Conſtr.° DCA lin. recta. DC, DA, DF proportionales. AG tangens, FB parall. AG. CB eſt tangens quæſita.

Quia enim FB ordin. appl. ad AF [2]), ſuntque proportionales DF, DA, DC. Erit CB tangens [3]).

[Fig. 12.]



[S centrum; OA ∞ 2 AS ∞ q; AM ∞ a; NM ∞ y; FM ∞ x]

$q+a$ OM [4]) $\quad q+a-y$ [ON]

$\dfrac{a}{aq+aa}$ [ad] $\dfrac{a-y}{aq+aa-2ay-qy+yy}$ [ut] xx [ad]

$xx-2xy+yy$ [5])

$$aqxx-2aqxy+aaxx-2aaxy \infty aqxx+aaxx-$$
$$-2ayxx-qxxy$$
$$-2aq-2aa \infty -2ax-qx$$
$$\frac{2aq+2aa}{2a+q} \infty x$$

$$\left.\begin{array}{r} SM \infty \frac{1}{2}q+a \\ x \infty \dfrac{2aq+2aa}{2a+q} \end{array}\right\} \text{ſ [ubtr.]}$$

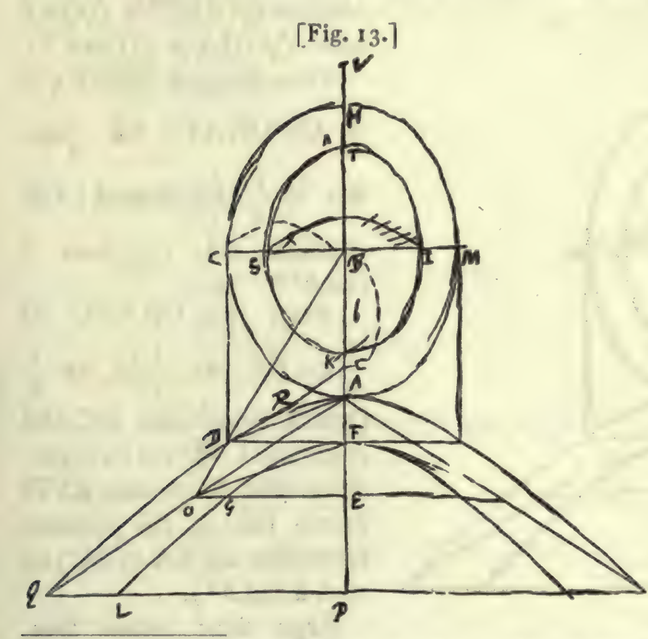
$$SF \infty \frac{\frac{1}{2}qq}{2a+q}$$

---

tude de sa conclusion par des considérations plus ou moins explicites sur les parallélogrammes élémentaires qu'on peut circonscrire ou inscrire aux triangles et segments en question. En effet, après avoir divisé DL et DG dans un même nombre de parties égales, on peut remarquer que, pour des divisions correspondantes, les parallélogrammes élémentaires inscrits dans les triangles FKE et ABC sont égaux, puisque les triangles le sont eux-mêmes, de plus ces parallélogrammes ont des rapports égaux (dépendant du nombre ordinal de la division) aux parallélogrammes inscrits dans les segments hyperboliques. On en conclut à l'égalité de ces derniers parallélogrammes, et, par suite, à celle de leurs sommes qui à la limite se confondent avec les segments en question.

$$\text{SM}\left(\frac{1}{2}q + a\right)[\text{ad}]\ \text{SA}\left(\frac{1}{2}q\right)[\text{ut}]\ \text{SA}\left(\frac{1}{2}q\right)[\text{ad}]\ \text{SF}\left(\frac{\frac{1}{2}qq}{2a+q}\right)^{6)}\ \text{bon.}$$

[Fig. 13.]



§ 2 [7]).

Sphæroides compreſſum.

Axis sphæroidis CM [8]).

Ut conveniat hyperbola AD Ellipſi AC debent eſſe prop.^es CB, BA, CD ſive CD $\infty \frac{1}{2}$l. rect. [9]) Ut autem conveniat hyperbola AD hyperbolæ FGL, debet ſumptis BA, BF, BE propor.^bus, eſſe E focus hyperb. FGL [10]). B centr. FD vel CB $\infty \frac{1}{2}$ l. rect. [11])

[1]) Les trois mots qui précèdent ont été ajoutés après coup à une date inconnue.

[2]) Puisque BF est parallèle au diamètre qui est conjugué à DF.

[3]) Voir le calcul qui suit où Huygens démontre l'existence de la proportion DF : DA = DA : DC dans le cas où BC est la tangente à l'hyperbole au point B. La proportion avait d'ailleurs été indiquée par Apollonius; voir la note 4 de la p. 341, qui suit.

[4]) Pour déterminer la tangente au point C de l'hyperbole CGA Huygens se propose d'appliquer la méthode de Fermat exposée à la p. 20 de notre T. XI.

[5]) On a $CM^2 : GN^2 = FM^2 : FN^2$, mais d'après la „Prop. XXI" du „Libr. I" des „Conicorum libri quattuor" d'Apollonius, citée dans la note 12, p. 300 de notre T. XI, on peut remplacer le premier de ces rapports par celui de OM × AM à ON × AN.

[6]) Vérification de la proportion employée dans les démonstrations qui accompagnent les „Problemata" I et II qui précèdent.

[7]) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe du cas spécial où les points A et X de la Fig. 8 (p. 326) coïncident. En effet, ces points sont remplacés dans la présente figure par le point D et de même les points Q et B par le point F. En ce cas la relation exposée au § 1 (p. 324—325) se simplifie notablement. Ajoutons que le résultat obtenu dans ce paragraphe est mentionné aux p. 76—77 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium".

[8]) On remarquera le double emploi de la lettre C dans la figure. Nous désignerons par C le point sur l'axe CBM et par C' celui sur l'axe BA.

[9]) Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 324. CD est donc égal à la moitié du „latus rectum" de l'ellipse ACHM par rapport à l'axe CM.

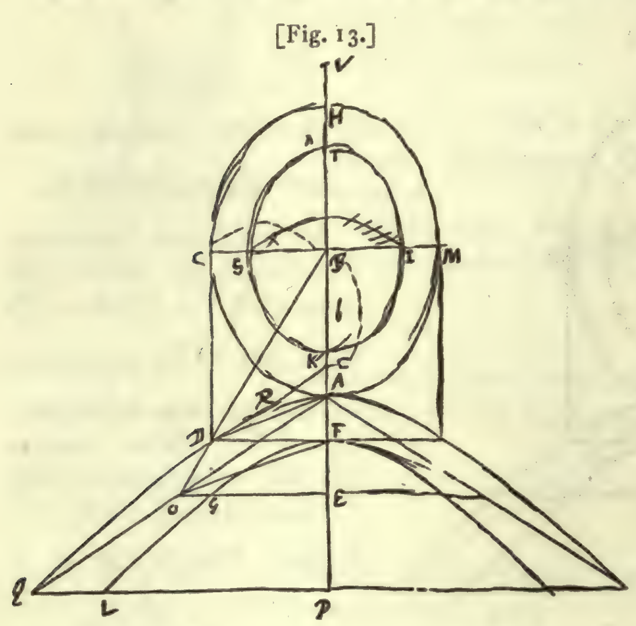
[10]) Consultez le dernier alinéa de la p. 324.

[11]) La ligne FD de la présente figure correspond à la ligne BX de la Fig. 2 de la p 316. Or, on

BA [ad] BF h[oc] e[st] BF ad BE [1]) ut BD ad BO [2]). Ergo OGE recta linea [3]). DA paral. OF [4]).

Spatium QDFP ∞ QODRAP quia QDO ∞ ODRA ∞ DRAF [5]). Spatium rectilin. QODFP ∞ △QAP quia △ODA ∞ △DAF [6]).

[Fig. 13.]



Sicut spatium QDFP (∞ ∞ QODRAP) ad $\frac{1}{2}$qu. BA ∞ $\frac{1}{2}bb$ ita superf. LGF conoidis ad circulum à rad.b [7]).

Sicut spat. DRABC ad $\frac{1}{2}$qu. BA ∞ $\frac{1}{2}bb$ ita $\frac{1}{2}$ superf. sphæroidis HCAM cujus axis CM (vel ita superficies tota sphæroidis KSTI sumtis BK et BS potentia subduplis ad BA et BC) ad circ. à rad.b [8]).

Ergo sicut totum spat. QODCBAP ad superf. conoidis FL et sphæroidis KS ita $\frac{1}{2}bb$ ad circ. à rad.b.

Et permutando spat. QODCBAP ad $\frac{1}{2}bb$ ut superf. conoidis FL + superf. sphæroid. KS ad circul. à rad. b.

---

trouve la longueur de BX en posant $x = 0$ dans l'expression $\frac{1}{2}r + \frac{rx}{q}$ pour CD (p. 315), où r représente le „latus rectum" de l'hyperbole AGB qui correspond à l'hyperbole LGF de la présente figure.

[1]) Voir la proportion qui précède et remarquons que le point E est donc un point de l'axe VP, qui est déterminé par cette proportion. On ne sait donc pas d'avance que la droite OE est parallèle à DF, c'est-à-dire perpendiculaire à AP; mais Huygens va démontrer qu'il en est ainsi.

[2]) AQ est supposée parallèle à la tangente DC′ au point D. On a donc, d'après la proportion déduite à la fin du § 1, p. 328—329, BA : BF = BC′ : BA = BD : BO. De cette manière l'égalité des demi-segments ODRAO et FDAF est assurée (comparez la note 7 de la p. 326) et cette égalité suffit comme on le verra bientôt pour pouvoir remplacer la somme des figures QDFPQ et CDRABC par celle de deux figures rectilignes.

[3]) EG qui correspond à la ligne VG de la Fig. 8 (p. 326), était primitivement la perpendiculaire élevée sur l'axe de l'hyperbole FGL au foyer E de cette courbe.

[4]) Puisqu'on a BA : BF = BD : BO.

[5]) Comparez la note 2.

CB ∞ x; BA ∞ b

x [ad] b (rat. BA : BF) [9]) [ut] BF $\left(\frac{bb}{x}\right)$ [10]) [ad] BE $\left(\frac{b^3}{xx}\right)$ [11])

BF $\left(\frac{bb}{x}\right)$ [ad] FD (x) [ut] BE $\left(\frac{b^3}{xx}\right)$ [ad] EO (b). Ergo PQ ∞ $2b$

BE $\left(\frac{b^3}{xx}\right)$ | f.
BA (b) |

[EA] $\left(\frac{b^3}{xx} - b\right)$

AP $\left(\frac{2b^3}{xx} - 2b\right)$

b ∞ EO ∞ $\frac{1}{2}$ QP

$\left(\frac{2b^4}{xx} - 2bb\right)$ △QAP ∞ fpat. QODFP

(bb) ▭FC

$\frac{2b^4}{xx} - bb$ ∞ fpat. QODCBAP

BF $\frac{bb}{x}$
FD x

(bb) ▭FC

$\frac{b^6}{x^4}$ [12]) q. BE | f.
$\frac{b^4}{xx}$ q. BF |

l. tr. [ad] l. r. [id eft] $\frac{bb}{x}$ [ad] x [ut] ▭VEF $\left(\frac{b^6}{x^4} - \frac{b^4}{xx}\right)$

[ad] q. GE $\left(\frac{b^4}{xx} - bb \infty xx\right)$ [13])

---

[6]) À cause du parallélisme des lignes OF et DA.

[7]) Comparez le début du dernier alinéa de la p. 325.

[8]) Comparez le § 3 de la Première Partie à la quatrième ligne d'en bas de la p. 318.

[9]) BA : BF $= b : \frac{b^2}{x}$ (voir la note suivante) $= x \,.\, b$.

[10]) Puisque BF = CD est égal à la moitié du „latus rectum" de l'ellipse ACHM par rapport à l'axe CM; voir la note 9 de la p. 329.

[11]) Voir la première ligne de la p. 330.

[12]) Huygens va rechercher sous quelle condition se réalise le cas spécial qui l'occupe dans le présent paragraphe. Quel doit être alors le rapport des axes CB = x et AB = b de l'ellipse ACHMA?

[13]) Voir la „Prop. XXI" du „Libr. I" des „Conicorum libri quattuor" d'Apollonius, que nous venons de mentionner dans la note 3 de la p. 326. V est l'autre sommet de l'hyperbole

$$x^4 \infty - bbxx + b^4;\ xx \infty \sqrt{\frac{5}{4}b^4 - \frac{1}{2}bb};\ x \infty \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}b^4} - \frac{1}{2}bb} \infty$$
$$\infty \sqrt{b\sqrt{\frac{5}{4}bb} - \frac{1}{2}bb}$$

$$\mathrm{AB}\,(b)\ [ad]\ \mathrm{BC}\,(x)\ [ut]\ \mathrm{BC}\,(x)\ [ad]\ \frac{xx}{b}\ [\infty]\ \frac{1}{2}\ \text{l.r. Ellipsis AC} \infty$$
$$\infty \sqrt{\frac{5}{4}bb} - \frac{1}{2}b$$

[Fig. 14.]



BA ∞ b ∞ $\frac{1}{2}$ lat. tr. Ellipsis AC. BA divisa in N [Fig. 14] secundum extremam et mediam rationem. major pars NA est $\frac{1}{2}$ lat. rectum Ellipsis AC.

Hyperbolæ AQ lat. rect. æquale transfv.° [1]) nimirum b [2]).

$$\frac{1}{2}\text{qu. BA}\left(\frac{1}{2}bb\right)\ [ad]\ \text{spat. QODCBAP}\left(\frac{2b^4}{xx} - bb\right)$$

	[ut] circ. à rad. b	[ad]	utramque superf. [3])
xx [ad] $4bb - 2xx$	[ut] "	[ad]	"
$b\sqrt{\frac{5}{4}bb} - \frac{1}{2}bb$ [ad] $5bb - 2b\sqrt{\frac{5}{4}bb}$	[ut] "	[ad]	"
$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ [ad] $5 - \sqrt{5}$	[ut] bb	[ad]	$2\sqrt{5}\,bb \infty 2b\sqrt{5bb}$

Ergo $\sqrt{2b\sqrt{5bb}}$ ∞ rad. circ. duabus superf.bus æqualis. Hæc melius in adjuncta pagina [4]).

LGF. On a donc VE $\times$ EF $=$ (BE $+$ BF) (BE $-$ BF) $=$ BE^2 $-$ BF^2. De plus, GE, l'ordonnée de l'hyperbole FGL, qui correspond au foyer E, est la moitié du „latus rectum" de cette hyperbole. On a donc GE $=$ DF $=$ CB $= x$, d'après la note 11 de la p. 329.

[1]) On a d'après la Prop. XXI d'Apollonius, citée dans la note précédente:

$$\frac{\text{l. tr. hyp. QDA}}{\text{l. r. hyp. QDA}} = \frac{\text{HA} \times \text{AF}}{\text{DF}^2} = \frac{\text{BF}^2 - \text{BA}^2}{\text{DF}^2} = \frac{\frac{b^4}{x^2} - b^2}{x^2} = \frac{\text{GE}^2}{\text{BC}^2} = 1.$$

BE [Fig. 13] secta est in A secundum extremam et mediam [5]). BA ad AE ut BA ad $\frac{1}{2}$ l. rect. ellipsis AC [6]). Ergo AP ∞ l. r. Ellipsis AC ∞ $\frac{2xx}{b}$ quæ ante inventa fuit $\frac{2b^3}{xx} - 2b$ [7]).

$$\begin{array}{ll} \frac{2xx}{b} & AP \\ b & EO \\ \hline 2xx & \triangle QAP \\ bb & \square FC \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ qu. BA $\left(\frac{1}{2}bb\right)$ [ad] spat. QODCBAP $(2xx + bb)$ [ut] bb [ad] $4xx + 2bb$ [8])

$\frac{1}{2}bb$ [ad] $b\sqrt{5bb}$ [ut] bb [ad] $2b\sqrt{5bb}$

Ergo $\sqrt{4xx + 2bb}$ h. est $\sqrt{\text{qu. CM} + \frac{1}{2}\text{qu. HA}}$ æquatur radio circuli qui æqualis est superficiebus sphæroidis STK et conoidis hyp.ⁱ FLP.

Vel sumatur potius $\sqrt{\text{qu. TK} + 2\text{ qu. SI}}$ [9]).

Constr.° [10]) Sit [Fig. 15] datum sphæroides cujus centrum O, axis SI, diameter TK.

Sumatur BC potentia dupla ad OS. Et BA potentia dupla

---

2) Lisez: $2b$.

3) Voir le dernier alinéa de la p. 330.

4) Voir (p. 333) la dernière partie du présent paragraphe.

5) Puisqu'on a BE $\left(\frac{b^3}{x^2}\right)$: BA $(b) = b^2 : x^2 = 1 : \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$.

6) On trouve, lorsqu'on applique la propriété principale de la division en extrême et moyenne raison, BA : AE = BE $\left(\frac{b^3}{x^2}\right)$: BA (b) = BA (b) : $\frac{x^2}{b}$, où $\frac{x^2}{b}$ représente la moitié du „latus rectum" de ellipse ACHM par rapport à l'axe AH.

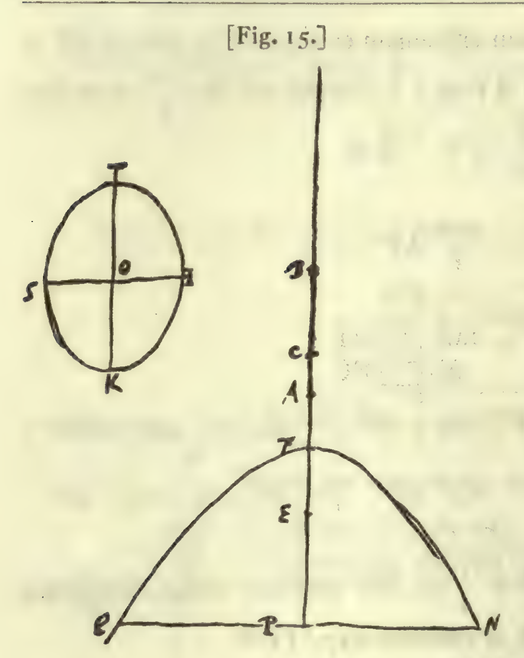
7) Voir la p. 331, l. 7. C'est dans l'emploi de l'expression plus simple $\frac{2xx}{b}$ que consiste l'amélioration à la quelle Huygens vient de faire allusion.

8) Comparez les proportions en bas de la page précédente.

9) Puisque, par construction, HA = TK. $\sqrt{2}$ et CM = SI $\sqrt{2}$.

10) On retrouve cette construction au lieu cité dans la note 7 de la p. 329. Elle n'est valable, comme Huygens le fait observer dans l'„Horologium oscillatorium", que dans le cas où OK et OS² : OK [Fig. 15] sont entre elles comme les segments d'une droite divisé en extrême et moyenne raison.

[Fig. 15.]



ipſius OK. Et ſint quatuor hæ continue proportionales BC, BA, BF, BE [1]). et ponatur EP ∞ ∞ EA. Et intelligatur conoides hyperbolicum FQN, cujus axis FP axi adjecta ſit FB ſive $\frac{1}{2}$ l.tr.; $\frac{1}{2}$ latus vero rectum BC [2]). Dico hujus conoidis ſuperficiei una cum ſuperficie ſphæroidis TK æquare circulum cujus ſemidiam. poſſit quadr. TK cum duplo qu.° SI.

E eſt umbilicus hyperb. QFN [3]).

Nota quod etiam BC ad BF hoc eſt lat. rectum hyperb. QF ad latus tranſverſum eam habet rationem quam lat. rect. ellipſis SK ad ſuum lat. tranſv. TK [4]). hoc eſt quam major pars ad totam linea diviſam ἄκρον καὶ μέσον λόγον [5]).

[Troisième Partie] [6]).

3 Feb. 1658.

Sphæræ ſuperficiei Archimedes circulum æqualem dedit [7]), nos ſuperficiei conoidis parabolici [8]).

---

[1]) Les points B, A, F, E, P correspondent aux points homonymes de la Fig. 13 (p. 330), tandis que BC représente la même longueur dans les deux figures. Or, on a, d'après ce qui précède, BC (x) : BA (b) = BA (b) : BF $\left(\frac{b^2}{x}\right)$ = BF $\left(\frac{b^2}{x}\right)$: BE $\left(\frac{b^3}{x^2}\right)$.

[2]) Comparez la note 11 de la p. 329.

[3]) Voir le dernier alinéa de la p. 329.

[4]) Puisqu'on a BC (x) : BF $\left(\frac{b^2}{x}\right) = \frac{x^2}{b}\sqrt{2}$: TK $(b\sqrt{2})$, où $\frac{x^2}{b}\sqrt{2}$ représente le „latus rectum" de l'ellipse STIK par rapport à l'axe TK.

[5]) C'est-à-dire „en extrême et moyenne raison", puisqu'on a, en effet, $x : \frac{b^2}{x} = x^2 : b^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) : 1$; voir la note 5 de la p. 333.

Si vero detur circulus æqualis ſuperficiei ſphæroidis cujuſvis data erit quadratura circuli, et hyperbolæ quadratura. Nam ſi ſphæroidis oblongi ſuperficiei circulus æqualis detur, data erit circuli quadratura, et contra [9]). Si autem ſuperficiei conoidis lati circulus æqualis detur, data erit quadratura hyperbolæ, et contra [10]). Data autem hyperbolæ quadratura, datur longitudo lineæ parabolicæ, et contra [11]). Ergo data hic longitudine lineæ parabolicæ datur etiam circulus æqualis ſuperficiei ſphæroidis lati. Rurſus, dato circulo qui æqualis ſit ſuperficiei conoidis hyperbolici, datur quadratura hyperbolæ [12]), ergo et longitudo parabolicæ lineæ; et circulus æqualis ſuperficiei ſphæroidis lati. Et contra ex ſuperficie ſphæroidis lati innoteſcit ſuperficies conoidis hyperbolici. Data autem unius ſphæroidis conoidiſve hijperbolici ſuperficie datur infinitorum aliorum diſſimilium; quoniam &c.

dato ſphæroide lato poteſt conoides hyperbolicum inveniri, vel dato conoide hyperbolico poteſt ſphæroid. latum adinveniri et utriuſque ſimul ſuperficiei circulus æqualis effici exactè [13]).

Sphæroidis omnis oblongi ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus ſemid. media proportionalis inter ſemidiametrum ſphæroidis (hoc eſt dimidium ejus quæ per centrum ducitur axi ad angulos rectos) et lineam æqualem utriſque, diametro ſphæroidis et arcui peripheriæ deſcriptæ ſuper axe ſphæroidis, cujus peripheriæ diameter ſit ad dictum axem ut axis ad diſtantiam umbilicorum in ſectione per axem [14]).

Sphæroidis omnis lati ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus ſemidiam. eſt media proportionalis inter diametrum ſphæroidis et lineam parabolicæ portionis rectam cujus baſis ſit axis ſphæroidis, altitudo verò æqualis quartæ parti diſtantiæ umbilicorum in ſectione per axem [15]).

---

[6]) Dans cette Partie, empruntée à une feuille détachée, Huygens résume les résultats obtenus dans les Parties qui précèdent.

[7]) Voir l'ouvrage „De Sphæra et cylindro", p. 1—54 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 1—255.

[8]) Voir le § 1 de la Première Partie, p. 314.

[9]) Voir le § 4, p. 320—324.

[10]) Voir le § 3, p. 317—319.

[11]) Comparez les „Theoremata VIII et IX", pp. 249 et 253.

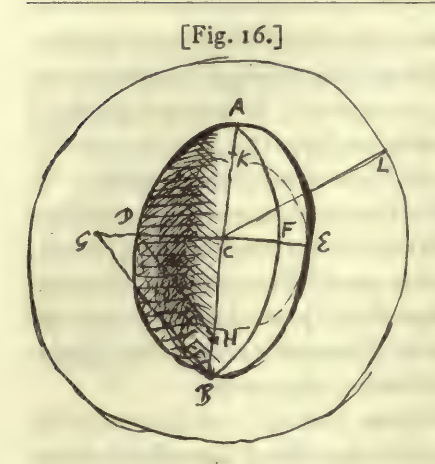
[12]) Voir le § 2, p. 315—316.

[13]) Comparez la Deuxième Partie, p. 324—334.

[14]) Comparez le troisième et le quatrième alinéa de la p. 323 et la Fig. 16 qui suit.

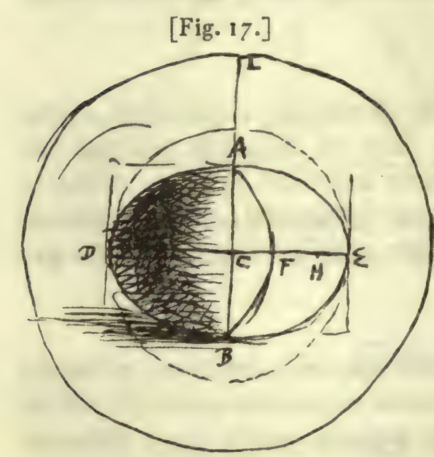
[15]) Comparez la „Constructio" de la p. 319, et la Fig. 17 qui suit.

[Fig. 16.]



DH ∞ CB. H umbilicus. BG parall. HD.
CL media inter CD et DE + AFB.
ſuperfic. ſphæroidis ad ſuperfic. ſphæræ inſcr. ut DE + AFB ad 2DE.

[Fig. 17.]



H umbilicus. CF = $\frac{1}{2}$CH. AFB parab.
CL media inter DE et AFB.
ſuperficies ſphæroidis ad ſuperf. ſphæræ circumſcr. ut AFB ad DE.
ad ſuperf. cylindri circumſcr. ut AFB ad AB.

3 Feb. 1658.

[1]) En 1659 Huygens s'est occupé de nouveau de la quadrature des surfaces des sphéroïdes et des conoïdes hyperboliques. Évidemment c'était son intention de procéder à la rédaction définitive d'un traité qui devait contenir, avec la rectification de la parabole, ses découvertes sur ces quadratures, et peut-être encore d'autres inventions géométriques, p.e. la quadrature des courbes paraboloïdes et hyperboloïdes (voir la Pièce VIII, p. 273—293). Ainsi la Quatrième et dernière Partie de la présente Pièce, qui occupe les p. 103—113 du Manuscrit A, nous donne en premier lieu un projet de préface, d'où il résulte que Huygens s'était résolu enfin à s'émanciper en partie de la méthode de démonstration archimédienne. Ensuite on y trouve dans une forme très achevée la discussion des coniques auxiliaires dont il s'était servi dans la Première Partie (p.314—324) afin d'obtenir la réductionde la quadrature des surfaces prémentionnées à celle de l'hyperbole ou du cercle; lesquelles courbes il se proposa, d'après une annotation qu'on trouve dans le projet de préface, de désigner comme courbes adjointes („adjuncta") aux courbes méridiennes des surfaces à considérer. Sans doute Huygens a voulu faire suivre après les „Theoremata I—III" (que nous réproduisons aux

[Quatrième Partie] [1]).

Aliqui per indivisibilia. Sed falluntur si pro demonstratione ea venditent [2]). Cæterum ad fidem faciendam apud peritos haud multum interest, an demonstratio absoluta tradatur an fundamentum ejus demonstrationis, quo conspecto non dubitent demonstrationem perfectam dari posse. fateor tamen etiam in hac rite instituenda ut clara concinna omniumque aptissima sit, peritiam et ingenium elucere, uti in Archimedis omnibus operibus. verum et prior et longe præcipua est inveniendi ratio ipsa, hujus cognitio potissimè delectat atque a doctis expetitur, quamobrem magis etiam hæc methodus sequenda videtur qua brevius clariusque comprehendi et ob oculos poni potest. Tum verò et nostro labori parcimus in scribendo, et aliorum in legendo, quibus vacare tandem amplius non poterit, ut ingentem multitudinem Geometricorum inventorum quæ augetur in dies doctoque hoc sæculo in immensum porro exitura videtur, evolvant, si quidem prolixam illam ac perfectam veterum methodum scriptores usurpant.

In præcedentibus tamen hanc retinuimus jam olim ita perscriptis [3]) ut argumento ac quodammodo exemplo sint quo appareat etiam reliqua ad hunc modum perfici potuisse [4]).

Egregia est illa et subtiliter reperta veterum ratio demonstr. per inscripta et circumscripta ad absurdum deductio et certitudine mirabili. Et in illo Geometriæ exortu cum novum etiamnum et pene incredibile videretur res tantas tamque reconditas ex parvis initijs confirmari, omnino necessaria.

---

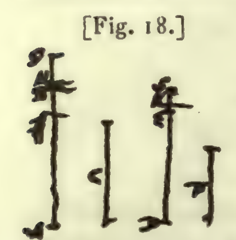
p. 338—346) les théorèmes principaux sur les quadratures de ces surfaces, avec leurs démonstrations, mais ce dessein n'a pas été exécuté, et lors de la publication, en 1673, de son „Horologium oscillatorium", il y a renoncé définitivement en se résolvant à donner ces théorèmes sans aucune démonstration.

2) On peut consulter quant à l'opinion de Huygens sur la méthode des indivisibles de Cavalleri les pp. 132—134 et 561 du T. I, la p. 158 du T. XI et la p. 753 du T. XIII.

3) Voir les p. 237—270 de la Pièce N°. VI.

4) Voir pour la traduction de ce passage intéressant la note 14 de la p. 191.

[Fig. 18.]

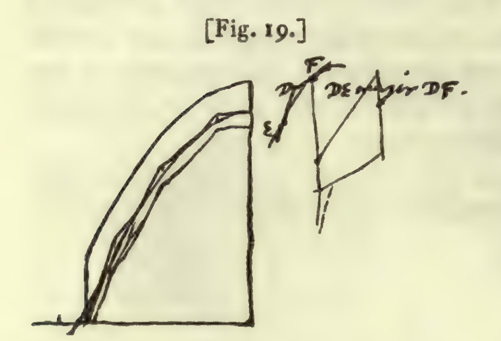


dico [1]) esse AB ad C ut DE ad F. Sit enim primò AB ad C minor quam DE ad F. Et sit si potest GA ad C ut ED ad F et circumscribatur HA simulque DK.

Quia ergo ponitur GA ad C ut ED ad F erit minor ratio HA ad C quam ED ad F. Sed ut HA ad C ita KD ad F. Ergo minor quoque ratio KD ad F quam ED ad F. Ergo KD minor quam ED quod absurdum.

Sit jam si potest ratio BA ad C major quam ED ad F, eademque quæ SD ad F, et circumscribatur KD, simulque HA. Ergo KD at F habet minorem quam BA ad C. Sed KD ad F ut HA ad C. Ergo et HA ad C minorem quam BA ad C. Ergo HA minor quam BA quod absurdum.

[Fig. 19.]



in omnibus fieri posse. in parabola ex. gr. sic. [2]).

fig. adjuncta vocetur [3]).

describatur simul ordinatè circumscripta [4]) et ex ea adjuncta.

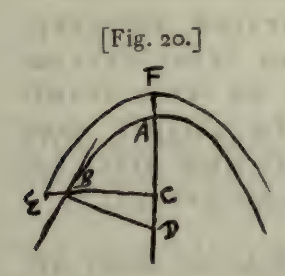
[Theorema I.]

Si a quovis in parabola puncto [Fig. 20] recta linea ad axem parabolæ terminata ducatur, perpendic. ei quæ in adsumto puncto parabolam contingit perque idem punctum quædam ordinatim ad axem applicetur quæ sit æqualis lineæ prius ductæ. Terminus illius ordinatim applicatæ parabolam aliam continget positionè datam [5]).

---

[1]) Dans ce qui suit Huygens donne, pour ainsi dire, une description schématique de la méthode de démonstration archimédienne. En effet, AB et DE représentent des grandeurs quelconques (longueurs, aires, volumes) auxquelles on peut circonscrire d'autres grandeurs comme AH ou DK qui ne les surpassent que d'une quantité aussi petite qu'on le veut. De plus, Huygens suppose que les rapports de ces grandeurs circonscrites aux quantités C et F soient de telle nature qu'à chaque valeur AH > AB correspond une valeur DK > DE de

[Fig. 20.]

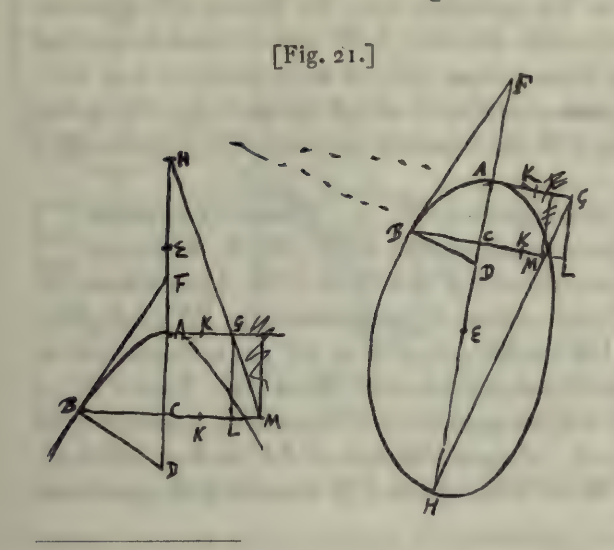


Sit parabola AB, cujus axis AD, vertex A, et ſumto in ea puncto B, ducatur BD quæ parabolæ vel parabolam in puncto B contingenti ſit ad angulos rectos, ſitque CBE ordinatim ad axem AD applicata et æqualis ipſi BD. dico hujus terminum E contingere parabolam aliam FE, cujus quidem latus rectum idem ſit quod parabolæ AB, axiſque FD cum axe AD conveniat, vertex vero F altior ſit vertice A intervallo AF quod æquet quartam partem lateris recti.

Conſtat enim CD æqualem eſſe ſemiſſi lateris recti [6]). Quia ergo quadr.EC ſive BD æquale eſt quadratis duobus BC et CD quorum BC qu. æquale eſt ▭ a latere recto et AC comprehenſo, quadr. vero CD æquale quartæ parti quadrati à latere recto. hoc eſt ▭ ex AF et latere recto. Erit igitur qu.EC æquale rectangulo quod tota CF et latere recto parabolæ FE continetur. quare punctum E in parabola FE eſſe liquet.

[Theorema II.]

[Fig. 21.]



Si à quovis puncto in hyperbola aut ellipſi duæ rectæ ad axem ſectionis ducantur, quorum altera ſit applicata ordinatim, altera perpend. ei quæ in eodem puncto ſectionem contingit, Erit pars axis ab utraque intercepta in hyperbola quidem æqualis hiſce utriſque, dimidio lateri recto, et ei lineæ quæ ſit ad portionem axis inter verticem et ordina-

sorte qu'on a AH : C = DK : F. Partant de ces suppositions Huygens démontre qu'on aura AB : C = DE : F.

Voir p. e. pour une application de cette méthode la démonstration du „Theorema VIII" p. 249—252.

²) Voir la figure à côté et comparez le § 1 de la Première Partie, p. 314.

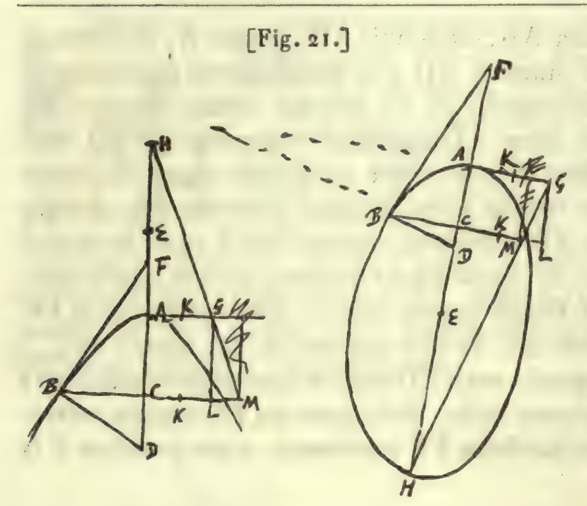
³) Comparez la note 1 de la p. 336.

⁴) Voir la „Definitio I", p. 237.

⁵) Comparez le § 1 à la p. 314.

⁶) Voir p. e. la p. 218 de l'édition de 1649 (p. 246 des éditions de 1659 et 1683) de la „Geometria". Comparez la note 8 de la p. 315.

[Fig. 21.]



tim applicatam intercep-tam, ſicut latus rectum ſectionis ad latus tranſ-verſum. In ellipſi vero æqualis ei quo prior ha-rum alterum excedit [1]).

Sit hyperbola vel ellipſis AB. cujus axis AC, diameter tranſ-verſa AH. centrum ſectionis E. Et à puncto B in ſectione ſumpto ducatur BC ad axem ordin. appl.[a], BD vero perpend. tangenti ſectio-nem in puncto B, quæ ſit BF.

Sit porro latus rectum ſectionis AG inſiſtens axi ad angulos rectos, et ducatur HGM, occurrens ordinatim appli-catæ BC in M. eidemque occurrat GL parallela AC. Et ſecetur CL bifariam in K. Eſt igitur LK dimidio lateri recto æqualis, LM vero ei lineæ quæ eſt ad LG ſive portionem axis AC ſicut latus rectum GA ad latus tranſverſum AH, et MK in hyperbola utrique illarum æqualis: in ellipſi vero ei quo KL ipſam LM ſuperat. Dico itaque utrobique KM eſſe æqualem parti axis CD a duabus BC, BD interceptæ [2]).

Quia enim ▭ AC, CM æquale eſt quadr.° CB. . . . . Conic. [3]) itemque ▭ DCF æquale eidem qu.° CB, propter angulos rectos DBF, DCB. Erit ergo ▭ AC, CM æqu. ▭° FCD, ideoque AC ad CF ut CD ad CM. Quia autem BF ſectionem in B contingit, erunt per. . . Con. [4]) proportionales EF, EA, EC. ideoque ut EA ad EC, hoc eſt HE ad EC, ita FA ad AC; et componendo ut HC ad EC ita FC ad AC. Sed ut FC ad AC ita erit CM ad CD. Ergo CM ad CD ut HC ad EC ſed ut HC ad EC ita quoque eſt CM ad KM. quoniam CM ſimiliter diviſa eſt in L atque HC in A, ſectaque bifariam eſt LC in K et AH in E. Itaque eſt ſicut CM ad CD ita CM ad KM; Quare CD æqualis KM. quod erat demonſtr.

---

[1]) Comparez les notes 8 des pp. 315 et 317.

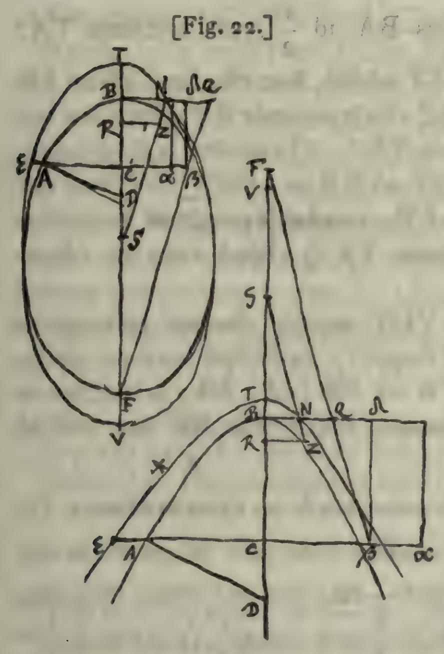
[2]) Comparez les formules auxquelles se rapportent les notes citées dans la note précédente. Évidemment la construction du segment KM correspond à l'emploi de ces formules. Il s'agit ensuite de donner une démonstration en règle qu'on a, en effet, KM = CD.

[3]) Voir la „Prop. XXI" du „Lib. I" des „Con." d'Apollonius, que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 de notre T. XI. On a, d'après cette proposition, $BC^2 : CA \times CH = AG : AH$; par suite $BC^2 = AC \times \frac{CH}{AH} AG = AC \times CM$.

[THEOREMA III.]

Iifdem pofitis fi ea quæ ordinatim applicata eft extra fectionem producatur donec æqualis fiat illi quæ ducta eft contingenti perpendicularis, productæ terminus aliam coni fectionem continget pofitione datam in hijperbola hyperbolen [5]) in ellipfi vero ellipfin aut hyperbolen, prout ad majorem aut minorem ellipfis axem ordinatim applicata fuerit [6]).

[Fig. 22.]



Sit fectio hyperbolæ aut ellipfis AB, cujus axis tranfverf. BF (fit autem primum BF axis major ellipfeos) latus rectum BQ ad axem perpendiculare. Centrum fectionis S. Et à puncto A in fectione fumto, ducta fit AD, occurrens fectioni five tangenti fectionem in A ad angulos rectos, et applicetur ad axem ordinatim CAE ipfi AD æqualis, dico terminum ejus E contingere fectionem aliam pofitione data TX. quæ hyperbole erit fi fectio BA fit hyperbole, fi vero ellipfis ellipfis; centrum idem habens cum fectione AB axemque axi convenientem, latera vero tranfverfum et rectum reciproce proportionalia lateribus fectionis AB. Et latus quidem tranfverfum VT quod ad latus tranfverfum FB fit potentia, ficut latus tranfverfum FB, ad compofitam ex ipfa FB et latere recto BQ in Hyperbolæ in Ellipfi vero ad utriufque differentiam [7]).

---

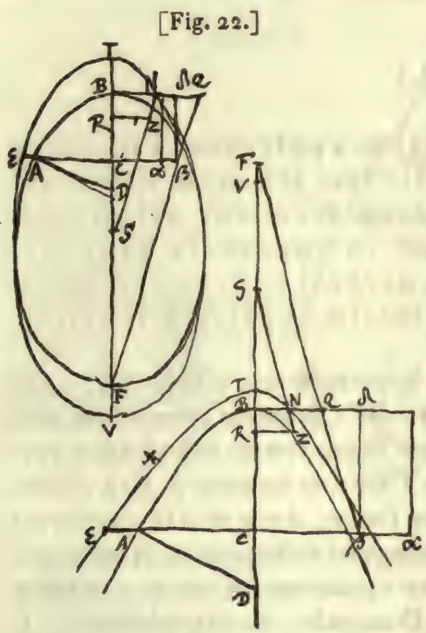
4) Voir, à la p. 26 verso de l'édition de Commandin, la première partie de la „Prop. XXXVII" du „Lib. I" des „Con." d'Apollonius, où l'on lit: „Si hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circonferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: quæ interiicitur inter applicatam & centrum sectionis unà cum interiecta inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ est ex centro sectionis".

5) Comparez le § 2, p. 315—316.

6) Comparez les §§ 3 et 4, p. 317—322.

7) C'est-à-dire $VT^2 : FB^2 = FB : (FB \pm BQ)$. Soient donc q et r les „latera transversum et rectum" de l'hyperbole ou ellipse BA, q' et r' ceux de l'hyperbole ou ellipse TE; on aura alors $q'r' = qr$ et $q'^2 : q^2 = q : (q \pm r)$.

[Fig. 22.]



Jungatur enim FQ, et producatur occurratque rectæ AC in β, et sit duabus FC, Cβ tertia proportionalis $\beta\alpha$ addenda ipsi Cβ in hyperb. in ellipsi vero auferenda [1]). et compleatur rectangulum C$\beta\delta$B itemque ▭ $\delta\alpha$. Sit etiam duabus ST, SB tertia prop.is SR; et ducatur RZ parallela BQ itemque SZ parall. FQ quæ secabit latus rectum bifariam in N.

Quia igitur ut VT ad FB sive ut ST ad SB ita ponitur reciproce esse BN dimidium lat. rect. sectionis BA ad $\frac{1}{2}$l. rect. sectionis TX: sicut autem ST ad SB, hoc est, sicut SB ad SR ita BN ad RZ: Erit proinde RZ dimidium lat. rect. sectionis TX [2]). Quamobrem si ostensum fuerit sicut ST ad RZ ita esse ▭ VCT ad qu. AD seu qu.CE, constabit punctum E contingere sectionem TX [3]). Illud vero sic ostendemus.

Quoniam æquales sunt BT, FV erit ▭ VCT æquale duobus rectangulis FCB et VBT: In hyperbole per prop. 24. lib. 7 Pappi [4]). In Ellipsi vero per prop. 57 ejusdem libri [5]). quia autem ut ST ad TB ita SB [ad] BR, erit etiam ut utraque simul ST, SB sive ut VB ad utrumque simul TB, BR hoc est ad

---

[1]) Voici les considérations qui ont pu conduire à l'introduction de ces lignes auxiliaires. Les équations des courbes BA s'écrivent: $y^2 = \frac{r}{q}x(q \pm x)$, où $y =$ AC, $x =$ BC, et où l'on doit prendre le signe + dans le cas de l'hyperbole et le signe — dans celui de l'ellipse. On trouve alors, pour les équations des courbes TE, $\text{EC}^2 = z^2 = \frac{r}{q}(q \pm x)x \pm \frac{r^2}{q^2}(q \pm x)x + \frac{1}{4}r^2$ (comparez les expressions pour zz des pp. 316 et 317). Pour pouvoir traiter à la fois le cas de l'hyperbole et celui de l'ellipse, il était donc avantageux d'introduire deux lignes auxiliaires $\frac{r}{q}(q \pm x)$ et $\frac{r^2}{q^2}(q \pm x)$ dont il faut prendre la somme dans le cas de l'hyperbole et la différence dans celui de l'ellipse. En combinant cette somme, ou cette différence, avec la ligne BC $= x$, on obtient le rectangle Bα qui, augmenté du carré de BN $= \frac{1}{2}r$, est égal au carré de $z =$ EC. Or, on trouve facilement que, par construction, $C\beta = \frac{r}{q}(q \pm x)$, $\alpha\beta = \frac{r^2}{q^2}(q \pm x)$.

[2]) La lettre X manque dans la figure qui se rapporte au cas de l'ellipse; mais il s'agit alors évidemment de la courbe TEV.

[3]) Comparez la note 3 de la p. 340.

TR ita ST ad TB: ideoque □ VBT ∞ □ STR. Itaque □ VCT æquabitur □ FCB + □ STR.

Jam vero quoniam eſt ST ad SB potentia, hoc eſt ST ad SR longitudine ut SB ad utramque ſimul SB, BN in hyperbole; in ellipſi vero ad harum differentiam [6]), Erit dividendo in hyperb., in ellipſi autem per converſionem rationis, ST ad TR ut SB ad BN. hoc eſt ut FC ad Cβ. Sed quia Cβ ad $\beta\alpha$ ut FC ad Cβ ex conſtr. hoc eſt ut SB ad SN, hoc eſt ut ST ad TR: Erit Cβ ad Cα ut ST ad SR, hoc eſt ut TR ad RZ; nam ST erat ad TR ut SB ad BN, hoc eſt, ut SR ad RZ, ideoque permutando ST ad SR ut TR ad RZ. Quia igitur oſtendimus eſſe ut ST ad TR ita FC ad Cβ. utque TR ad RZ ita Cβ ad Cα. Erit ex æquo ut ST ad RZ ita FC ad Cα. atque ita □ FCB ad □ αC, CB. ſeu Bα rectangulum.

Rurſus quia ut ST ad TR ita SB ad BN erit □ⁱ STR ad □ SB, BN duplicata ratio ejus quam ST ad SB, ac propterea eadem quæ ST ad SR. Sed □ SB, BN eſt ad qu.BN ut SB ad BN, h. e. ut SR ad RZ, ergo ex æquo □ STR erit ad qu.BN ut ST ad RZ. Sed et □ FCB oſtenſum eſt ad □ Bα eſſe ut ST ad RZ, Ergo ut ST ad RZ ita utrumque ſimul et □ FCB et □ STR, hoc eſt ita □ VCT, ad utrumque horum, □ Bα et qu.BN.

Hæc autem utraque ſimul æqualia eſſe qu.°AD vel CE deinceps oſtendemus. Nam primo quidem in hyp. □ Bα æquale eſt □ Bβ et □ $\delta\alpha$ e quibus □ Bβ æquatur qu.°AC *. □ vero $\delta\alpha$ □° BδQ*, quoniam videlicet latera reciproce *[7]). *[8]).

---

[4]) Voici cette proposition, qu'on trouve à la p. 174 recto de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 259 du T. II: „Sit recta linea AB æqualis CD, & sumatur quoduis punctum E extra lineam AD. Dico rectangulum BEC rectangulo AED, & rectangulo BDC æquale esse".

A B F C D E

[5]) Voir la p. 194 recto, où l'on lit: „Sit AB æqualis ipsi CD, & quoduis punctum E inter BC puncta. Dico rectangulum AED superare rectangulum BEC rectangulo ACD".

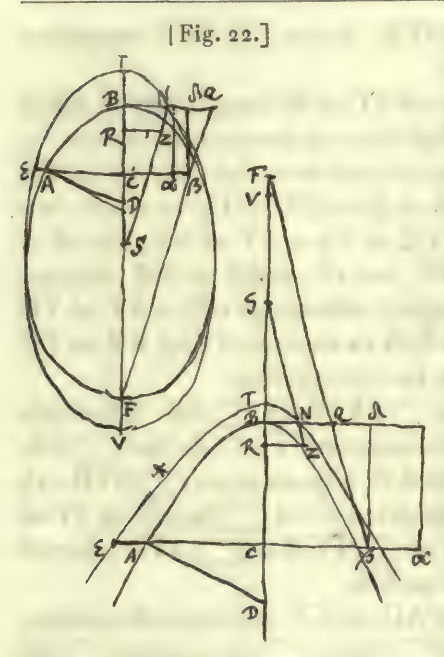
A B E C D

[6]) Voir la proportion de la note 7 de la p. 341, où VT = 2ST; FB = 2SB; BQ = 2BN, tandis que le rapport de $ST^2 : SB^2$ peut être remplacé par celui de ST : SR, puisque, par construction, $SR = \frac{SB^2}{ST}$.

[7]) Il s'agit de la proposition mentionnée dans la note 3 de la p. 340. On a d'après elle, $AC^2 : FC \times BC = BQ : FB = C\beta : FC = C\beta \times BC : FC \times BC$. Donc, par suite, $AC^2 =$ = □ Bβ.

[8]) Voir la „Prop. 14" du „Lib. 6" des „Elementa" d'Euclide, où l'on lit: „Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia". (Clavius, p. 566).

[Fig. 22.]



proportionalia sunt scil. ut $\beta\delta$ ad δQ, hoc est ut FC ad Cβ ita Cβ ad $\beta\alpha$ ex constr. Ergo □ Bα + qu.BN æqualia sunt qu.AC. et □ BδQ et qu.BN, sed □ BδQ + qu.BN æquantur quadr.° δN per .... secundi Elem. [1]) hoc est qu.CD per anteced.m [2]). Ergo □ Bα + + qu.BN æqualia qu.is ex AC et CD hoc est qu.AD sive EC.

In ellipsi vero idem sic ostenditur. qu. BN ∞ ∞ □ BδQ + qu.Nδ. per 2. Eucl. [3]) sed □ BδQ ∞ □ $\delta\beta$, $\beta\alpha$, quia ut $\beta\delta$ ad δQ hoc est ut FC ad Cβ, ita Cβ sive Bδ ad $\beta\alpha$, ex constr. Quadr. igitur BN ∞ qu.Nδ + □ $\delta\alpha$ hoc est qu.CD + □ $\delta\alpha$, nam CD ∞ Nδ per antecedendem [2]). Addito jam utrinque □ αB, fiet qu.BN + □ αB ∞ qu.CD + □ $\delta\alpha$ + □ αB, hoc est qu.CD + □βB. Sed □ βB ∞ ∞ qu.AC [4]). Ergo qu.BN + □ αB ∞ qu. CD + qu.CA, hoc est qu.°DA. sive qu.CE. sicut in hyperbola quoque ostensum est. Erat autem utrobique sicut ST ad RZ, hoc est ut latus transversum sectionis TX ad ejusdem latus rectum, ita □ VCT ad □ Bα + qu.BN [5]). Ergo ut dictum latus transversum ad latus rectum ita apparet esse □ VCT ad qu.CE. Ideoque punctum E contingere sectionem TX. quod erat dem.

Accipiatur [6]) jam pro latere recto [7]) minor ellipseos axis BF [Fig. 23] ad quæ ordinatim applicata sit AC. ductaque ut prius AD quæ contingenti Ellip-

---

[1]) Voir la „Prop. 6" du „Lib. 2" des „Elementa" d'Euclide. On la trouve citée dans la note 2 de la p. 46 de notre T. XII.

[2]) Voir le „Theorema II", p. 339—340.

[3]) Il s'agit cette fois de la „Prop. 5" du „Lib. 2", citée à la p. 176 de notre T. XI.

[4]) Voir la note 6 de la p. 343.

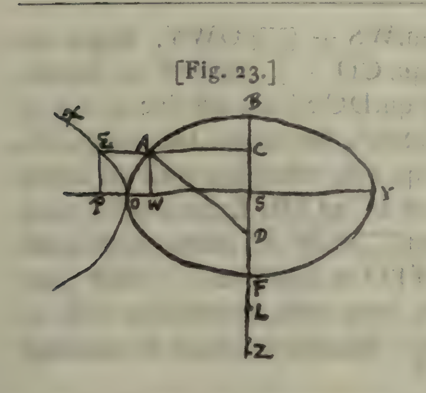
[5]) Comparez la dernière phrase du troisième alinéa de la p. 343.

[6]) Comparez, pour ce qui suit, le § 3 de la Première Partie, p. 317—319.

[7]) Lisez: „latere transverso".

[8]) Écrivant q et r pour les „latera" de l'ellipse OBY par rapport à l'axe BF et q' et r' pour ceux de l'hyperbole XO par rapport à l'axe OY, on a donc $q' = \sqrt{qr}$; $r' = \frac{q^2\sqrt{qr}}{r^2 - qr}$.

[Fig. 23.]



ſim in A occurrat ad ang. rectos. Ipſique AD æqualis ſtatuatur CAE. dico terminum ejus E contingere hyperbolen OX poſitione datam. cujus nimirum latus tranſverſum axi adjacens ſit ipſe major ellipſeos axis OY. latus rectum autem quod ad latus tranſverſum OY eam habeat rationem quam qu. lateris tranſverſi Ellipſeos BF, ad id quo qu. lateris recti ellipſeos excedit ▭ ab lateribus recto et tranſv. contentum [8]), hoc eſt (ponendo SZ ∞ $\frac{1}{2}$ lat. recti ellipſ., ſumtiſque quantitatum dictarum quartis partibus) eam quam qu.BS ad ▭ SZF. Eſt enim ▭ SZF ∞ ei quo qu.SZ ſuperat ▭ ZSF, hoc eſt quartæ parti ejus quo qu. lateris recti ellipſis ſuperat ▭ a latere tranſverſo et recto comprehenſum.

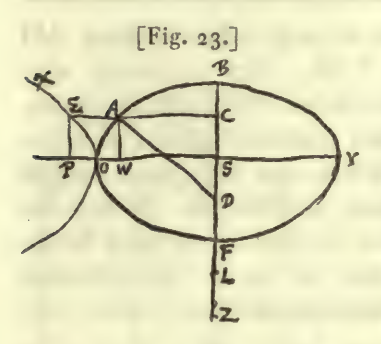
Ducantur enim à punctis A, E axi majori OY ad ang. rectos, AW, EP. Sit CL ∞ SZ. Quoniam igitur per præced. [2]) pars axis CD rectis AC, AD intercepta æqualis eſt ei quo $\frac{1}{2}$ latus rectum ellipſeos excedit lineam quæ ſit ad BC ut latus rectum ad latus tranſverſum: Eſt autem CL ∞ $\frac{1}{2}$ lateri recto. Ergo DL erit prædicta linea, quæ nimirum erit ad BC ſicut latus rectum ellipſeos ad latus tranſv. ſive ſumtis horum dimidijs, ut CL ad SB. quare et perm.° et convertendo erit CL ad LD ut SB ad BC. Et per conv.m rationis LC ad CD ut BS ad SC; et permut.° rurſus, LC ſive ZS ad SB ut DC ad CS. Sicut autem ZS ad SB, ita eſt qu.OS [9]) ad qu.SB, utque qu.OS ad qu.SB ita eſt ▭ OWY ad qu.WA [10]). Ergo etiam ut DC ad CS ita ▭ OWY ad qu.WA. Sed ut DC ad CS ita ▭ DCS ad qu.CS ſive ad qu.WA. Ergo ▭ DCS ∞ ∞ ▭ OWY.

Eſt autem qu.DC ad ▭ DCS ut DC ad CS. Ergo etiam qu.DC ad ▭ OWY ut DC ad CS hoc eſt ut ZS ad SB hoc eſt ut qu.ZS ad ▭ ZS, SB. Itaque et divid.° erit qu.DC ad qu.DC — ▭ OWY ut qu.ZS ad qu.ZS — ▭ ZSB h. e. ad ▭ SZF. Eſt autem qu.DC — ▭ OWY ∞ ▭ YPO. nam ▭ YPO ∞ qu.PS — qu.SO, hoc eſt qu.CD + qu.AC — qu.SO; ſed qu.SO ∞

[9]) Puisque $OS^2 = \frac{1}{4}qr = BS \times SZ$, d'après une formule bien connue.

[10]) D'après la dernière partie de la „Prop. XXI" du „Lib. I" des Coniques d'Apollonius, que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 du T. XI.

[Fig. 23.]



∞ qu.AC five qu.WS + ▭ OWY. Ergo qu. PS — qu.SO ∞ qu. CD — ▭ OWY ut dicebamus. Et perm.° [1]) qu.DC ad qu. ZS five qu.CL ut ▭ YPO ad ▭ SZF. fed ut qu.DC ad qu.CL ita eft qu.SC ad qu.SB; oftenfum enim eft autem quod DC ad CL ut SC ad SB; Ergo ut q.SC ad q. SB ita ▭ YPO ad ▭ SZF. Et permutando q.SC feu q.EP ad ▭ YPO ut qu.SB ad ▭ SZF, hoc eft ex hypoth. ut latus rect. hyperboles OX ad ejufdem lat. tranfv. Ideoque punctum E contingit hyperb. OX. quod erat dem.

---

[1]) Ici Huygens reprend la proportion $DC^2 : DC^2$ — ▭OWY = ZS^2 : ▭ SZF, démontrée quelques lignes plus haut, dans laquelle maintenant DC^2 — ▭OWY peut être remplacée par ▭YPO.

XI[2]).

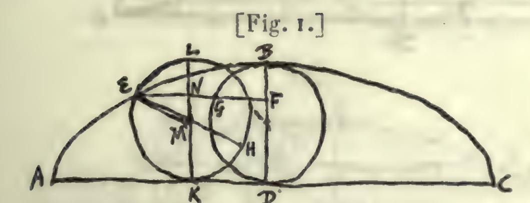
1658—1659.

[*Recherches ſur les propriétés géométriques de la cycloïde* [3]).]

[Première Partie [4]).]

§ 1 [5]).

Jul. 1658.



[Fig. 1.]

ABC eſt Cycloides. BD diameter circuli genetoris. EF parall. AD. dico EG ∞ eſſe arcui GB.

Cum B eſt in E, circulus BGD eſt in EKH. Et D in H. Ergo arcus KH ∞ ∞ rectæ KD. quare et arcus EL ſive GB ∞ rectæ KD ſive NF. Sed NF ∞ GE: nam GF ∞ NE; et addita utrinque NG fit EG ∞ NF. Ergo arcus BG ∞ GE.

---

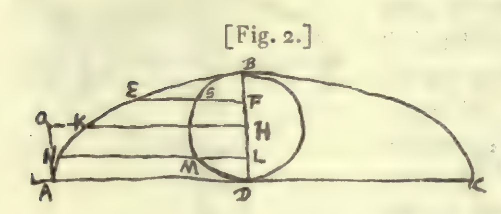
2) La Pièce, que nous avons divisée en cinq Parties et en paragraphes, est empruntée aux pp. 23—32 et 67—81 du Manuscrit A. Ajoutons que Huygens résume dans l'„Horologium oscillatorium" (p. 69 de l'édition originale) les résultats des recherches qu'elle contient.

3) Voir, quant à la détermination de la développée de la cycloïde, le § 4 de la Pièce N°. XV, p. 404—405.

4) Cette Partie fait connaître les premières recherches de Huygens sur la cycloïde, entamées peu de temps après qu'il eut reçu par l'intermédiaire de Boulliau (voir la lettre de celui-ci du 28 juin 1658, p. 186—187 du T. II) la lettre circulaire de Pascal, sous le pseudonyme Dettonvillius, intitulée: „Problemata de Cycloïde, proposita mense Junii 1658" (voir les p. 187—189 du T. II). Huygens communiqua le résultat de ces recherches à Boulliau dans une lettre du 25 juillet 1658 (p. 200—201 du T. II).

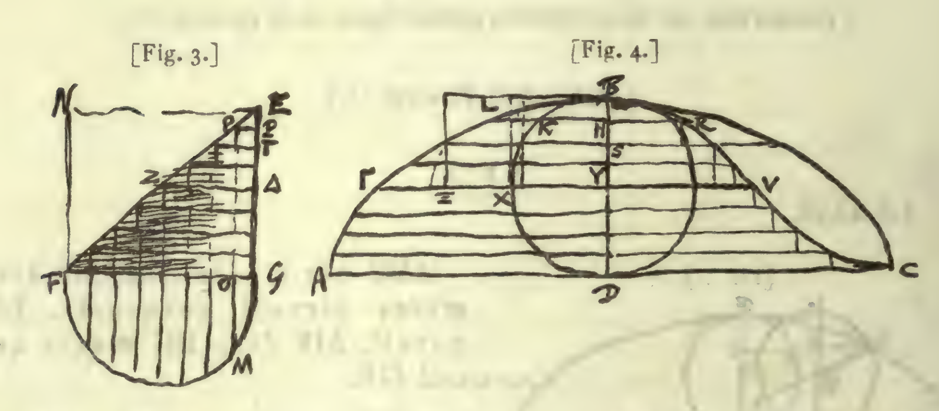
5) Ce paragraphe contient la déduction de la propriété de la cycloïde, dont Huygens se servira dans les recherches qui suivent.

§ 2 [1]).



[Fig. 2.]

Sit HL ∞ HF. et ducantur FE, LN. Erunt duæ ſimul GE et MN ∞ DA. nam GE ∞ arc.GB. Et MN ∞ arc.MB ſive GD. Ergo GE + MN ∞ arc.BGD, hoc eſt ∞ DA. Quod cum ſemper contingat, hinc facile oſtenditur quod ſpatium AEBGMDA ∞ ▭ HA, hoc eſt ∞ circ.°BD. Unde totum cycloidis ſpatium ABC, triplum erit circuli genitoris BD.



[Fig. 3.] [Fig. 4.]

FNEG [Fig. 3] cylindrus cujus baſis circulus FG ∞ BD [Fig. 4] et GE ∞ ∞ FG. Hic ſectus eſt plano EF in duo æqualia. BH [Fig. 4] ∞ GO [Fig. 3]; KL ∞ arc.BK vel GM vel PQ [2]). ſit HR ∞ KL et ſic porro. ſit ergo ▭ RS æquale ſuperficiei curvæ QT [Fig. 3], et ſic in ſingulis. Unde ſpatium totum BRVCD ∞ ſuperficiei curvæ FGE. Sed ſpatium BRVCD ∞ BKXDAL ex conſtructione quaſi. Ergo ſpatium BKXDAL ∞ ſuperf. FGE. hoc eſt duplo ſemicirculo FMG vel BXD. Unde rurſus patet quod ſupra demonſtratum fuit.

Itaque ſpatium BLADXB reductum ad BRVCD nihil aliud eſt quam dimidium involucrum FGE expanſum in ſuperficiem planam.

Et ſi fuerit EΔ ∞ BY, et planum ΔZ parall. plano baſis FG, erit ſemi involucrum ZΔE ∞ ſpatio XΓBKX, vel YVRB.

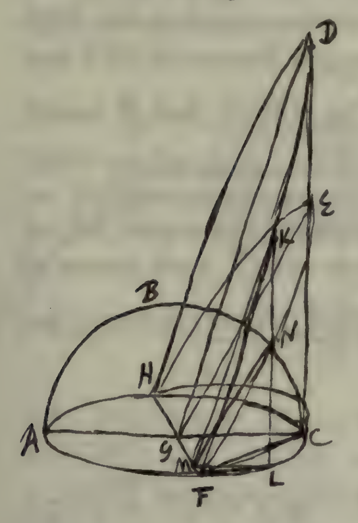
Quod ſi autem EΔ fuerit ∞ $\frac{1}{2}$ EG, ideoque ΓXY per centrum circuli BD.

---

[1]) Dans sa lettre circulaire Pascal avait demandé en premier lieu la quadrature d'un demi-segment quelconque comme BEF (nous employons les notations de la Fig. 2); mais plus loin il avait signalé en particulier les cas où le point E se confond respectivement avec les points A et K. C'est donc par ces cas spéciaux que Huygens commence ses recherches.

erit [ſpat.BLΓXKB ∞] involucrum ZΔE ungulæ cylindricæ; quadratoque æquabitur à latere EΔ vel ΔZ vel BY [3]). Itaque ſpatium BLΓY æquatur quadranti BXY + qu.°BY. Hoc eſt, ſi ΓX (∞ XKB) dividatur bifariam in Ξ, et compleatur □BΞ; hoc æquale erit ſpatio BLΓY.

[Fig. 5.]



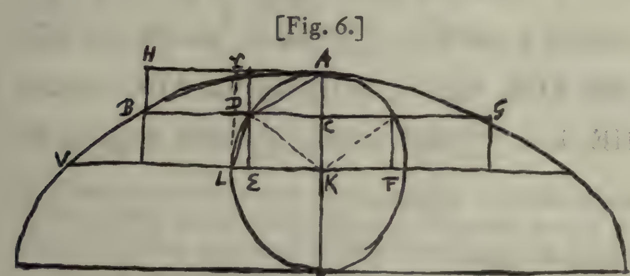
§ 3 [4]).

AHCFB ſemiſphæra.

CD ∞ CBA. FHDC ungula cylindrica ∞ ſemiſphæræ AHCFB. Et ſuperficies ſuperficiei, curva nimirum curvæ [5]). Sit ungula minus alta HEFC. EC ∞ CA. Ergo ſuperf. ungulæ FCDH ad ſuperf. FCEH ut CD ad CE, hoc eſt ut ABC vel AHC ad AC. h. e. ut circulus ad inſcr. quadratum. Sed ſuperf. FCDH ∞ 2 circ.AHCF. Ergo ſuperf. FCEH ∞ 2 qu.inſcr. h. e. ∞ 2 qu.FC.

ſit fruſtum KMLF abſciſſum plano KML parall.° DGC, erit ſuperf. FKL ∞ circ. rad. FL, ut in abſciſſis ſuperficiebus ſphæricis [6]). At ſuperf. FNL ∞ ∞ qu.FL.

[Fig. 6.]



§ 4 [7]).

Sit BC [Fig. 6] baſi parallela. dico ſpatium ABC datum eſſe.

Sit enim ungula TQR

---

[2]) C'est-à-dire l'arc dont PQ [Fig. 3] est la projection sur le plan FNEG.

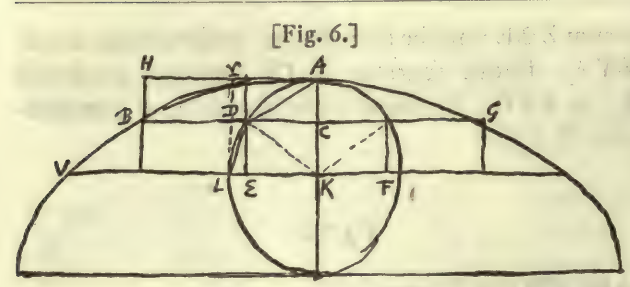
[3]) Voir le § 3. En effet, il est évident que la surface de l'onglet ZΔE est la moitié de celle de de l'onglet FCEH (où EC = AC) de la Fig. 5 dans le cas où ZΔ [Fig. 3.] = GC [Fig. 5].

[4]) Quadrature de la partie FKL [Fig. 5] (où KL représente une génératrice quelconque du cylindre) de la surface courbe d'un onglet cylindrique.

[5]) En effet, lorsqu'on coupe la demi-sphère et l'onglet cylindrique par un grand nombre de plans parallèles au plan DGC il est facile de constater que les volumes des tranches découpées par deux plans consécutifs, respectivement de la demi-sphère et de l'onglet, peuvent être considérés comme égaux l'un à l'autre et qu'il en est de même de leurs surfaces courbes.

[6]) D'après les considérations de la note précédente.

[7]) Ce paragraphe contient la solution du premier des problèmes proposés par Pascal dans sa lettre circulaire de juin 1658; c'est-à-dire la quadrature du demi-segment ABC.


[Fig. 6.]

[Fig. 7]. TQ, QR ∞ KA [Fig. 6]. Itaque involucrum RQM ∞ ſpatio ABVLDA [1]).

Sit QS vel PX ∞ AC. Ergo involucrum OPR ∞ ſpatio ADB [2]). Datum autem eſt OPR involucr. Ergo et ABD ſpatium. Datum eſſe OPR hinc

[Fig 7.]

patet. Datur ſuperficies MON ∞ $\frac{1}{2}$ qu.NM [3]). Sed et ſuperf. ONQP datur quæ non differt a ▭ BE. Ergo ablatis MON et ONQP ab involucro RQM (quod datum eſt ∞ qu.QT vel AK) reliquum quoque involucrum OPR datum erit, hoc eſt ADB ſpatium. Huic addito ſegmento ADC, quod datum eſt (quippe ſector ADK datur ∞ $\frac{1}{2}$ ▭ EH) datum erit totum ſpatium ABC. quod erat oſtend.

Jam ſi AC ∞ CK [Fig. 6]. dico ſpatium ABC eſſe triplum trianguli ACD [4]). Oportet enim auferre à qu.°KA, ▭^{m} EB et $\frac{1}{2}$qu.DL (∞ MN [Fig. 7]) ut fiat reliquum ∞ ſpatio ADB. Item ut fiat ſegmentum ADC, oportet à ſectore ADK hoc eſt $\frac{1}{2}$▭° HE, h. e. ▭° BE auferre △KCD. Ergo ut fiat

---

[1]) Comparez le dernier alinéa du § 2, p. 348—349.

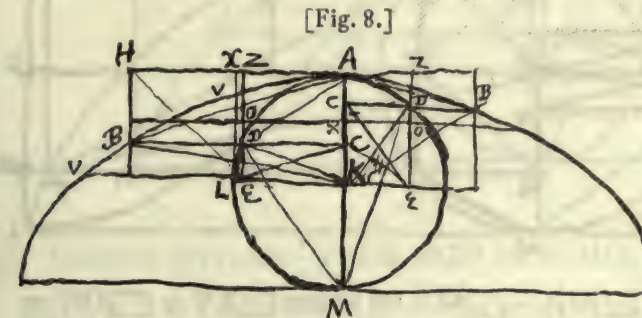
[2]) C'est-à-dire l'espace limité par l'arc de cercle AD, la droite DB et l'arc cycloïdal BA.

[3]) Voyez la dernière ligne du § 3 (p. 349), et considérez que LN (Fig. 5) = 2NO (Fig. 7).

[4]) Ce résultat simple, d'où il suit que dans le cas en question le demi-segment ABC est carrable sans supposer la quadrature du cercle, attira l'attention de Pascal, qui en fait mention dans son „Histoire de la Roulette" (citée quant à l'édition latine qui parut simultanément avec l'édition française dans la note 2, p. 276 de notre T. II) dans les termes suivants: „J'ay trouvé de belles choses dans leurs Lettres, et des manieres fort subtiles de mesurer le plan de la Roulette, et entr'autres dans celles de Mr. Sluze, Chanoine de la Cathedrale de Liège, de Mr. Richi, Romain, de Mr. Huguens, Holandois, qui a le premier produit que la portion de la Roulette retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du costé du sommet, est égale à un espace rectiligne donné. Et j'ay trouvé la mesme chose dans une Lettre de Mr. Wren, Anglois, écrite presque en mesme temps" (voir la p. 202 du T. VIII de l'édition des „Œuvres de Blaise Pascal", citée dans la note 4 de la p. 196). Ajoutons que c'est la seule fois que les recherches de Huygens sur la cycloïde soient mentionnées par Pascal dans ses publications.

otum ſpatium ABC oportet ab additis ſimul qu.°AK et ▭ BE auferre ▭ EB et $\frac{1}{2}$qu.DL, et △KCD. Sed ▭ BE ſe ipſum tollit. Ergo qu.AK — $\frac{1}{2}$qu.DL — — △KCD ∞ ſpatio ABC. Sed $\frac{1}{2}$qu.DL ∞ ▭ EY. Ergo qu.ex AK ſive q.AL [5]) — — ▭ EY — △KCD ∞ ſpatio ABC, hoc eſt ▭ AE — △KCD; hoc eſt 3△ADC ∞ ſpatium ABC. quod erat oſtend.

[Fig. 8.]



Si AC[6]) major quam CK. Erit ſpatium ABC ∞ ∞ trapezio ACEZ + ▭ BO [7]). (dividitur ZE in O bifariam.) h. e. ▭ XB + + △CDM[8]).ſegm.ABV ∞ ∞ △DCM — △CBK [9]).

Si AC minor quam CK [10]). Erit ſpatium ABC ∞ trapezio ACEZ — — ▭BO. h. e. △CDM — ▭XB. ſegm. abſciſſum rectâ AB ∞ △DCM — — △CBK nam ſi ad △DCM — △CBK addatur △ABC fit △DCM — ▭XB quia CK ∞ AC + 2CX.

---

[5]) C'est-à-dire le carré dont A et L sont des sommets opposés.

[6]) Voir la Fig. 8, où il s'agit du point C situé sur la ligne AM au-dessous du point X.

[7]) On obtient ce résultat en appliquant au cas général autant que possible les réductions qui ont conduit au résultat simple déduit dans l'alinéa précédent. À cet effet considérons d'abord la Fig. 6. On trouve en appliquant les considérations exposées dans cet alinéa : demi-segm.BAC = = □KY — ▭EB — $\frac{1}{2}$LD² (= ▭EY) + $\frac{1}{2}$▭HE — △KDC, où l'on peut remplacer □KY — ▭EY par ▭AE. Passant ensuite à la Fig. 8, on a: demi-segm.BAC = ▭AE— — ▭BE + $\frac{1}{2}$▭HE — △KDC, où $\frac{1}{2}$▭HE — ▭BE = ▭BO et ▭AE — △KDC = = trap. ACEZ.

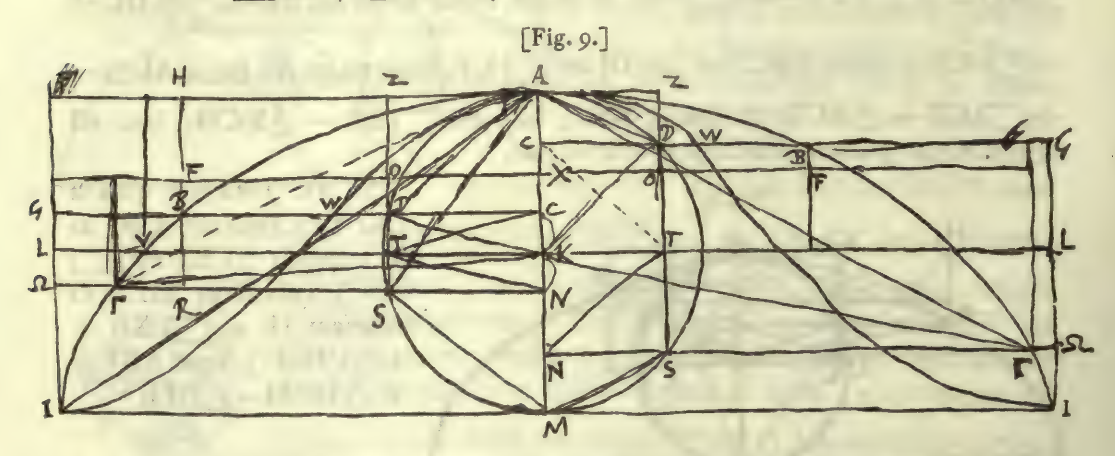
[8]) On a : trap. ACEZ + ▭BO = ▭AO + ▭OC + △KDC + ▭BO, où ▭OC + + ▭BO = ▭XB et ▭AO + △KDC = △KDM + △KDC = △CDM.

[9]) On a segm.ABV = ▭XB + △CDM — △ABC = △CDM — [△ABC — ▭XB], où △ABC — — ▭XB = $\frac{1}{2}$BC (AC — 2XC) = $\frac{1}{2}$BC (AX — XC) = $\frac{1}{2}$BC(XK — XC) = △CBK.

[10]) Voir le point C qui se trouve entre les points A et X et la partie de la Fig. 8 à droite de l'axe AM.

Si AN [1]) major AK [Fig. 9.] Erit ſpatium AΓN ∞ trapez. AZTN + □ OΓ. h. e. ∞ □XΓ + △ADC (idem enim eſt ſive □°OΓ addatur trapez.

[Fig. 9.]



AZTN, ſive addatur □AO + □ON − △NTS. eſt autem □OΓ + □ON ∞ ∞ □XΓ. Et □AO − △NTS ∞ △ADC vel NSM, nam □AO ∞ △ADK quia AK ∞ 2AX. ſed △NTS ∞ △CDK. Ergo □AO − △NTS ∞ △ADC vel NSM) h. e. ∞ △AΓN + △KΓN [2]) + △NSM. Ergo ſegmentum AΓB ∞ ∞ △KΓN + △NSM.

AWIM [3]) — AWC ∞ WIMC
ex AWIM ([∞] □KI [4])) + □CL ∞ □ CI

□CL + AWC ∞ GWI

a[dde] { □CL + □AT — □TB ∞ GWI [5])
{ □ XL — □TF + △TCD ∞ ASN [6]) ∞ DCM.

□ XΩ — □OR + □AT + △TCD h. e. □OΓ + + trap. AZTN ∞ ſpatio AΓN [7]) nam ΓS ∞ BG + DC.

---

[1]) Ce qui suit se rapporte également aux deux points N qu'on trouve sur l'axe AM.

[2]) On a □XΓ = △AΓN + △KΓN, puisque 2XN = 2XK + 2KN = AK + 2KN = AN + KN.

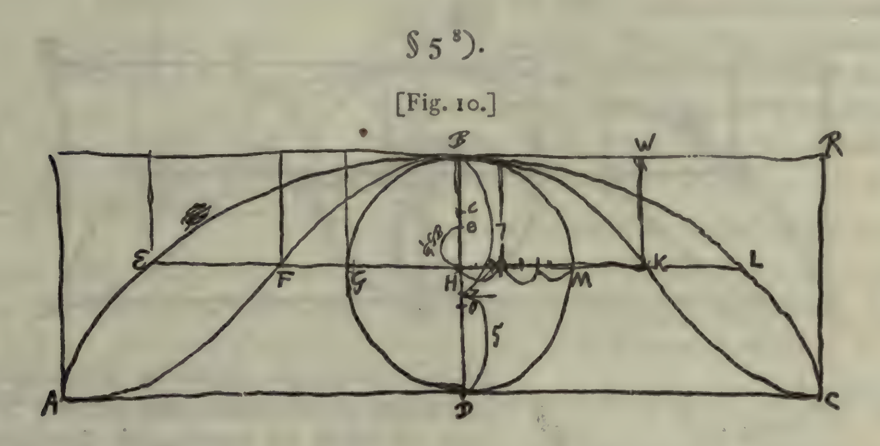
[3]) Huygens va déduire encore quelques relations entre les aires de diverses parties de la Fig. 9. Ajoutons que les raisonnements géométriques ne sont pas partout faciles à suivre, mais que nous avons vérifié analytiquement l'exactitude des résultats obtenus.

[4]) Voir le deuxième alinéa du § 2, p. 348. D'après cet alinéa l'espace BRVCD de la Fig. 4, qui est identique avec l'espace AWIM de la présente figure, est égal à l'aire du cercle générateur, laquelle est représentée par le rectangle KI.

[5]) On a d'après ce qui précède GWI = □CL + AWC; mais AWC est égal à l'espace limité

§ 5 [8]).

[Fig. 10.]



Centrum gravitatis $\frac{1}{2}$ circuli BGD eſt in HG. Si itaque centrum grav. ſpatij BGDAEB ſive BFADB [9]) inventum fuerit altitudine tenus. dabitur totius ſpatij

---

par l'arc de cercle AD, la droite BD et l'arc cycloïdal BA. Or, cet espace correspond à l'espace ADB de la Fig. 6, p. 350, qui, d'après le deuxième alinéa de la p. 350, fut trouvé égal à □KY — ▭EB — $\frac{1}{2}$ DL² = □KY — ▭EB — ▭EY = ▭AE — ▭EB; c'est-à-dire, en retournant à la Fig. 9, à ▭AT — ▭TB.

[6]) ASN représente ici le demi-segment de cercle ADSNA.

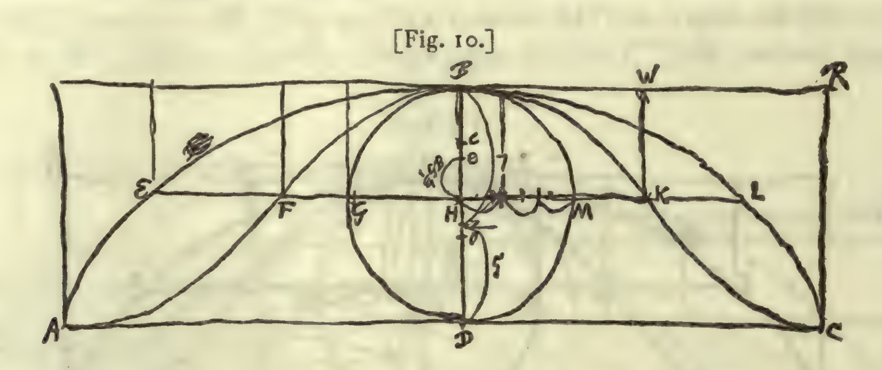
[7]) Comparez les premières lignes de la p. 352.

[8]) Outre la détermination de l'aire d'un demi-segment quelconque BEF de la cycloïde (voir la Fig. 2, p. 348) Pascal avait demandé dans sa lettre circulaire de juin 1658 (voir la note 4 de de la p. 347) la détermination du centre de gravité d'un tel demi-segment, la cubature des solides engendrés par sa révolution autour des axes EF et BF, et la situation des centres de gravité de ces solides; comme aussi des solides qu'on obtient en les coupant en deux parties égales par un plan passant par leur axe. Huygens qui considérait ces problèmes pour la plupart comme très difficiles (voir sa lettre à Boulliau p. 200 du T. II) ne s'est occupé en premier lieu que de ceux qui lui semblaient les plus abordables. Quant au centre de gravité du demi-segment il ne cherche qu'à déterminer sa distance à la base EF; ce qui est identique à la détermination du centre de gravité du segment entier. Ce n'est que plusieurs mois plus tard (voir la Cinquième Partie, p. 376, et surtout la note 1 de cette page) qu'il a repris, après avoir pris connaissance des méthodes de Pascal, le problème de la situation du centre de gravité du demi-segment, en déterminant cette fois la distance de ce centre à l'axe BD de la cycloïde.

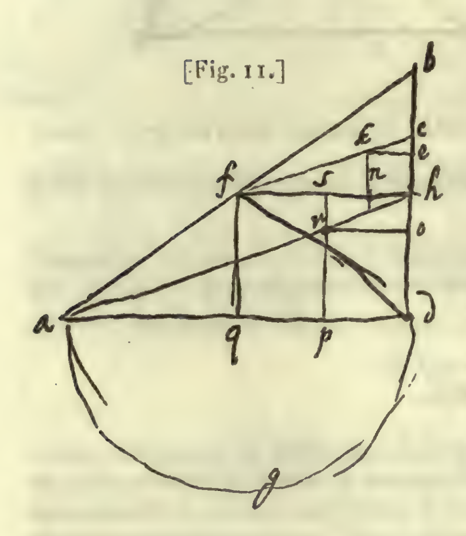
Dans le présent paragraphe Huygens commence ses recherches par les deux cas spéciaux signalés par Pascal (voir la note 1 de la p. 348); c'est-à-dire il détermine les centres de gravité des espaces EBLE et ABCA de la Fig. 10. Ensuite il en déduit aisément les cubatures des solides engendrés par leur révolution, respectivement autour des axes EL et AC.

[9]) Voir sur la construction de la courbe AFBKC le deuxième alinéa de la p. 348. La partie BKC de la présente figure correspond à la partie BRVC de la Fig. 4, pour laquelle partout RH = = KL = arc. BK.

[Fig. 10.]



[Fig. 11.]



BEAD centr. gr. altitudine tenus. quia et ſpatiorum ad ſe mutuo ratio data eſt [1]). ſpatium BFADB eſt involucrum ſemicylindri *bad* [Fig. 11] [2]). Ergo hujus centr. gr. altitudine tenus quærendum eſt. ſuperficiei cylindricæ *bfd* centrum gr. eſt in *fh* [3]) : puta *n* [4]), quod poſtea invenietur. ſuperficiei cyl. *afd* centr. gr. eſt in *fq*. Sicut involucrum *abd* ad *fbd* ita ſit *nf* ad *fs*. et *sp* parall. *bd*. Ergo totius involucri *abd* centr. gr. erit in *sp* [5]). Sed et in *ah*. Ergo in interſectione *r*. Sit *ro* parall. *ad*. Ergo ſicut *bd* dividitur in *o*, ita centrum gr. ſpatij AFBKC [Fig. 10] dividet diametrum BD.

Ad inveniendum vero centr. gr. ſupert.

---

[1]) Comparez le premier alinéa du § 2, p. 348.

[2]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 348.

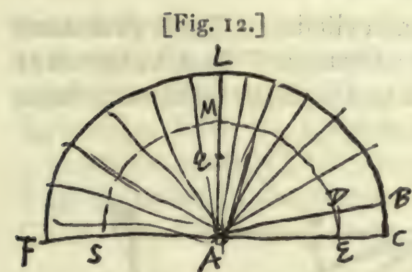
[3]) Dès ici Huygens considère les surfaces entières des deux côtés du plan *abd* de la Fig. 11.

[4]) Remarquons que le point *n*, centre de gravité de la surface cylindrique *bfd*, se trouve sur la ligne *fh* quoique la lettre *n* soit placée à une certaine distance de cette ligne.

[5]) La ligne *fh* est considérée comme le bras d'un levier qui porte en *f* le poids de la surface *afd* et en *n* celui de la surface *bfd*, on peut donc remplacer ces poids par celui de la surface entière *abd*, suspendu en *s*, pourvu que $fs \times$ surf. $abd = fn \times$ surf. *fbd*.

[6]) Évidemment les centres de gravité des différentes parties de la surface cylindrique *fbh*, découpées par des plans perpendiculaires sur le plan de projection *abd* et passant par *f*, se trouvent sur une même ligne verticale qui passe par *n*. Il suffit donc, pour connaître cette ligne, de déterminer le centre de gravité d'une seule de ces parties, pour laquelle Huygens choisit celle qui contient le demi-cercle dont *fh* est la projection, parce qu'elle peut être considérée comme ne différant pas appréciablement d'un secteur sphérique.

[Fig. 12.]



cyl.[ae] *bfd* vel *bfh*, comparo hanc ſuperficiei ſphæricæ minimæ ABC [Fig. 12] nam ſicut DE, quæ per centrum gr. hujus ſecat AC, ita neceſſario punctum *n* dividet *fh*[6]). ſemiſphæræ ſuperficiei FLC centr. grav. Q dividit AL bifariam, ut oſtendetur poſtea[7]). Sit ut FC ad FLC ita AQ ad AM. Erit Q centr. grav. $\frac{1}{2}$ circumf. SME. Sed et Q centrum gravit. eſt ſuperf. ſphæricæ FLC. Ergo ſingularum partium ſuperficiei ut ABC centrum gravit. debet eſſe in circumf.[a] SME. Sed AQ ad AM ut FC ad FLC, ideoque AL ad AM ut 2FC ad FLC, h. e. ut AL ad $\frac{1}{4}$ FLC. Ergo AM vel AE ∞ $\frac{1}{4}$FLC. Unde et *fn* [Fig. 11] ∞ $\frac{1}{4}$*agd*[8]). Sit *fc* quæ bifariam ſecet *bh*; *nk* parall. *hb*; *ke* parall. *fh*. Quia ergo *ch* ∞ $\frac{1}{2}$*bh* vel $\frac{1}{2}$*hf*, erit *kn*, ſive *eh* ∞ $\frac{1}{2}$*nf*. h. e. ∞ $\frac{1}{8}$*agd*. Itaque ſumptâ in ſuper[iore] fig. [Fig. 10] H*e* ∞ $\frac{1}{4}$arc. BG, erit *e* centr. gr. ſpatij FBK. ſive duorum BGE. BML[9]). Porro quia ut involucr.*abd* [Fig. 11] ad *fbd* h. e. ut *agd* ad *ad*[10]) ita *nf* ad *fs*; eſtque *nf* ∞ $\frac{1}{4}$ *agd*. Erit et *fs* ∞ $\frac{1}{4}$*ad* ſive ∞ $\frac{1}{2}$*fh*. Unde et *hr* ∞ $\frac{1}{4}$*ha*. Ergo et *ho* ∞ ∞ $\frac{1}{4}$*hd*. Ideoque *bo* ad *od* ut 5 ad 3. Ergo in ſuper. fig. [Fig. 10] ſumpta B*o* partium 5 qualium BD eſt 8, erit *o* centr. gr. ſpatij AFBKC. ſive utriuſque BEADGB, BLCDMB. hæc vero æquantur duplo circ.° BD[11]); Ergo diviſa H*o* in *z* ut ſit H*z* dupla *zo*, erit *z* centrum grav. ſpatij cycloidis totiu ABC. D*o* eſt $\frac{3}{8}$ ſive $\frac{9}{24}$BD et *oz* ∞ $\frac{1}{24}$ BD Ergo D*z* ∞ $\frac{10}{24}$ ſive $\frac{5}{12}$ BD[12]).

---

[7]) Huygens n'a pas fait suivre la démonstration de cette proposition bien connue.

[8]) Voir le demi-cercle en bas de la Fig. 11.

[9]) Puisqu'on connaît aussi l'aire de ces deux espaces (voir les derniers deux alinéa's du § 2, p. 348—349) et de même le centre de gravité et l'aire du demi-cercle GBM le problème de trouver le centre de gravité du segment EBL peut être considéré comme résolu.

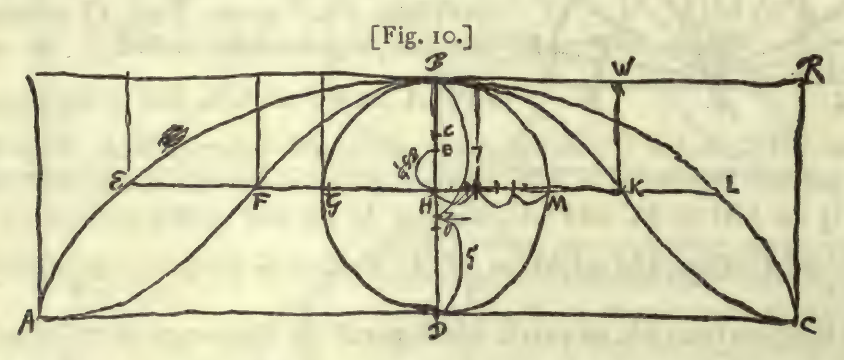
[10]) On a évidemment invol. *abd* = *bd* × arc. *agd* = 2*bh* × arc. *agd*, et l'on trouve *fbd* = = 2*fbh* = 2ZΔE (Fig. 3) = 4EΔ² (voir le dernier alinéa du § 2, p. 348—349) = 4*bh*² (Fig. 11) = 2*bh* × *ad*.

[11]) Comparez le premier alinéa du § 2, p. 348.

[12]) Comparez, pour une autre détermination du centre de gravité *z*, l'Appendice à la Pièce N°. XV, p 406.

Ratio ſolidi a Cycloide facti circa axem AC ad cylindr. à □AR circa axem eundem componitur ex ratione ſpatij cycloidis ad ſpatium □^{i} AR, hoc eſt ex ratione 3 ad 4; et ex ratione D*z* ad DH, quæ eſt 5 ad 6. Ergo ſolidum cycloidis ad dictum cylindrum erit ut 15 ad 24 hoc eſt ut 5 ad 8.

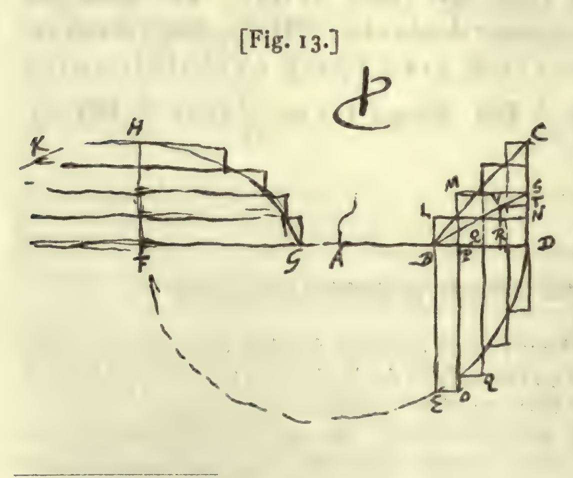
[Fig. 10.]



Ratio ſolidi à ſpatio FBK (ungulæ nimirum involucro) circa FK axem ad cylindrum à □FW, componitur ex ratione ſpatij FBK ad □FW, hoc eſt ex ratione HG ad FH (nam ſpatium FBK ∞ 2 qu.HG [1])), et ex ratione *e*H ad *c*H, hoc eſt ex ratione $\frac{1}{4}$[arc.] GB vel $\frac{1}{4}$FH ad $\frac{1}{2}$HG h. e. FH ad 2HG. Ergo eadem eſt quæ HG ad 2HG, hoc eſt quæ 1 ad 2. Eſt autem ſolidum ab FBK æquale ei quod à duobus ſpatijs BGE, BML. Ergo ſi ſolido ab FBK hoc eſt cylindro à □°FB addatur ſphæra BD, vel cylindrus ipſi æqualis, oritur ſolidum ab EBL circa axem EL.

§ 6 [2]).

[Fig. 13.]

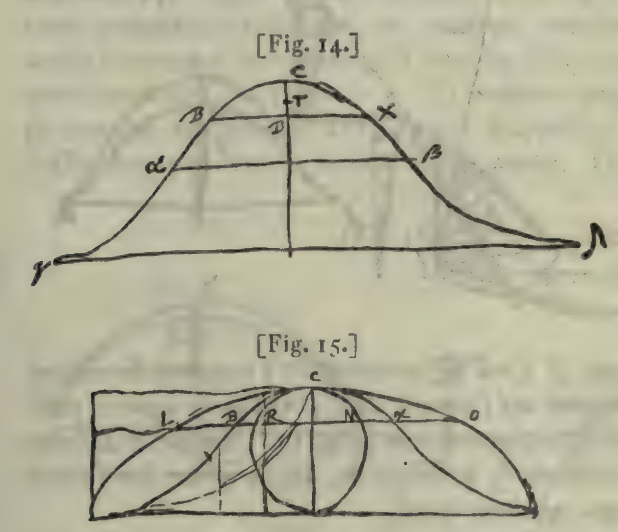


BDC eſt fruſtum cylindri cujus cylindri baſis eſt circulus FED. fruſti baſis eſt ſegmentum EBD vel potius hujus duplum. Oporteat invenire centrum gravitatis involucri BDC.

ut DE arcus ad EB ita eſt AD radius ad AQ [3]) ut Q ſit centrum gr. arcus DE (dupli ſcilicet), ideoque et involucri LD. Quare ſi □BO ſuſpendatur ex F, illud ſuſpenſa libra ex A, æquiponderabit invo-

[1]) Voir les derniers deux alinéa's du § 2, p. 348—349.
[2]) Après avoir trouvé le centre de gravité d'un segment cycloïdal dans les deux cas spéciaux indiqués par Pascal (voir la note 1 de la p. 348), Huygens découvre une méthode plus géné-

lucro LD ut positum est [4]). Similiter ▭PQ [5]) ex F suspensum æquiponderabit (ex A) involucro MN, atque ita totum segmentum BDE ex F suspensum æquiponderabit involucro BCD et duplum duplo. Sicut igitur involucrum BCD ad segmentum BDE ita si fiat FA ad AR. Erit R centr gr. vel certè sub centro grav.is involucri BDC. Est autem et in BS quæ bisar. secat DC idem gr. centrum. Ergo datum erit in intersectione V. Et facta VT parall.a BD dabitur quoque ratio CT ad TD.



Si igitur involucrum BDC exporrectum fuerit in plano [Fig. 14], faciens partem quamlibet involucri semicylindrici ut BCX, ejus centrum gr. in diametro CD inveniri poterit. Et hæc methodus brevior meliorque est quam qua paulo ante totius involucri centrum gr. ut et involucri ungulæ, quod est $\alpha C \beta$, quærebamus [6]).

Cumque centr. gr. involucri BCX hoc est duorum spatiorum CRL, CNO [Fig. 15] inveniri possit, itemque centr. gr. segmenti circularis RCN. datum igitur est partis LCO centr. gr. quæ qualitercunque lineâ LO basi parallela à cycloide abscinditur. Sed et dimensio data est partis ejusmodi per antecedentia [7]). Ergo et solidum quod ab ea efficitur circa axem LO conversione factâ [8]).

---

rale (et en même temps plus facile) qui peut servir à déterminer le centre de gravité du segment découpé par une droite quelconque parallèle à la base de la cycloïde. À cet effet il commence par chercher le centre de gravité de la surface courbe d'un onglet cylindrique BDC [Fig. 13] ($\angle CBD = 45°$) où la distance AB peut être choisie à volonté.

[3]) Voir le point Q sur la ligne BD.

[4]) On a arc. DE × AQ = EB × AD = EB × AF, c'est-à-dire: arc. DE × LB (= surf. cyl. BN) × AQ = EB × BP (= ▭BO) × AF; d'où il suit, en effet, que le rectangle BO suspendu en F fera équilibre avec la surface cylindrique BN suspendue en Q sur un levier dont le point d'appui est en A.

[5]) Il y a dans la figure double emploi de la lettre Q. Cette fois il s'agit de celle qui se trouve en bas près des points E et O.

[6]) Voir le § 5, p. 353—355.

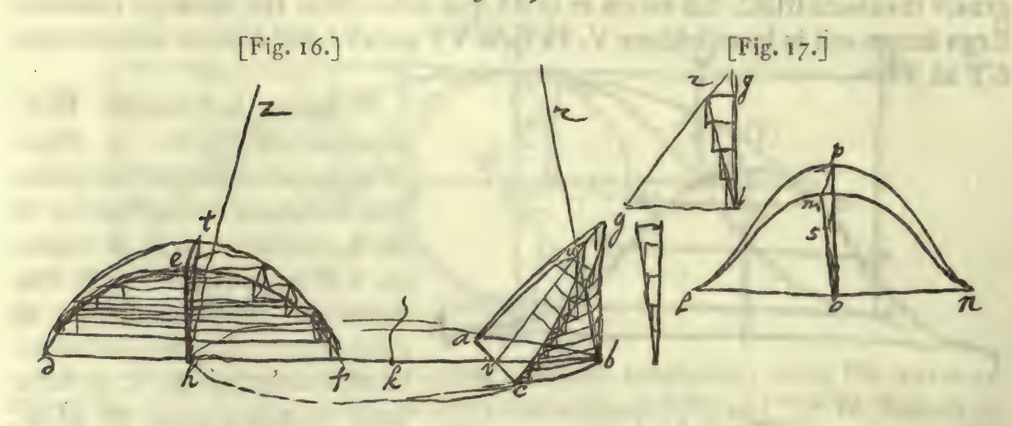
[7]) Voir au § 4 les p. 349—350.

[8]) Remarquons que Huygens s'est contenté de cette solution potentielle sans plus s'occuper des calculs qu'elle exigerait.

[DEUXIÈME PARTIE [1])].

§ 1 [2]).

[Fig. 16.] [Fig. 17.]



Iisdem positis quæ in propositione ☿ (hoc signo notata [3])) æquiponderat, (ex *k* suspensa librâ [Fig. 16]) segmentum *def* (æquale *abc*), involucro *agbc* ut positum est [4]). Involucrum hoc expansum in plano sit *lmn* [Fig. 17], nempe *ln* ∞ arcus *abc*. superque ea basi parallelopipedum [5]) intelligatur, idque plano *lpn* sectum esto, ut fiat ungula seu cuneus *lmnp*, minimus quasi.

---

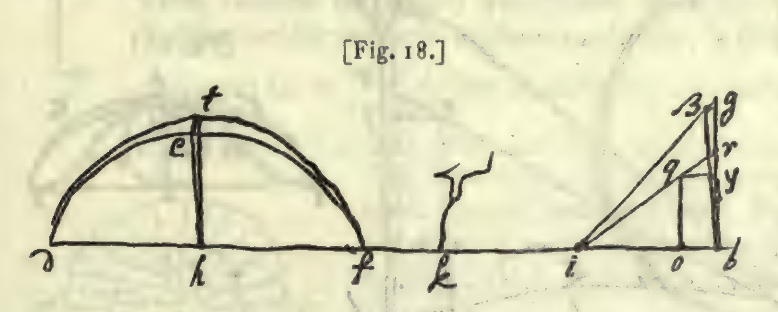
[1]) Dans cette Partie, composée quelques mois plus tard que la Première Partie, Huygens s'occupe de nouveau d'un des problèmes proposés par Pascal (voir la note 8 de la p. 353); c'est-à-dire de la détermination du centre de gravité du solide engendré par une demi-révolution du segment cycloïdal LCOL (voir la Fig. 15) autour de la corde LO.

[2]) Dans ce paragraphe Huygens cherche une solution potentielle (c'est-à-dire sans exécution des calculs indiqués) du problème dans le cas le plus général où LCOL (Fig. 15) est un segment quelconque dont la corde est parallèle à la base de la cycloïde.

Afin d'expliquer la manière dont Huygens attaque ce problème nous faisons remarquer que pour trouver le centre de gravité du solide en question, il suffit de connaître la situation du centre de gravité d'un secteur infinitésimal engendré par la rotation du segment LCOL autour de l'axe LO par un angle infiniment petit. En effet les centres de gravité de tous les secteurs infinitésimaux qui composent le solide se trouvent alors sur un demi-cercle dont on peut déterminer le centre de gravité en supposant que sa densité soit partout égale. Or, Huygens applique ce procédé en premier lieu à la figure LCONCRL (Fig. 15), qu'on peut remplacer par le segment BCXB qui est identique avec le segment *lmnl* de la Fig. 17. Pour déterminer le centre de gravité du secteur infinitésimal engendré par le segment entier LCO [Fig. 15] le même procédé devrait être appliqué ensuite au segment de cercle RCN. On n'en trouve rien dans le présent manuscrit, ni dans les autres manuscrits de Huygens. Toutefois il nous semble probable que ce travail a été exécuté par Huygens. En tout cas il l'a achevé pour le cas spécial discuté dans la note 6 de la p. 361 qui suit.

Oportet invenire quomodo hujus centrum gr. *s* dividat diametrum *om*. ſuper baſi circulo *abch*, conus intelligatur maximus cujus latera *hz*, *bz*. hujus coni pars quam cum ungula *acbg* communem habet ſi ab ungula auferri intelligatur, ſupererit ſolidum quoddam cavum minimum; quod ſolidum (ſi fuerit angulus *gbz* ∞ *pom* in cuneo) nihil aliud erit quam ipſe ille cuneus inflexus veluti. Sit etiam ſuper ſegmentum *def* extructa ungula *defht*, ut ſit angulus *eht* ∞ *mop* vel *gbz*. tum inſcriptis □is æqualis altitudinis in ſegmento *def* ſuper ijs parallelopipeda intra ungulam excitentur, et totidem annularia ſolida intra ſolidum cavum *aucbg* formentur. horum ſingula ſingulis dictis parallelopipedis æquiponderabunt, quia involucra (ex propoſ. ☿ [3])) baſibus parallelopipedorum æquiponderant et utraque in eandem altitudinem ducuntur. Ergo apparet ungulam ipſam *defht* æquiponderare ſolido cavo *aucbg*. Quare ſi fiat ut ſolidum cavum *aucbg* ad ungulam *defht* ita *kh* radius ad *ko* [Fig. 18] erit *o* ſub centro gr. dicti ſolidi cavi. Sed quænam eſt ratio ſolidi cavi, ſive cunei *lmnop* [Fig. 17] ad ungulam *defht*? Eam dico datam eſſe. Eſt enim eadem quæ ſolidi ex converſione involucri expanſi *lmn* circa *ln* [Fig. 17], ad ſolidum ex converſione ſegmenti *def* circa *df*. Illud ſolidum ex ijs quæ ex Prop. ☿ deduximus datum eſt [6]). alterum ſimiliter datum eſt quoniam ſegmentum *def* magnitudine datur datâ cycloide [7]), itemque ſegmenti centr. grav. Ergo quum utraque ſolida ſint data etiam ratio ad ſe invicem data erit. quare itaque et ratio *kh* ad *ko* [Fig. 18]. ducta ergo *oq* parall. *bg* in ea erit centr. gr. ſolidi cavi *aucbg* [Fig. 16], ſed et in recta *ir* [Fig. 18], quæ ita dividit *bg* ut *br* ſit dupla *rg*. quia videlicet ex triangularibus ſolidis, quale *gbβ*, totum cavum ſolidum *aucbg*

[Fig. 18.]



---

3) Voir le § 6 de la Première Partie, p. 356, où l'on retrouve dans la Fig. 13 le même signe de renvoi.

4) Comparez le deuxième alinéa du § 6 cité dans la note précédente.

5) Lisez: „cylindrum".

6) Puisqu'on connaît, d'après le § 4 (p. 349—350) de la Première Partie, l'aire du segment *lpnl* (Fig. 17) dont la moitié est égale à la différence des aires cycloïdales et circulaires ABC et ADC de la Fig. 6 (p. 350), et de même, d'après le § 6 (p. 356—357) de cette Partie, la situation de son centre de gravité T (Fig. 14).

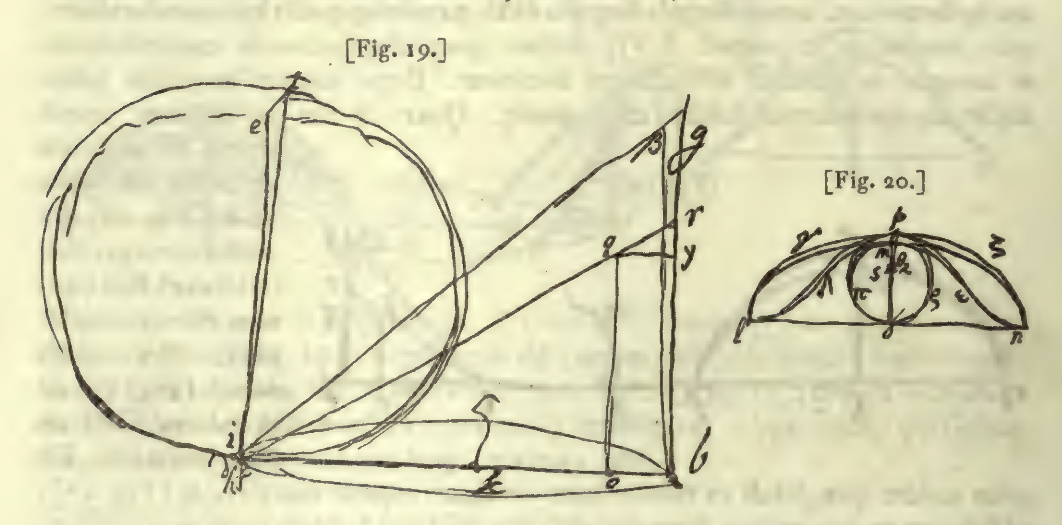
7) Huygens veut dire que, si la cycloïde est considérée comme donnée, on connaît aussi la rectification d'un arc de cercle et, par conséquent, la quadrature d'un segment de cercle.

[Fig. 16] componi intelligi poteſt. quorum ſingulorum centra gr. in plano per *ri* [Fig. 18] ducto [1]). Ergo centrum ipſius grav. datum erit in interſectione *q*. Sit *qy* parall. *ib*. Ergo ſicut *y* ſecat *gb* ſimiliter *s* [Fig. 17] ſecabit cunei diametrum *om*.

§ 2 [2]).

Examinemus caſum illum cum *lmn* [3]) totius ſemicylindri eſt involucrum.

[Fig. 19.]



[Fig. 20.]

hic ratio ſolidi quod ex involucro *lmn* [Fig. 20], ad ſolidum ex circulo *mo* circa *ln*, ſive ſolidum ex circulo *de* [Fig. 19] circa *hb*, ea eſt quæ 3 ad 2 ut ex ſuperioribus facile colligitur [4]). Ergo ea quoque ratio erit cunei *lmnop*, ſive ſolidi cavi *ibgβ* ad ungulam *detfh*. Ergo etiam *kh* ad *ko* ut 3 ad 2. Ergo *hb* ad *bo* item *hr* ad *rq*, item *br* ad *ry* ut 6 ad 1. ſed *br* erat ad *rg* ut 6 ad 3. Ergo erit *gy* ad *yb* ut 4 ad 5. Ideoque et *ms* [Fig. 20] ad *so* ut 4 ad 5: et *s* centr. gr. cunei *lpnm* [5]).

---

[1]) C'est-à-dire en coupant le solide par des plans qui passent par l'axe du cône *hzb* (Fig. 16).

[2]) Dans ce paragraphe Huygens examine le cas spécial où la cycloïde entière *lγmζn* (Fig. 20) fait une demi-révolution autour de sa base *ln*.

[3]) Il s'agit de la surface plane *lδmεn* (Fig. 20), qu'on obtient par le développement de la surface courbe du cylindre *ibg* de la Fig. 19.

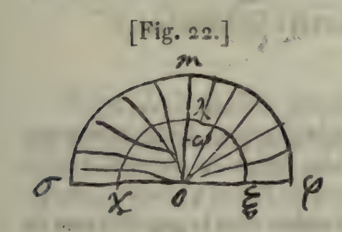
[4]) Posant *r* pour le rayon du cercle générateur de la cycloïde, on trouve, d'après le premier alinéa de la p. 356, $5\pi^2 r^3$ pour le volume du solide engendré par la révolution de la cycloïde *lγmζn* autour de sa base. Le théorème de Guldin nous donne $2\pi^2 r^3$ pour le volume du solide engendré par le cercle *oπmϱo*. Le volume engendré par l'aire *olγmπoϱmζno* est donc égal à $3\pi^2 r^3$; mais il ne diffère pas du volume engendré par l'aire *lδmεnl*. Il en résulte que ce dernier

Sit nunc ſuper baſi tota cycloide *lpn* cuneus conſtitutus *lγpnom*. Ejus cunei duæ partes *lγpδ*, *pεnζ* habent punctum ſub centro gr. in *mo* quam ita dividit quemadmodum ungulæ *oπmρp* centro gr.is ſuppoſitum. cum nihil aliud ſint quam hæc ungula diducta. Ergo id centr. gr. θ [Fig. 20 et 21] ita dividit rectam *om* ut pars verſus *m* ſit 3, reliqua 5[6]). ex $ms \infty \frac{4}{9}[mo]$ aufer $m\theta \infty \frac{3}{8}[mo]$, relinquitur $\theta s \infty \frac{13}{72}$ $\left(\frac{5}{72}\right)$[7]) *mo*. hæc θs dividatur in λ [Fig. 21] ut ſit $\theta\lambda$ dupla[8]) (ſeſquialt.) ipſius λs, ſit $\lambda s \infty \frac{13}{216}\left(\frac{1}{36}\right)[mo]$ cui additâ $so \infty \frac{5}{9}[mo]$ ſit $\lambda o \infty \frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)$ totius *mo*. λ autem eſt centr. gr. cunei *lγpζnom* [Fig. 20].

[Fig. 21].

Sit ſolidum ex cycloide ortum circa axem *ln* [Fig. 20] eoque per axem eundem *ln* ſecto[9]) quærendum ſit hujus medietatis centr. gr. Sectio quæ bifariam hanc medietatem dividit, ſit circulus *σmφ* [Fig. 22] et ſumpta $o\lambda \infty \frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)om$ ſit deſignata circumferentia $\chi\lambda\xi$. in hac quia centr. gr. ſunt omnium cuneorum cycloidalium dicti ſemiſolidi; erit proinde periferiæ $\chi\lambda\xi$ centr. gr. idem quoque ſemiſolidi dicti. Ergo ut ſemiperiferia circuli ad diametrum, hoc eſt ut dimidia baſis cycloidis *lo* [Fig. 23] ad ejuſdem altitudinem *om* ita ſit λo nempe $\frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)om$ ad $o\omega$, eritque ω centr. gr. ſemiſolidi

[Fig. 22.]



volume est à celui engendré par le cercle *oπmρo* autour de *ln*, ou du cercle *de* autour de *db*, comme 3 à 2.

5) Il s'agit du secteur infinitésimal décrit par l'aire *lδmsnl*.

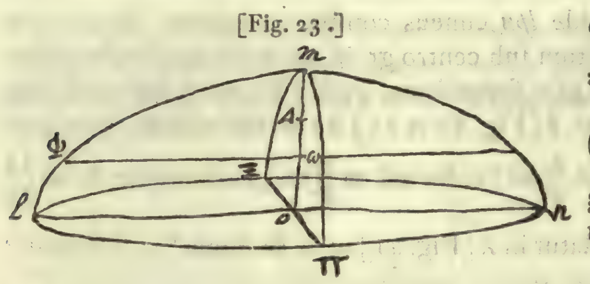
6) En effet, à l'aide de l'analyse moderne, il est facile de constater que le centre de gravité θ du secteur infinitésimal engendré par le cercle *oπmρo* doit partager le segment *om* dans le rapport de 3 à 5, indiqué par Huygens. Mais comment celui-ci a-t-il obtenu ce résultat? Il y a raison de supposer qu'il était en possession d'une méthode, que nous ne connaissons pas, pour déterminer le centre de gravité du secteur infinitésimal engendré par un segment de cercle quelconque tournant autour de sa corde et qu'il a appliqué cette méthode au calcul du cas spécial en question; comparez la note 2 de la p. 358.

7) Huygens commet ici la première des erreurs de calcul qu'il signale dans la dernière phrase de ce paragraphe. Plus tard, ayant pris connaissance du résultat de Pascal, il a corrigé ces erreurs. Or, nous donnons dans le texte la leçon primitive, sauf à ajouter, comme ici, entre parenthèses, les corrections que Huygens y a apportées plus tard.

8) C'est la deuxième erreur. Évidemment la distance θs (Fig. 21) doit être partagée dans la raison réciproque des secteurs infinitésimaux dont θ et *s* représentent les centres de gravité. Or, le rapport de ces secteurs, qui est le même que celui des solides de révolution complets, a été trouvé de 2 à 3; voir la note 4 de la page précédente.

9) C'est-à-dire par un plan passant par cet axe; voir le plan *lΞ nΠ* de la Fig. 23, p. 362.

[Fig. 23.]



dicti. five ut *lo* ad *om* ita fit hæc ad aliam $o\Delta$, et fumatur $o\omega \infty \frac{133}{216}$ [1]) $\left(\frac{7}{12}\right)$ ipfius $o\Delta$. Eritque ω centr. gr. ut prius folidi cycloidalis dimidij.

Itaque ducta $\omega\Phi$ parallela *ol*, in ipfa erit centrum gr. medietatis $l\Xi m\pi$, cujus centr. gravitatis Gallus poftulat [2]).

(Hoc [3]) eft fi fiat ut tota *ln*, five circumferentia genitoris ad ejus diam. *mo* ita hæc ad aliam; hujus $\frac{7}{6}$ æquantur ipfi $o\omega$. Hoc eft ut 6 circumf.ª ad 7 diam. ita erit diameter *mo* ad $o\omega$.)

(duplicem calculi errorem commiferam [4]). methodus rectè fe habebat.)

---

[1]) Ce résultat erroné fut communiqué à Boulliau dans une lettre de Huygens du 19 septembre 1658 (voir la p. 220 du T. II) et de même à Carcavy dans une lettre du 16 janvier 1659 (p. 315 du T. II). En ce dernier mois Huygens reçut de la part de Pascal quelques „auantcoureurs" du „traitté de la Roulette ou L'anonime" (Pascal lui-même sous le pseudonyme de Dettonville) „a resolu les problemes quyl auoit luy mesmes proposez" (voir la p. 310 du T. II). Ces avant-coureurs contenaient entre autres le début de la „Lettre de monsieur Dettonville à monsieur de Carcavy cy-devant conseiller du Roy en son Grand-Conseil" dans laquelle on lit „Le Centre de gravité du demi-solide de la demi Roulette, tournée à l'entour de la base, est distant de la base d'une droitte qui est au Diametre du Cercle Generateur comme sept fois le Diametre à six fois la circonference" (p. 335 du T. VIII de l'édition des „Œuvres de Blaise Pascal", citée dans la note 4 de la p. 196). C'est cette communication qui incita Huygens à réviser son calcul et à y apporter les corrections et additions que nous avons mises entre parenthèses, de sorte qu'il put écrire à Pascal en février 1659 (p. 340—341 du T. II) „Mesme dans ce que je creus avoir trouvè j'ay commis une erreur insigne, de la quelle je ne me suis apperceu que depuis avoir veu que mon calcul ne respondoit pas au vostre. Je parle de la proportion que vous avez trouuè de 7 fois le diametre à 6 fois la circonference, qui est vraye, et non pas la miene, que je croy, que vous aurez vu dans la lettre que j'ay envoyée à Monsieur de Carcavy". On peut encore consulter à ce sujet les pp. 345 et 348 du T. II.

[2]) Dans sa seconde lettre circulaire „Ad problemata de Cycloide Addimentum" (p. 196—197 du T. II), parvenue à Huygens en juillet 1658 par l'intermédiaire de Boulliau (voir la p. 196 du T. II), Pascal avait insisté particulièrement sur la détermination du centre de gravité du solide $l\Xi m\pi$. C'était le seul problème dont il exigeât le calcul complet; mais on voit que Huygens n'avait pas réussi à en trouver la solution, puisqu'il manqua la détermination de la distance du centre de gravité en question au plan $\Xi m\pi$.

[3]) Les phrases entre parenthèses furent ajoutées pius tard en janvier ou février 1659.

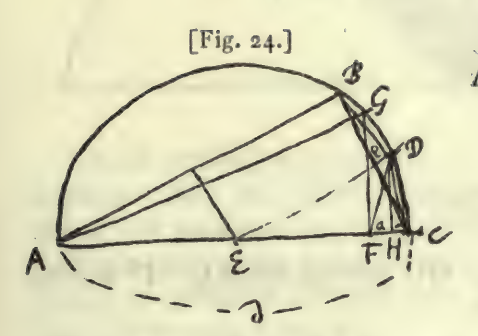
[4]) Consultez les notes 7 et 8 de la p. 361.

[Troisième Partie [5]).]

§ 1 [6]).

1659. 11 Jan.

[Lemma].



[Fig. 24.]

[AC ∞ d]; BD ∞ DC; DH perpend. AC; HC ∞ HF [∞ a].

$\sqrt{ad - aa}$ ∞ HD; $\frac{1}{2}d - a$ ∞ EQ [7])

$$\frac{2}{d - 2a} [\infty] \mathrm{AB}$$

Sed et AF ∞ $d - 2a$; Ergo AB ∞ AF.

Sed AG media prop. inter FA et AC. Ergo AG media prop. inter AB, AC. Ergo □BA, AC ∞ qu.AG five ∞ ∞ □FAC hoc eft ∞ qu.AC — 2qu.CD.

Curvæ pars AS [Fig. 25] ad AN rectam ut quadr.AC — 2qu.CD, hoc eft

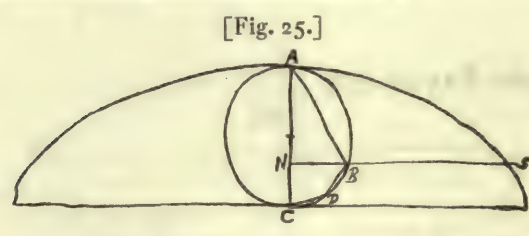
---

5) Dans la deuxième semaine de janvier 1659, Huygens reçut de la part de Pascal (voir les pp. 309, 310, 312 et 313 du T. II) l'„Historia Cycloidis", où il lut que Wren avait rectifié la cycloïde et l'avait trouvée égale au quadruple de son axe (voir la p. 219 du T. VIII de l'édition de Brunschwicg, etc. des Œuvres de Pascal). De plus, Pascal y énonce (p. 221—222) de nouveaux problèmes, savoir de déterminer le centre de gravité d'un arc cycloïdal, la dimension de la surface de révolution décrite par un tel arc tant autour de la base „ce qui est facile" qu'autour de l'axe , et enfin „le centre de gravité de cette surface, ou demy surface, ou quart de surface, etc.; ce qui est le plus difficile et proprement le seul que je propose". C'est sans doute à propos de ces communications que Huygens entreprit les recherches que nous avons reproduites dans cette Partie. On remarquera que Huygens n'a pas entamé les problèmes signalés comme difficiles par Pascal. Probablement était-il persuadé que ses méthodes n'y suffisaient pas.

6) Ce paragraphe nous donne des renseignements, quoiqu'incomplets, sur la manière dont la rectification de la cycloïde fut d'abord obtenue par Huygens. Bientôt après il découvrit une voie plus courte pour arriver au même résultat; on en trouve l'exposition dans le § 2 qui suit.

7) BQ est perpendiculaire à ED qui est parallèle à AB.

[Fig. 25.]



□BAC ex lemm. præc., ad $\frac{1}{2}$ qu. AB, hoc enim demonſtrabo [1]). atqui AN ad AB ut $\frac{1}{2}$ qu.AB ad $\frac{1}{2}$ □BAC. Ergo ex æquo erit curva AS ad AB ut □BAC ad $\frac{1}{2}$ □BAC hoc eſt ut 2 ad 1.

facilius hoc demonſtr. in ſequentibus [2]).

§ 2 [3]).

LEMMA [I.] [4])

[Fig. 26.]

CD arcus ∞ DB; DH perpend. AC. HF ∞ HC. Oſtend. AF ∞ AB.

Dem. quia HF ∞ HC et DH perpend. erit DF ∞ DC hoc eſt ∞ DB. eſt autem in triang. ABD, AFD, ∠ABD ∞ ∞ ∠AFD quia hic una cum ∠DFC, ille cum ∠DCF (ipſi DFC æquali) æquatur 2 rectis [5]). Sed et latus AD triangulis ABD, AFD commune, ergo et latus AF ∞ AB. qu. erat dem.

[Fig. 27.]

LEMMA [II.]



in △ECD, ∠D + ABD ∞ ang. ⌐. ∠C + ∠ECA ſive + ∠EBA ∞ ∠⌐. Ergo ∠C ſuperat ∠D angulo EBD.



[1]) Nous ne connaissons pas cette démonstration qu'on ne trouve pas dans les manuscrits dont nous disposons.

[2]) Voir le § 2, qui suit.

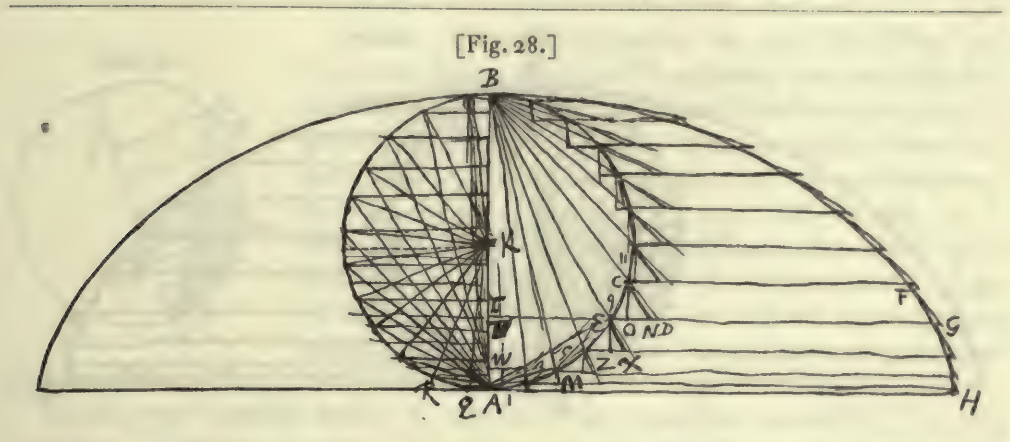
[3]) Rectification d'un arc cycloïdal.

[4]) Comparez le „Lemma" du § 1, p. 363.

[5]) Puisque ∠ABD a pour mesure la moitié d'une demi-circonférence + arcDC et ∠ACD la moitié d'une demi-circonférence — arcDC.

[6]) Il était, en effet, connu que BC, dont CD est le prolongement, est parallèle à la tangente FG à la cycloïde. D'ailleurs Huygens en donne plus loin une démonstration; voir la Quatrième Partie, p. 374—375.

[Fig. 28.]



CD eſt parallela tangenti FG [6]). ducendo autem CN ita ut ang. DCN ſit æqu. dimidio CBE, fit △NEC iſoſceles, cruribus æqualibus EN, EC [7]). Omnes autem CN habeantur pro longitudine curvæ BFH [8]).

Quæro jam quam rationem habeant omnes CN ad omnes CO, quæ ſunt perpend.es in Δlis ECN. iſta enim ratio inveniri poteſt, et dupla eſſe oſtenditur. Ergo curva BFH dupla rectæ BA.

Quod autem omnes ÇN ad omnes CO duplæ ſunt ſic oſtenditur. Anguli E triangulorum CEN æqualiter creſcunt ut numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c. Habent autem ſinguli crura eidem EC æqualia. ſunt ergo omnes CN ſubtenſæ arcuum æqualiter creſcentium uſque ad ſemicircumfer.m in circulo cujus radius EC.

Perpendiculares verò CO ſunt eorundem arcuum omnium ſinus. atqui omnium arcuum iſtorum ſubtenſas omnium ſinuum ſuorum duplos eſſe conſtat, infinitâ conſideratâ multitudine. nam ſinus quidem omnes tantundem efficiunt atque duplum ſinuum arcuum omnium uſque ad circuli quadrantem; ſubtenſæ autem omnes duplæ ſunt ſinuum omnium ad quadrantem, ſed duplo plurium numero; qui ſinus duplo plures, quum ſimul dupli ſint duplo pauciorum; hinc et ſubtenſæ omnes ad ſemicirculum duplæ erunt omnium ſinuum qui ad eoſdem arcus pertinent [9]).

---

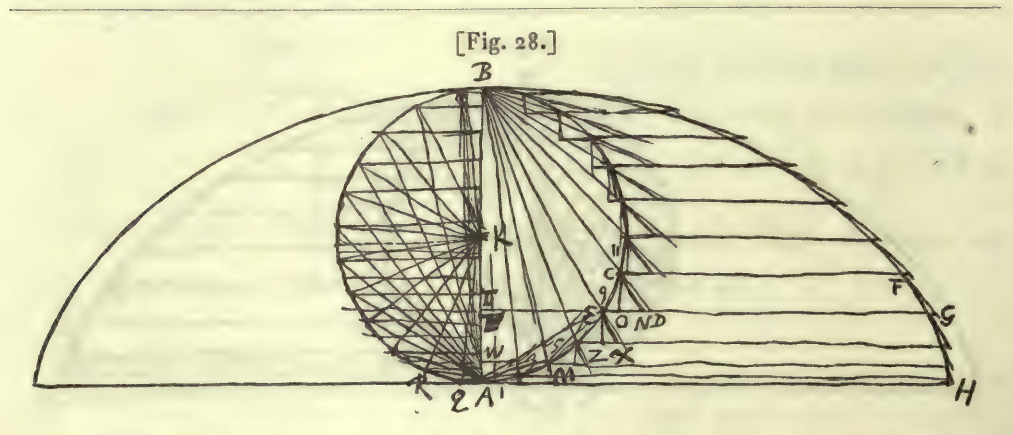
7) Consultez le „Lemma II". Afin d'obtenir l'égalité des angles ECN et CNE, on doit évidemment diminuer l'angle ECD de la moitié de sa différence d'avec l'angle CDE.

8) Puisque la différence entre CD et CN peut être négligée.

Il est d'ailleurs curieux de remarquer combien facilement dès ce moment la rectification d'un arc cycloïdal quelconque aurait pu être obtenue. Abaissons à cet effet du point E sur CN une perpendiculaire EK. On a alors arc.BG $= \Sigma$CN $= 2\Sigma$CK $=$ 2BE; c'est-à-dire, en négligeant, comme Huygens commence à le faire de plus en plus librement, des différences qui disparaissent à la limite.

9) Soit n le nombre des divisions. Puisqu'on a corde $\varphi = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$, il est évident que la somme de toutes les cordes, étendue à la demi-circonférence, est égale au double de la somme

[Fig. 28.]



Ad inveniendam rectam æqualem parti curvæ ut HG, ductâ GE parall.ª HA, inveniendum eſt quænam ſit ratio omnium ſubtenſarum uſque ad arcum AE ad omnes ſinus ab eodem demiſſos, infinita multitudine utrorumque. hæc enim ratio eadem eſt illi quam habent omnes EX deinceps uſque ad A ad omnes pendiculares EZ.

Dictam autem rationem omnium ſubtenſarum ad omnes ſinus eam dico eſſe quam habet quadrupla AW ſinus verſus dimid. arcus AE, ad AT [1]).

[Fig. 29.]

Oſtendit Archimedes omnes ſinus ab arcu AE in æquales partes diviſo demiſſos eſſe ad AT ut AR [Fig. 29] ad RB ſubtenſam unius partis [2]).

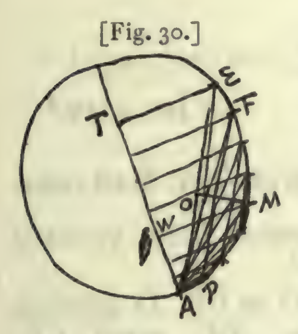
Similiter ergo omnes ſinus ab arcu AS demiſſi erunt ad AZ ut AR ad RB. Itaque omnes ſinus ab arcu AE ad AT, ſicut omnes ſinus ab arcu AS ad AZ. Et permutando, omnes ſinus ab arcu AE ad omnes ſinus ab arcu AS ut AT ad AZ, ſive etiam ut qu.AE ad qu.AS.

d'un nombre égal de sinus qui se trouvent tous dans le premier quadrant. Or, lorsque *n* est suffisamment grand, on peut admettre que les points terminaux de ces sinus sont répartis également sur l'arc de cercle. Lorsqu'on les répartit ensuite d'une manière égale sur les *deux* premiers quadrants, sans changer leur nombre, leur somme ne change pas et peut être considérée comme égale à celle des sinus appartenant aux *n* divisions primitives de la demi-circonférence.

[1]) AT est le sinus versus de l'arc AE lui-même.

[2]) Il s'agit de la „Prop. 22" du „Lib. I" de l'ouvrage: „De sphæra et cylindro": „Si in circuli cuiuspiam portione figura multorum angulorum inscribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta base inter se æqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducantur æquedistantes basi portionis, & quæ latera dictæ figuræ coniungant: tunc hæ omnes ductæ simul, cum dimidio basis portionis, habebunt ad altitudinem portionis eandem proportionem, quam habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipsi diametro applicatum ducta sit." (p. 23 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 99—101). Ajoutons que cette proposition d'Archimède est équivalente à l'identité:

[Fig. 30.]



Omnes ſubtenſæ creſcentes in arcu AE [Fig. 30] æquantur duplo omnium FP rectarum quæ parallelæ ſunt ipſi AE et bina quæque ſectionum puncta conjungunt [3]. quum illæ in eodem circuli ſegmento duplo plures ſinus quam hæ conſtituant. Harum verò (ipſi AE parallelarum) dimidiæ omnes, ſive ſinus ab arcu ME demiſſi, ita ſe habent ad omnes ſinus ET demiſſos ab arcu AME ipſius ME duplo, ſicut MO vel AW ad AT per præced. Ergo ex æquo omnes ſubtenſæ in arcu AE ad omnes ſinus ab eodem arcu AE demiſſos eam habent rationem quam quadrupla AW ad AT.

Quum ergo ſuperius dictum ſit eam fore rationem curvæ partis HG [Fig. 28] ad rectam TA quam omnium ſubtenſarum in arcu AE ad omnes ſinus ab eodem demiſſos, quam nunc invenimus eſſe eam quam quadruplæ AW ad AT, apparet ipſam curvam HG æquari quadruplæ AW. Nimirum ad inveniendam rectam curvæ HG æqualem oportet ducere GE parall. baſi cycloidis, et diviſo arcu EA bifariam in M ducere MW parall. eidem baſi. Eritque quadrupla AW æqualis curvæ HG.

Jam verò quoniam BA æquatur dimidiæ curvæ BH [4], et AW bis (uti oſtendimus) æqu. [dimidiæ] curvæ parti HG hinc $\frac{1}{2}$ reliqua pars GB æquabitur BA—2AW. hoc eſt ipſi BE rectæ [5]. nam hæc æquatur BA—2AW ex lemm. ſuperiori [6].

Notandum item quod WK ſemper æqualis $\frac{1}{4}$ curvæ GB.

$$\frac{2\sum_{p=1}^{p=n-1} \sin p\varepsilon + \sin n\varepsilon}{1 - \cos n\varepsilon} = \frac{\cos \frac{1}{2}\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

et que, lorsqu'on passe à la limite en faisant croître indéfiniment le nombre des sinus, on peut, en effet, remplacer le numérateur de la première fraction par $2\sum_{p=1}^{p=n} \sin p\varepsilon$.

D'ailleurs l'application exacte de la proposition d'Archimède exige de lire, ici et dans l'alinéa qui suit, „duplum omnium sinuum" au lieu de „omnes sinus", mais cette inadvertance de Huygens ne fausse pas les résultats qui suivent.

3) AF est égale à la corde qui joint les milieux des arcs AP et EF; la corde joignant A au point de la division qui fait suite à F, est égale à PF, etc.

4) Voir le deuxième alinéa de la p. 365.

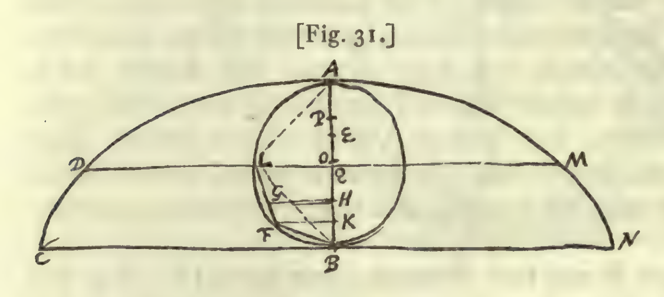
5) Ce résultat fut communiqué, le 14 janvier 1659, à de Sluse; le 16 janvier, à de Carcavy; le 31 janvier, à Wallis; le 7 février à van Schooten (voir les pp. 313, 315—316, 330 et 343 du T. II). Il est identique avec celui de Wren, publié par Wallis, en 1659, dans ses „Tractatus Duo, Prior, de Cycloide et corporibus inde genitis", etc.; voir la p. 520 des „Opera Mathematica de John Wallis. Volumen Primum, Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano. 1695".

6) Voir le „Lemma I", p. 364, où HC (Fig. 26) et AB correspondent respectivement aux lignes AW et BE de la Fig. 28.

§ 3 [1]).

22 Jan. 1659.

[Fig. 31.]



BE eſt $\frac{2}{3}$BA. E eſt centr. gr. totius lineæ cycloidis CAN.

AO ∞ OB. D punctum datum. DL parall. CB. LF ∞ FB. FG ∞ $\frac{1}{3}$FL. GH parall. CB. H eſt centr. grav. curvarum CD, NM.

Ratio conſtructionum in ſequentibus explicatur pag. verſa et ſequ [2]).

Si fiat ut OK ad KB ita HE ad EP erit P centr. grav. curvæ DAM [3]).

AL ∞ q; AB ∞ d; AQ [∞] $\frac{qq}{d}$.

$d - \frac{qq}{d}$ QB

$\frac{d-q}{2}$ BK [4])

f. $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q - \frac{qq}{d}$KQ

div. p. 3.

$\frac{1}{6}d + \frac{1}{6}q - \frac{1}{3}\frac{qq}{d}$ KH

$\frac{1}{2}d$ BO

$\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$ BK

f. $\frac{1}{2}q$ KO

KO + OE ∞ $\frac{1}{2}q + \frac{1}{6}d$ KE

aufer KH

$\frac{1}{3}q + \frac{1}{3}\frac{qq}{d}$ HE

[1]) Dans les §§ 3 et 4 Huygens s'occupe de la détermination du centre de gravité d'un arc cycloïdal DAM (Fig. 31) et de la quadrature de la surface engendrée par la révolution d'un tel arc autour de sa corde DM. Partant des résultats qu'il formule au début du présent paragraphe, et dont on trouvera la démonstration dans le § 4, il montre dans ce § 3 que le centre de gravité P de l'arc DAM divise la flèche AQ dans la raison de 1 à 2.

[2]) Comparez, quant à la première construction, les dernières lignes de l'avant-dernier alinéa de la p. 371, et quant à la seconde, le commencement du dernier alinéa de cette page 371 et l'alinéa qui commence en bas de la p. 372.

[3]) On a évidemment $\frac{HE}{EP} = \frac{\text{arc. AD}}{\text{arc. DC}}$, où, d'après les six dernières lignes du § 2 (p. 367), arc. DC = 4BK et arc. AD = 4OK.

[4]) Voir la Fig. 26 (p. 364), où HC correspond à la ligne BK de la présente figure. Or, on a dans

$$\mathrm{KO}\left(\tfrac{1}{2}q\right)\,[\mathrm{ad}]\,\mathrm{BK}\left(\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}q\right)\,[\mathrm{ut}]\,\mathrm{HE}\left(\tfrac{1}{3}q+\tfrac{1}{3}\tfrac{qq}{d}\right)[\mathrm{ad}]\left(\frac{\tfrac{1}{6}dq-\tfrac{1}{6}\tfrac{q^3}{d}}{\tfrac{1}{2}q}\right)\mathrm{EP}.$$

$$\tfrac{1}{3}d\ \mathrm{EA}$$

$$\frac{\tfrac{1}{3}d-\tfrac{1}{3}\tfrac{qq}{d}\ \mathrm{EP}}{\tfrac{1}{3}\tfrac{qq}{d}\ \mathrm{PA}\ \infty\ \tfrac{1}{3}\ \mathrm{AQ}}\ \text{ſ.}$$

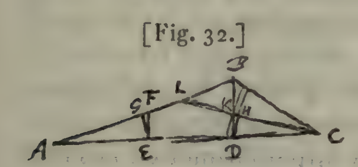
[5]).

§ 4 [1]).

Lemma ad ea quæ in fin. pag. ſequentis [6]).

in △ABC, BD perp. AC. dico majorem habere rationem AD ad DC quam ang.ACB ad ang.CAB.

[Fig. 32.]



Sit AE ∞ DC, et EF perp. AC, et ∠ACL ∞ ∞ ∠BAC.

AD ad DC ut AD ad AE, h. e. ut BD ad EF vel DK. Sed BD ad DK major ratio quam ang.ⁱ BCD ad ∠KCD ſive A. ut facile eſt oſtendere. Ergo et AD ad DC major quam ∠BCA ad A.

Circumfer.ª diviſa eſt in partes æquales [Fig. 33]. Omnes CN parallelæ et æquales tangentibus cycloidem reſpondentibus [7]). hoc eſt ipſi curvæ. Et ſingulæ in eadem

---

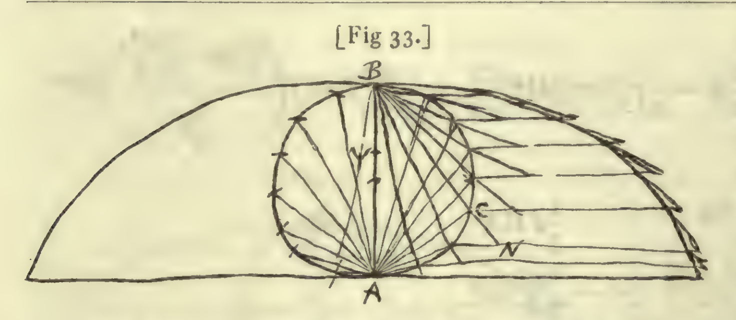
la Fig. 26, HC = FH = $\frac{1}{2}$AC — $\frac{1}{2}$AF = $\frac{1}{2}$ AC — $\frac{1}{2}$ AB, c'est-à-dire, dans la présente figure: BK = $\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AL = $\frac{1}{2}(d-q)$.

5) Ce résultat fut communiqué à Wallis dans une lettre du 31 janvier 1659 (voir la p. 330 du T. II) et à Pascal dans une lettre du 5 février suivant (p. 341 du T. II).

6) Voir la première annotation en marge de la p. 371.

7) Voir la note 6 de la p. 364.

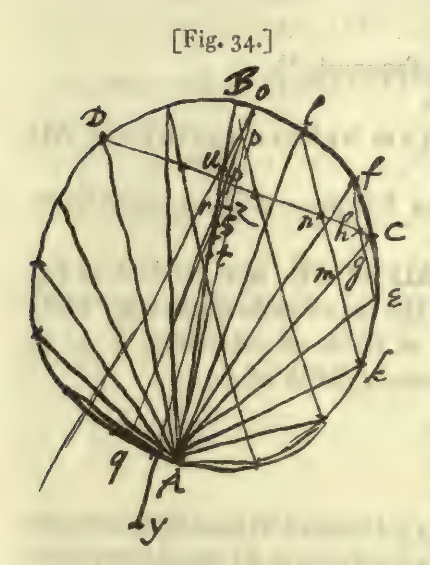
[Fig 33.]



altitudine similiter sitæ. Ergo centr. gr. cycloidis lineæ erit in eadem altitudine atque centr. gr. omnium CN. Superius autem apparuit, pag. 78 [1]), singulas CN esse inter se sicut quæ ipsis adjacent CA. Unde sequitur, si in singulis punctis C suspenderentur singulæ CA, fore centrum gr. omnium CA ita suspensarum eadem altitudine atque centr. gr. omnium CN uti positæ sunt, vel certè si singulæ CN suspenderentur itidem è punctis C. quod nihil refert.

Oportet igitur invenire centrum gr. omnium CA ex punctis C suspensarum. Sit primo propositum invenire centr. gr. omnium CA suspensarum ex C punctis per arcum ACB [2]) [Fig. 34] quemcunque. dividatur hic bifariam in C, à quo bina quæque reliquorum punctorum C æqualiter utrinque distent; quæ jungantur rectis *ef*, *kl* &c. et ducatur item CD. Quia ergo AC dividit bifariam angulum *e*A*f*, erit ut *e*A ad A*f* ita *eg* ad *gf*, vel ita quoque *fh* ad *he* [3]). Ergo *h* centr. gr. erit ipsarum A*e*, A*f* suspensarum ex *e* et *f*. Eodem modo ostendetur centr. gr. duarum *k*A et *l*A suspensarum ex *k* et *l* esse in *n*; atque ita de cæteris quibusque binis apparebit centr. ipsarum gr. esse in recta CD. Ergo omnium AC ex punctis C suspensarum per totum arcum ACD erit centr. gr. in CD.

[Fig. 34.]



dividatur AB [4]) in *s* ut sit A*s* dupla *s*B. dico centr. gr. omnium AC, per totam circumferen-

[1]) La page numérotée 78 par Huygens contient le „Lemma II" de la p. 364 et les alinéa's suivants jusqu'à celui qui commence par les mots „Ostendit Archimedes" (p. 366). Huygens y démontre e. a., que les lignes CD (Fig. 28, p. 366) peuvent être considérées comme proportionnelles aux cordes des angles CED, or, il en est de même des cordes AC [Fig. 28 et 33], puisque les angles CKA [Fig. 28] ne diffèrent pas sensiblement des angles CED.

[2]) Lisez: ACD.

[3]) On a $fh = ge$ à cause de la situation symétrique des segments C*f*D et C*e*A par rapport à la droite qui joint le point C au centre du cercle.

[4]) AB passe par le centre du cercle.

tiam ſuſpenſarum, centr. gr. eſſe *s* punctum. Sit enim primo magis verſus A ut in *t*. Et ſumatur arcus A*q* tam exiguus ut omnium AC ex ipſo ſuſpenſarum gravitas minorem rationem habeat ad omnes AC ex tota circumf.ª ſuſpenſarum, quam *ts* ad *s*A. arcus ACB*q* dividatur bifariam in *o*. et ducatur *oq* ſecans AB in *r*. Erit ang. *ro*A duplus ang.ⁱ*r*A*o*, ideoque *r*A major quam dupla *r*B *. unde *r* inter *s* et B.

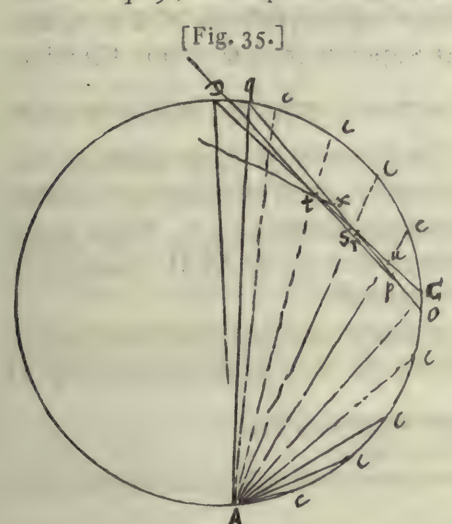
Eſt autem centr. gr. omnium AC ſuſpenſarum per arcum ACB*q* in recta *oq* † et quidem in parte *or*, quoniam ſuſpenſarum ex arcu A*q* eſt ad partes diametri AB quæ verſus *q*. Sit ergo *p* centr. gr. omnium ſuſpenſarum ex arcu ACB*q*. Ergo *pt* recta major quam *st*. unde ſi producatur *pt*, ut fiat ſicut gravitas omnium ex tota circumferentia ſuſpenſarum ad ſuſpenſas ex arcu A*q* ita *yp* ad *pt*. cadet *y* extra circulum longè, quia A*s* ad *st* majorem rationem habere poſita eſt. eſſet autem centrum gr. ſuſpenſarum ex arcu A*q* in *y* quod fieri non poteſt.

* Oſtenditur ductâ *rz* perp. A*o* quæ ideo parall. B*o*. vid. lemma in pag. præc. [5])

† per modo oſtenſa.

Jam ſi fieri poteſt, ſit centr. gr. omnium AC per totam circumf.ᵐ ſuſpenſarum magis verſus B quam punctum *s* velut in *u*. Sumatur arcus A*q* tam exiguus ut reliquo *q*DBCA bifariam diviſo in *o*, ductâque *qo*, ſecet hæc diam. BA inter *u* et *s*, poteſt enim fieri [6]). Quum ergo ſuſpenſarum omnium AC ex arcu *q*DBCA, centr. gr. ſit in recta *qo*, inque ejus parte *ro* ut modo etiam dictum fuit, puto in *p*: omnium autem ſuſpenſarum per totam circumf.ᵐ centr. gr. ponatur *u*; cadet neceſſario centr. gr. ſuſpenſarum ex arcu reliquo A*q* in producta *pu*, quod eſſe non poteſt quoniam producta *pu* non poteſt unquam tranſire vel arcum vel ſegmentum circuli A*q* [7]), intra quod neceſſe eſt dictum centr. gr. ſuſpenſarum per arcum A*q* reperiri. Eſt ergo punctum *s* centr. gr. omnium AC ſuſpenſarum per totam circumferentiam. Quare etiam centr. gr. curvæ cycloidis ψ [Fig. 33] ita ſecat axem BA ut Aψ ſit dupla ψB.

[Fig. 35.]



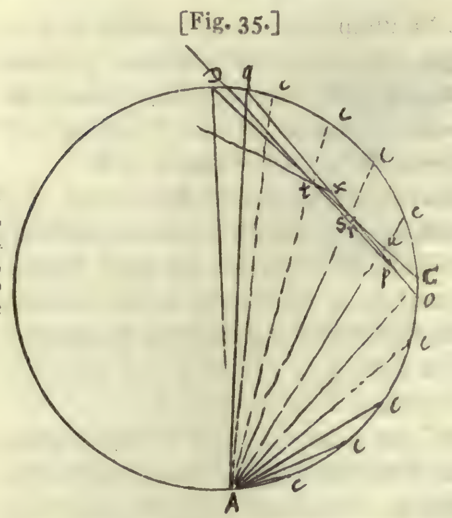
Eſto rurſus quicunque arcus ACD [Fig. 35] per quem ſuſpenſæ ſint rectæ æquales ſubtenſis AC. dividatur bifariam in C et ducatur CD. Oſtenſum eſt centr. gr. omnium dictarum ſuſpenſarum fore in recta CD. dico autem ipſum ita hanc dividere in *s* ut ſit D*s* dupla *s*C. Sit enim ſi fieri poteſt primum inter *s* et D, velut in *t*. et ſumatur arcus D*q* tam exiguus ut omnium AC ex ipſo ſuſpenſarum ad omnes ſuſpenſas ex reliquo arcu

[5]) Voir le „Lemma" de la p. 369.

[6]) Puisque le point *r* s'approche indéfiniment de *s* lorsqu'on diminue l'arc *q*A.

[7]) Puisque le point *p* se trouve nécessairement à droite de la ligne *qu* et que, par conséquent, le point où le prolongement de *pu* coupe le cercle sera situé à gauche du point *q*.

[Fig. 35.]



qCA, minor sit ratio quam st ad tD. arcus qCA bifariam dividatur in o, et ducatur qo. erit arcus Co subduplus ad arcum Dq, unde intersectio r cadet inter s et C per lemma adjectum [1]). Erit autem centr. gr. suspensarum ex arcu qoA in recta qo, at non in parte qr*, nam si ibi sit puta in x, debebit in producta xt esse centr. gr. suspensarum per arcum Dq, quod absurdum est quia xt producta non transit per segmentum circuli Dq. Sed neque in parte ro erit centrum gr. suspensarum per arcum qoA, nam si fuerit inibi puta in p; ergo quia omnium ex toto arcu DCA suspensarum centr. gr. est in t, erit reliquò ex arcu Dq suspensarum centr. gr. in producta pt ulterius quam ubi ea sic terminatur (ut sit pt ad adjectam sicut st ad tD) [3]), sed pt major est quam st. Ergo longe ultra circulum caderet centr. gr. suspensarum per arcum Dq quod absurdum. non ergo inter s et D potest cadere centrum gravitatis suspensarum per arcum ACD.

* vel sic nam cum totius sit in t, et partis Dq intra illud segmentum, erit reliqui c. gr. ab altera parte rectæ DC [2]).

Jam si fieri potest sit centr. gr. idem inter s et C, puta in u.

Sumatur arcus Dq tam parvus, ut, diviso bifariam arcu reliquo qCA in o, ductâque qo, secet hæc rectam DC in r inter s et u: potest enim fieri quia Cu minor est quam $\frac{1}{3}$ CD *. Cum ergo suspensarum ex arcu qoA centr. gr. sit in recta qo, et in parte ejus ro per ea quæ modo dicta sunt [5]). sit igitur in p. Ergo centr. gr. suspensarum ex reliquo arcu Dq esset in producta up [6]), quod esse nequit, quia hæc non potest transire per segmentum Dq, ubicunque fuerit p in ro. Ergo neque inter s et C cadet centr. gr. omnium suspensarum per arcum ACD. quamobrem reliquum est ut sit ipsum punctum s. quod erat demonstr.

* seorsim ostendendum esset [4]).

Est autem demonstratio prorsus similis præcedenti qua de suspensis per totam circumf.m ostensum est. Atque ex his manifesta est ratio constructionis pag. 81

[1]) Voir le „Lemma" qu'on trouve à la fin du présent paragraphe, p. 374.

[2]) C'est-à-dire du côté opposé à celui où se trouve le segment qr.

[3]) Lisez au lieu de la phrase que nous avons mise entre parenthèses: „ut pt ad adjectam minor sit ratio quam st ad tD".

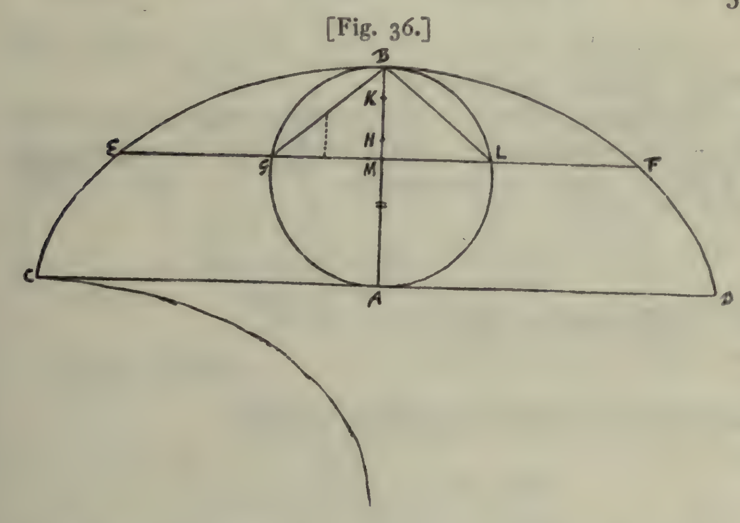
[4]) On sait déjà que r se trouve, comme u, entre s et C. Il suffit donc de démontrer qu'en diminuant Co on peut faire approcher le point r indéfiniment du point s.

[5]) Voir plus haut la réduction à l'absurde de la supposition que le centre de gravité en question se trouve en x entre q et r; réduction qui reste valable dans le cas présent, où le centre de gravité des „suspendues" de l'arc ACD est supposé se trouver en u.

[6]) Lisez: pu.

qua partium curvæ DC, MN [Fig. 31] centr. gr. invenitur [7]). Unde deinde deducitur [8]) centr. gr. partis DAM esse in P ut sit AP ∞ $\frac{1}{3}$ AQ.

[Fig. 36.]



Est ergo hæc proprietas Cycloidis et miranda profecto, quod sicut centrum grav. totius curvæ axem ejus dividit, ita quoque centra gr. cujusque partis recta basi parallela abscissæ suos axes dividunt, nempe ut pars ad verticem triens sit axis totius [9]). Ita hic BK [Fig. 36] est $\frac{1}{3}$BM, ideoque K centrum gr. curvæ EBF. Cum autem BG semper sit dimidia curvæ BE, hinc jam superficiei magnitudinem quæ fit conversione curvæ EBF circa basin EMF facile inveniemus. habet enim superficies ejusmodi ad superficiem ad eam quæ fit conversione utriusque rectæ GB, BL, circa GL, rationem compositam ex ratione curvæ EBF ad utrumque simul GB, BL et ex ratione KM ad dimidiam BM, cum in media BM sit centr. gr. duarum GB, BL. Erit igitur superficiei ex curva EBF genitæ ad superficiem è duabus GB, BL, hoc est ad duplicem conicam superficiem, rationem compositam ex 2 ad 1 et ratione 4 ad 3, nam curva est ad dictas duas rectas ut 2 ad 1, et KM ad $\frac{1}{2}$ BM ut 4 ad 3. Est ergo ratio ea quæ 8 ad 3. Idque perpetuo. unde superficies a tota curva CBD circa basin ad superficiem circuli genitoris erit ut 64 ad 3 [10]), sive ut 21$\frac{1}{3}$ ad 1.

---

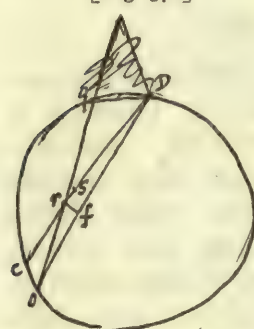
7) Voir le deuxième alinéa du § 3, p. 368.

8) Au même § 3.

9) Comparez la note 5 de la p. 369. Dans sa lettre à Pascal (p. 341 du T. II) Huygens s'exprime comme il suit: „et peu de temps après avoir envoyè cette lettre" (il s'agit d'une lettre à de Carcavy du 16 janvier 1659, p. 315 du T. II). „j'ay encore trouuè le centre de gravitè de la ligne Cycloide, et des parties coupées par une parallele à la base, qui ont cette proprietè estrange que leur centre de gravitè divise leur axes tousjours en la raison de 1 a 2. comme vous scavez Monsieur".

10) Ce résultat fut communiqué à Wallis dans la lettre du 31 janvier 1659 (p. 329 du T. II), bien qu'il ne soit pas mentionné dans le sommaire que nous en possédons. Cela résulte de la

[Fig. 37.]



[LEMMA] [1]).

arcus D*q* duplus *co* dico D*r* ad *rc* majorem esse quam duplam.

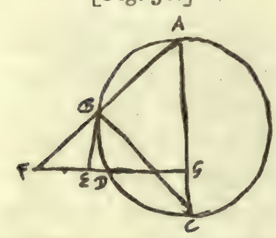
sit *rf* perp. *o*D. Ergo D*f* major quam dupla *fo* per lemm. superius. pag. 81 [2]) et multo magis ergo D*r* major quam dupla *rc*, cum sit ∠ D*co* obtusus.

[QUATRIÈME PARTIE] [3]).

8 Febr. 1659.

Demonstratio geometrica tangentis in Cycloide.

[Fig. 38.]



LEMMA I.

GDF perp. AC diametro. cui occurrit ABF. Demonstrandum rectam DF majorem esse arcu DB.

△ª ABC, AGF similia sunt. ∠ F ∞ ∠ ACB. sit BE tangens in B. Ergo ∠ FBE ∞ ∠ BCA [4]). Ergo ∠ FBE ∞ ∞ ∠ BFE. Et latus BE ∞ EF. Et BE + ED ∞ FD. Sed BE + ED majores sunt arcu BD. Ergo et FD maj. arcu BD.

---

réponse de Wallis, où l'on lit: „Interim quam tradis rationem superficiei Trochoidis curvâ circa basin conversâ descriptæ ad circulum genitorem, nempe ut 64 ad 3, omnino veram esse intelligo" (p. 360 du T. II).

[1]) Il s'agit du „Lemma adjectum" dont il est question dans le premier alinéa de la p. 372.

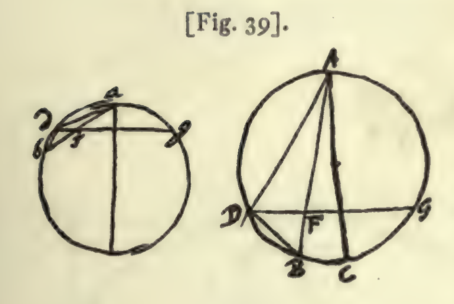
[2]) Voir la p. 369.

[3]) La construction de la tangente à la cycloïde n'était pas inconnue à cette époque. Van Schooten en publia une dans la „Geometria à Renato Des Cartes edita operâ et studio Fr. à Schooten" (p. 226 de l'édition de 1649; p. 267 de celle de 1659 et 1683), dont la construction de Huygens se déduit immédiatement. Il fonda sa solution sur l'emploi du centre instantané de rotation, mais il ajouta: „Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hìc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo supersedebo". Or, dans cette Quatrième Partie, qui a servi plus tard d'avant-projet aux Prop. XII—XV de la „Pars secunda" de l'„Horologium oscillatorium" (p. 37—39 de l'édition originale), Huygens s'applique à donner une telle démonstration purement géometrique.

[4]) Puisque ces angles sont mesurés tous les deux par la moitié de l'arc BA.

LEMMA II.

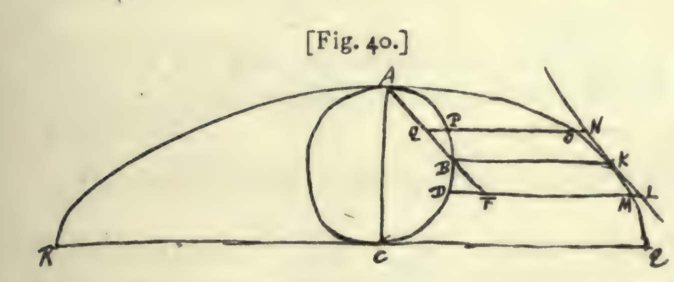
[Fig. 39].



AC diam. AB linea. DFG perp. AC. demonſtrandum arcum BD majorem recta DF.

ducatur ſubtenſa DB. arcus AG ∞ AD, Ergo ∠ADG ∞ ABD. ∠ autem DFB ∞ ∞ ADG + DAF. Ergo ∠DFB |ı ∠ABD. Ergo in △DFB latus DB |ı latere DF. quare multo magis arcus BD major recta DF.

[Fig. 40.]



[THEOREMA.]

Sit RAQ Cycloides. K datum in ipſa punctum in quo tangens ſit ducenda. ABC eſt circulus genitor intra cycloidem conſtitutus. Sit KB parall. baſi QC, et jungatur BA, cui parallela ſit NKL. dico eam tangere cycloidem in puncto K.

Sumatur enim in NKL punctum quodvis præter K, ac primo altius ut N, unde agatur NQ parall. BK, quæ occurrat cycloidi in O circulo ABC in P.

Quia ergo PO eſt ∞ arcui PA ut ſuperius dem. [5]) erit QO ∞ arc.PA + PQ. hiſce autem duobus major eſt arc.APB, quia arc.PB major rectâ PQ per lemm. ſecund. Eſtque arcui APB æqualis BK ſive QN. Ergo QN major quam QO. Ergo punctum N eſt extra cycloidem.

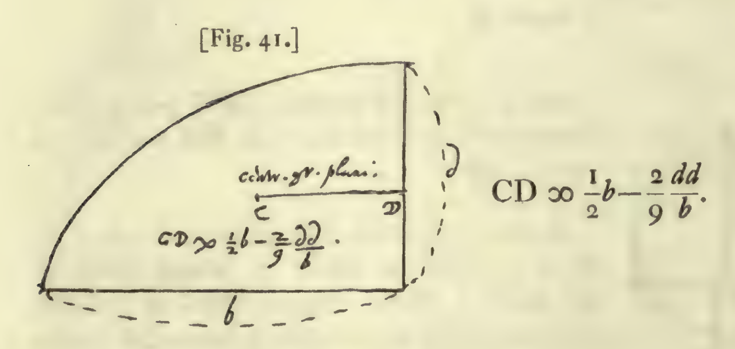
deinde infra K ſumatur in KL punctum L et ducatur LD parall. KB. occurrens cycloidi in M, productaque AB in F. Ergo quia DM ∞ arcui DBA. DF autem major arcu DB per lemma I. Erit FM minor arcu BA, hoc eſt rectâ BK ſive FL. Ergo punctum L extra cycloidem. Eſt ergo NKL tangens in K.

---

[5]) Voir le § 1 de la Première Partie, p. 347.

[CINQUIÈME PARTIE] [1]).

[Fig. 41.]



$$CD \infty \frac{1}{2}b - \frac{2}{9}\frac{dd}{b}.$$

---

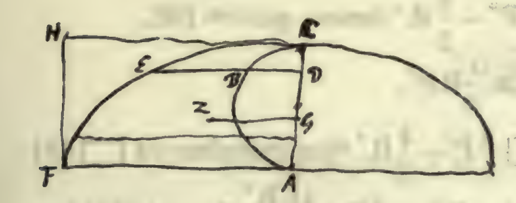
[1]) Vers la fin du mois de mai 1659, Huygens reçut enfin les „Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses Inventions de Geometrie" (voir l'ouvrage marqué *c*, cité dans la note 32, p. 307 du T. II), où Pascal expose les méthodes qui l'avaient conduit à la résolution des problèmes sur la cycloïde. À ce propos Huygens écrivit à de Carcavy dans une lettre du 22 mai 1659 (p. 411 du T. II) qu'il admira „de plus en plus la subtilité des écrits de Monsieur Dettonville, mais" ajouta-t-il „il faut avouer que c'est un labyrinthe lors que l'on veut faire la construction de quelque probleme". C'est ce qui le porta à entreprendre des calculs précis, d'après les méthodes de Pascal, de la distance à l'axe du centre de gravité d'un demi-segment de cycloïde dans les deux cas spéciaux signalés auparavant par Pascal (voir la note 1 de la p. 348). Or, la figure du texte nous fait connaître le résultat de son calcul dans le premier de ces cas, tandis que dans la lettre à de Carcavy déjà mentionnée, il dit avoir trouvé dans le deuxième cas (celui où le demi-segment cycloïdal est limité par la droite décrite par le centre du cercle générateur) pour la distance du centre de gravité à l'axe une valeur qui, exprimée dans les notations de la Fig. 41, est représentée par la forme $\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}b - \frac{17}{12}\frac{d^2}{2d+b}$. Après quoi il prie de Carcavy de lui mander s'il a „bien supputé."

Ajoutons que nous avons vérifié, par l'analyse moderne, l'exactitude des deux résultats.



APPENDICE À LA PIÈCE N°. XI [2]).

[1691] [3])



CF $\frac{1}{2}$ Cyclois. CA axis ſeu diameter circuli genitoris CBA. DE applicata ad axem, ſecans circumf.^{m} in B.

Solidum ex ſpatio CAF circa axem, itemque centri gravitatis Z diſtantia ab axe, quæ eſt ZG, cognoſcetur, ſi detur ſumma quadratorum DE [4]). hoc eſt ſumma quadratorum BD, ſumma quadratorum BE, et ſumma duplorum rectangulorum DBE.

Sit $\frac{1}{2}$AC ſeu radius circuli genitoris R. Circumferentia tota P.

Summa quad.^{orum} DB eſt $\frac{4}{3}R^3$, quod facile cognoſcitur ex proportione ſphæræ ad circumſcriptum cylindrum [5]). Summa quadr.^{orum} BE apud Wallisium in libro de Motu [6]), oſtenditur æqualis $\frac{1}{4}RP^2 - 4R^3$, difficili ſatis demonſtratione ex ungula ſuper involucro cylindrico expanſo [7]).

---

[2]) La Pièce est empruntée à la p. 126 recto du Manuscrit G. Elle contient la détermination de la distance ZG du centre de gravité Z à l'axe AC de l'espace cycloïdal CFA à l'aide des méthodes exposées par Wallis dans ses ouvrages „Tractatus Duo. Prior, De Cycloide Posterior, Epistolaris" (1659) et „Mechanicornm, sive Tractatus De Motu, Pars secunda" (1670). À cette occasion Huygens corrige deux erreurs qui se trouvent dans l'édition originale des „Tractatus Duo", citée dans la note 3 de la p. 518 du T. II.

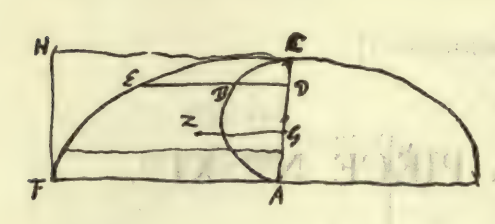
[3]) D'après le lieu que la Pièce occupe dans le Manuscrit G.

[4]) En langage moderne ΣDE^2 représente $\int_0^{2R} y^2 dx$, où $y = DE$, $x = CD$.

[5]) On a évidemment $\frac{\Sigma BD^2}{\Sigma R^2} = \frac{\text{vol. sphère}}{\text{vol. cyl. circ.}} = \frac{2}{3}$, où $\Sigma R^2 = \int_0^{2R} R^2 dx = 2R^3$.

[6]) Voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 38 du T. VII.

[7]) Au § G de la „Prop. XVII" du „Caput V"; voir les p. 759—760 du „Volumen Primum" des „Opera Mathematica" de Wallis, Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano, 1695.



Summa duplorum rectangulorum, apud eundem in libro de Cycloide, invenitur facili ratiocinio æqualis $\frac{1}{8}RP^2$ [1]). Sed tantum ad solidum integrum ex CFA pertinet. GA est æqualis $\frac{5}{6}R$ [2]). quam in libro de Cycloide Wallisius facit $\infty \frac{3}{4}R$ [3]).

$\frac{4}{3}R^3 + \frac{1}{4}RP^2 - 4R^3 + \frac{1}{8}RP^2$ sive $\frac{3}{8}RP^2 - \frac{8}{3}R^3$ summa qu.orum DE.

Summa quadratorum AF in $\square$° AH $\infty \frac{1}{2}RP^2$.

$\frac{1}{2}RP^2$ [ad] $\frac{3}{8}RP^2 - \frac{8}{3}R^3$ [sive] P^2 [ad] $\frac{3}{4}P^2 - \frac{4}{3}R^2$ [4]) ut cylindrus ex $\square$AH circa CA ad solidum ex $\frac{1}{2}$ Cycloide CFA. hinc ZG $\infty \frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$ [5]). quam in libro de Cycloide Wallisius statuit $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$ [6]). Postea vero correxit in lib. de Motu [7]).

Observandum in hoc et omni calculo summam quadratorum esse duplam momenti quod vocant, hoc est, duplam ejus quod fit ex figura plana proposita, in distantiam ipsius centri gravitatis [8]).

---

[1]) Voir le § 81 des „Tractatus Duo", p. 516 du „Volumen Primum" cité dans la note 7 de la page précédente. L'artifice en question est basé sur la remarque que dans la Fig. 2 de la p. 348 on a GF = ML et EG + NM = AD; par suite, dans la présente figure, $2\Sigma EB \times$ $\times BD$ est égal au volume d'un cylindre qui a pour base le demi-cercle CBA et pour hauteur la ligne AF.

[2]) Comparez la dernière ligne de la p. 355.

[3]) Voir le § 36 de l'ouvrage cité; mais l'erreur a été corrigée depuis dans le „Volumen Primum" (p. 505).

[4]) Lisez: $\frac{3}{4}P^2 - \frac{16}{3}R^2$.

[5]) Puisque les volumes du cylindre et du solide décrit par la demi-cycloïde sont dans la raison composée des aires du rectangle et de la demi-cycloïde (qui sont de 4 à 3; voir le § 2, p. 348) et des distances de leurs centres de gravité à l'axe CA. On a donc $P^2 : \left(\frac{3}{4}P^2 - \frac{16}{3}R^2\right) = 4 \times \frac{1}{4}P : 3 \times ZG$, et par suite $ZG = \frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; résultat conforme à celui indiqué dans l'inscription de la Fig. 41, p. 376, puisqu'on a $P = 2b$ et $R = \frac{1}{2}d$.

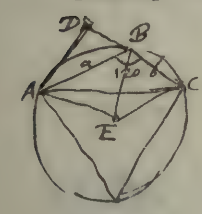
[6]) Voir le § 35 des „Tractatus duo"; mais le résultat erroné fut corrigé depuis à la p. 505 du „Volumen Primum".

XII[9].

[1658].

[*Démonſtration d'un théorème de ſtéréométrie*[10])].

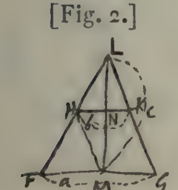

[Fig. 1.]



ABC ang. 120 gr. dico qu.AB + qu.BC + ▭ ABC ∞ ∞ qu.AC.

Eſt enim qu.AC ∞ qu.AB + qu.BC + 2 ▭ CBD. at 2 ▭ CBD = ▭ ABC quia AB ∞ 2BD. Ergo &c.

[Fig. 2.]



FG (a) [Fig. 2] [ad] ML (c) ut HK (b) ad NL $\left(\frac{bc}{a}\right)$

$$\text{MN } c - \frac{bc}{a} \infty \frac{ac - bc}{a}$$

$$3 \text{ con.FLG } (aac) - 3 \text{ con.HLK } \left(\frac{b^3c}{a}\right) [\infty] \frac{a^3c - b^3c}{a}$$

---

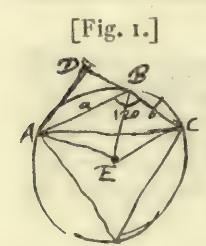
7) Voir le § H du „Cap. V" au dernier alinéa de la p. 810 du „Volumen Primum".

8) Wallis calcule partout les moments qu'on doit donc en effet doubler pour les comparer aux „sommes" employées par Huygens dans son calcul.

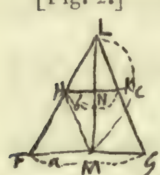
9) La Pièce est empruntée à la p. 39 du Manuscrit A. Elle se rapporte à un passage de la Correspondance entre Huygens et Wallis.

10) Voici ce théorème tel qu'il est formulé dans l'„Epistola XXIII" du „Commercium epistolicum": „Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum:) Cujus Basis major, æquetur quadrato rectæ A; minor, quadrato rectæ E; Altitudo, F. Dico, Si cruribus A, E (vel his æqualibus) constituatur angulus graduum 120, & compleatur Triangulum, eique circumscribatur Circulus: Quadratum Radii circuli circumscripti, in Altitudinem Frusti ductum, æquatur Frusto." (Voir la p. 110 de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 192 du T. II, ou la p. 817 du „Volumen Alterum" de l'„Algebra" de Wallis, cité dans la note 10 de la p. 9 du présent Tome).

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



3 fruſtum FHKG diviſ. per MN $\infty \frac{a^3c - b^3c}{ac - bc} \infty aa + ab +$ $+ bb \infty$ qu.AC [Fig. 1] (AB ∞ FG ∞ a; BC ∞ HK ∞ b) cujus $\frac{1}{3}$ eſt qu.EB. unde cylind. cujus diameter circ. baſeos ſit EB, altit. MN [Fig. 2] æquabitur fruſto FHKG.

Walliſius invenit ſed minus commode demonſtravit [1]).

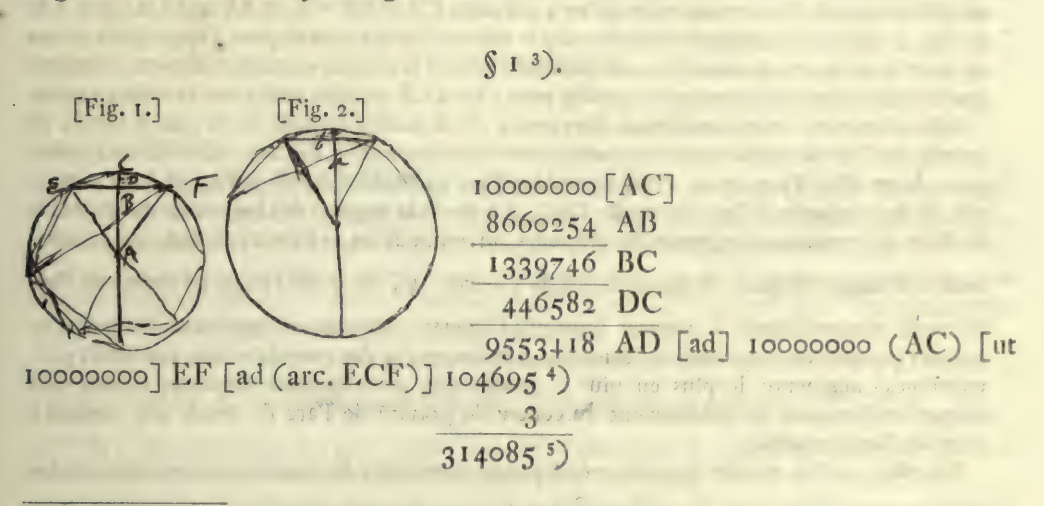
[1]) Comparez la lettre de Huygens à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 du T. II) où l'on lit: „Theorema tuum p. 110 propositum elegantissimum est. potuit tamen proprietas illa trianguli amblygonij 120 graduum multo brevius alio modo demonstrari." Voir, pour la réponse de Wallis, sa lettre du 1 janvier 1659, p. 298 du T. II, ou la dernière page de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 518 du T. II, où il a publié sa réponse.

XIII [2]).

[1659].

[*Déduction d'un théorème de cyclométrie, basée sur la situation connue du centre de gravité d'un arc de cycloïde*].

§ 1 [3]).



10000000	[AC]
8660254	AB
1339746	BC
446582	DC
9553418	AD [ad] 10000000 (AC) [ut

10000000] EF [ad (arc. ECF)] 104695 [4])

3

314085 [5])

---

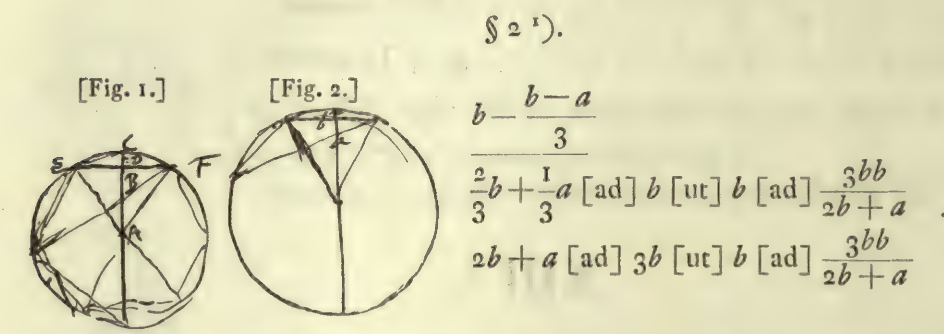
[2]) Nous reproduisons dans cette Pièce un théorème de cyclométrie et quelques annotations qui s'y rapportent. On les trouve aux p. 75 et 76 du Manuscrit A, lesquelles pages suivent immédiatement celles dont nous avons emprunté les §§ 3 et 4 de la Troisième Partie de la Pièce N°. XI (p. 368—374), qui traitent de la détermination du centre de gravité d'un arc cycloïdal. En effet, on verra qu'il s'agit d'une application cyclométrique de cette détermination.

[3]) Dans ce premier paragraphe Huygens calcule la valeur approximative qu'on trouverait pour le nombre π en supposant que le centre de gravité D [Fig. 1] d'un arc de 60° coïncide avec celui d'un arc cycloïdal possédant la même flèche, auquel cas on aurait $CD = \frac{1}{3} CB$.

[4]) Nous supprimons les calculs. On trouve en vérité 104675.

[5]) Lisez: 314025.

§ 2 [1]).



[Fig. 1.] [Fig. 2.]

$$b - \frac{b-a}{3}$$

$$\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \text{ [ad] } b \text{ [ut] } b \text{ [ad] } \frac{3bb}{2b+a}.$$

$$2b + a \text{ [ad] } 3b \text{ [ut] } b \text{ [ad] } \frac{3bb}{2b+a}$$

ſi fiat ut dupla ſubtenſa alicujus arcus una cum ejuſdem ſinu ad triplam ſuſpenſam, ita ſubtenſa ad aliam, illa minor erit ipſo arcu. Theorema veriſſimum [2]).

---

[1]) Dans les premières trois lignes de ce paragraphe Huygens se borne encore au cas particulier où EF est le côté d'un hexagone et qu'on a par suite CA = EF = b, et BA égal à la ligne a de la Fig. 2 Ensuite il généralise tout-à-coup le résultat qu'il a trouvé pour l'approprier au cas où b est la corde et a le sinus d'un arc quelconque et il le précise en même temps en indiquant que la valeur approximative qu'on obtient pour l'arc ECF est plus petite que la valeur exacte.

Afin d'arriver à cette conclusion Huygens a dû se rendre compte de ce que le centre de gravité de l'arc de cercle se trouve toujours au-dessous de celui de l'arc cycloïdal correspondant. À cet effet il peut p. e. avoir considéré l'arc cycloïdal EBF de la Fig. 36 de la p. 373, afin de le comparer à l'arc de cercle GBL. En ce cas le rapport des longueurs des éléments de l'arc de cercle aux longueurs des élements correspondants de l'arc cycloïdal, qui se trouvent à la même distance de la corde, est de 1 à $2\cos\frac{1}{2}\varphi$, où φ est l'angle au centre de l'arc de cercle compté depuis le sommet B jusqu'à l'élément circulaire en question. Par suite, ce rapport (comme on peut aussi le démontrer facilement par des considérations purement géométriques) augmente de plus en plus à mésure que cette distance diminue; ce qui doit amener évidemment un abaissement du centre de gravité de l'arc de cercle par rapport à celui de l'arc cycloïdal.

En effet, si l'on choisit le poids spécifique de la cycloïde de manière que les éléments des deux courbes qui sont à la distance de $\frac{2}{3}$BM de la corde ont le même poids, tous les élements du cercle qui se trouvent à plus grande distance seront plus légers et les autres plus pesants que les éléments correspondants de la cycloïde.

Enfin, la situation réciproque des deux centres de gravité une fois admise, on obtient facilement le théorème énoncé. On a alors [Fig. 1] $AC - \frac{1}{3}CB > \frac{EF}{\text{arc.}ECF}.AC$; c'est-à-dire arc. $ECF > \frac{AC}{AC - \frac{1}{3}(AC-AB)}b = \frac{3AC}{2AC+AB}b = \frac{3AF}{2AF+AB}b = \frac{3bb}{2b+a}$, puisqu'évidemment $AF : AB = b : a$.

[2]) Le théorème est équivalent à la „Prop. XXVIII" du „Cyclometricus" de Snellius (voir l'ouvrage cité dans la note 6 de la p. 94 du T. XII) et, par suite, au „Theorema XIII, Prop.

§ 3[3]).

$$b+\frac{b-a}{3}\infty\frac{3bb}{2b+a}$$
$$\frac{4}{3}b-\frac{1}{3}a\infty\frac{3bb}{2b+a}$$
$$\frac{8}{3}bb+\frac{2}{3}ab-\frac{1}{3}aa\infty 3bb$$
$$8bb+2ab-aa\infty 9bb$$
$$2ab-aa\infty bb$$

§ 4.

$$3a+2b\,[\text{ad}]\,4b+a\,[\text{ut}]\,\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a\,[\text{ad}]\,\frac{\frac{4}{3}bb-ab-\frac{1}{3}aa}{3a+2b}$$
$$b+\frac{\frac{4}{3}bb-ab-\frac{1}{3}aa}{3a+2b}\infty\frac{3bb}{2b+a}$$
$$\frac{2ab+\frac{10}{3}bb-\frac{1}{3}aa}{3a+2b}\infty\frac{3bb}{2b+a}$$
$$\frac{2}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}aab\infty\frac{5}{3}abb$$
$$2b^3-a^3\infty 5abb-4aab$$
$$2b^3-5abb\infty a^3-4aab\ (b\infty c+a)$$ [4])

XVI" de l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa" (voir la p. 159 du T. XII). Cela résulte de la comparaison des notes 27, p. 99—100, et 33, p. 159, du T. XII; mais il est probable que Huygens ne s'en est pas aperçu à cause de la dissemblance des énoncés.

3) Dans ce paragraphe et dans le suivant, qui se trouve à côté, Huygens compare l'approximation nouvellement obtenue à celles énoncées dans le „Theor. XVI, Prop. XIX" de son ouvrage „De circuli magnitudine inventa", p. 169 du T. XII.

Or, la dernière équation du § 3 doit être remplacée évidemment par $2ab-aa<bb$ (puisque $0<(b-a)^2$). Remontant ensuite la chaîne des équations, on trouve $b+\frac{b-a}{3}<\frac{3bb}{2b+a}$, d'où il suit (parce qu'il s'agit d'une limite inférieure) que la nouvelle formule donne une meilleure approximation que celle à laquelle elle est comparée.

Appliquant le même raisonnement au § 4, on trouve d'abord (en posant $b=a+c$, comme Huygens l'indique) $2b^3-5abb>a^3-4aab$, d'ou il suit $b+\frac{\frac{4}{3}bb-ab-\frac{1}{3}aa}{3a+2b}>\frac{3bb}{2b+a}$; résultat qui était à prévoir, puisque la première expression représente une limite supérieure et l'autre une limite inférieure.

Ajoutons ici que l'article de M. F. Schuh, dont nous avons fait mention dans la note 51 à la p. 174 du T. XII, a paru en 1913 et 1914 dans le T. III (Série IIIA) des Archives Néerlandaises (p. 1—178 et 229—323). On y trouvera une étude approfondie, d'après une méthode nouvelle, des diverses approximations qu'on a proposées pour l'arc de cercle.

4) Outre les annotations que nous venons de reproduire, on trouve encore aux p. 75 et 76 du Manuscrit A des calculs qui se rapportent à l'application du théorème nouveau aux cas des polygones à 16 et à 60 côtés.

XIV [1]).

[1659].

[*Solution d'un problème d'arithmétique*].

Op de 10de queftie [2]) van Everfdyck [3]) bijgevoeght achter de Arithm. Coutereels [4]).

het blijft twijffelachtig of fijn dienst van jaer tot jaer verbetert in arithmetifche progreffie, of wel van maent tot maendt. Ick verftaen dat hij meent van maendt tot maendt. want indien fijn dienft geftelt wert te verbeteren niet alleen gedurende de 5 jaer die hij bij fijn meefter is geweeft, maer ook in ieder van de 7 maenden, gelijck het inderdaet wert geftelt, foo moet oock defelfde verbeteringh in den voor-

---

Traduction:

Sur la dixième queftion d'Everfdyck ajoutée derrière l'Arithmétique de Coutereels [2]).

il refte douteux fi fon fervice s'améliore d'année en année ou bien de mois en mois. Je fuppofe qu'il entend de mois en mois. Car, fi le fervice du valet fût pofé s'améliorer non feulement pendant les 5 années qu'il eft demeuré chez fon maître, mais auffi dans chacun des fept mois, comme cela fut pofé en effet, il faut auffi que la même amélioration foit

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 153 du Manuscrit A.

[2]) Voici cette question avec la traduction que nous en donnons: „Een Meester neemt een knecht aen voor 7 jaren; onder conditie dat hij hem ten eynde des tijdts, voor sijnen dienst, betalen sal (boven sijne mont-kosten &c.) 40 ℔. Maer in-dien hij op 't eynde van 't derde jaer begheert te vertrecken, soo sal hij aan sijnen Meester betalen 60 ℔. overmidts sijnen dienst gerekent wert te verbeteren van 'tbeghin tot den eynde toe, gelijck eene *Arithmetische Progressie;* Het ghebeurt nu na 5 jaren en 7 maenden dat sy-lieden, met beyder bewilliginghe,

gaenden tijdt te weten in de 5 jaeren van maendt tot maendt gerekent werden. de Progressie dan op maenden genomen sijnde soo meen ick dat hij ten eijnde van de eerste maend verdient heeft x gl. ergo de 36ste maendt $36x$ + al het geen hij de voorgaende maenden verdient heeft. dat is te samen $666x$. maer daer wert geseght dat hij met dit derde jaer vertreckende soude moeten 60 guld. aen sijn meester geven, boven dat hij niets soude genieten van het verdiende. Ergo geeft hij in 3 jaren aen sijn meester $666x + 60$ hoe veel dan in 7 jaer komt $1554x +$ $+ 140$. Vorders is hetgeen hij ten eijnde van 7 jaer ofte 84 maenden verdient

---

Traduction:

comptée de mois en mois dans le temps qui précède, savoir, dans les 5 années. Prenant donc la progression par mois, je suppose qu'il ait gagné le premier mois x florins; par suite le 36ième mois $36x$ augmenté de tout ce qu'il a gagné dans les mois précédents; ce qui est ensemble $666x$. Mais il est dit que s'il partait après la troisième année, il devrait donner 60 florins à son maître, outre qu'il ne profiterait pas de ce qu'il avait gagné. Par conséquent il donne en 3 années à son maître $666x + 60$, combien donc en 7 années? Il vient $1554x + 140$. Ensuite ce qu'il a gagné après 7 années,

---

van malkanderen scheiden, midts betalende naer advenant van de eerste conditie; *De vrage is*, hoe dat het met de rekeninghe staet? *Antw.* de Knecht moet aen sijn Meester betalen $18\frac{317}{336}$ £ß." [Un Maître prend un valet pour 7 années; sous condition qu'il lui payera (en dessus de ses vivres, &c.) à la fin de cette période la somme de 40 £ß. Mais s'il désire partir à la fin de la troisième année, il payera à son Maître 60 £ß. parce qu'il est supposé que son service s'améliore du commencement jusqu'à la fin d'après une *Progression Arithmétique*. Or, il arrive, après 5 années et 7 mois, qu'ils veulent se quitter de consentement mutuel, pourvu que le paiement aura lieu suivant la condition prémentionnée; *On demande* comment ce payement doit être réglé. *Rép.* Le Valet doit payer à son Maître $18\frac{317}{336}$ £ß.]

On trouve ce problème à la p. 460 de l'ouvrage suivant: „Arithmetica Van Mr. Johan Coutereels Van Antwerpen; Nu nieuwelijcx oversien, alle Questien na-gerekent, en van ontallicke fauten gesuyvert; Item vermeerdert met *d'Algebraïsche* werckingen, uyt het Fransche Exempelaer over-geset; met by-voeginghe van verscheiden andre fraeye Questien, en noodige annotatien. Door Cornelis Fr. Eversdyck, Reken-meester's Lants ende Graeffelijckheyts van Zeelant. Tot Middelburgh, Bij Jaques Fierens, Anno MDCLVIII. Met privilegie voor tien jaren."

3) Cornelis Fransz. Eversdyck appartenait à une famille distinguée de la Zélande. Il naquit à Goes le 20 mai 1586 et mourut à Middelbourg le 19 décembre 1666. Élève de Johan Coutereels, il était l'auteur de plusieurs traités d'arithmétique pratique.

4) Johan Coutereels d'Anvers s'établit, vers 1594, à Middelbourg en Zélande, où il enseigna les mathématiques. De son traité d'arithmétique, publié en 1599 chez Symon Moulert à Middelbourg, des réimpressions hollandaises parurent en 1606 et en 1610, tandis que l'édition française, mentionnée dans le titre de l'édition de Eversdyck, citée dans la note 2, parut en 1620.

heeft in als $3570x$, hetwelc gefeght wert foo veel meer te fijn dan hetgeen hij fijn meester most geven, dat aen hem te weten de knecht noch 40 gl. komt. Ergo

$$3570x - 40 \infty 1554x + 140$$

m. $x \infty \frac{15}{168}$ van een gulden. Dit wint hij ten eijnde van de eerste maendt.

67 getal der maenden van 5 jaer 7 maend.

$\frac{1005}{168}$ fooveel wint hij de 67ste maendt.

168
34 m.

dus wint hij in al de 67 maenden $\frac{34170}{168}$ dat is $203\frac{66}{168}$ g.

In 36 maenden nu geeft hij fijn meester $666x + 60$ dat is $\frac{20070}{168}$ gl. hoe veel in 67 maenden? komt $222\frac{157}{168}$ [1]); hier dan afgetrocken hetgeen fijn meester hem fchuldigh is te weten $203\frac{66}{168}$, Rest $19\frac{91}{168}$ [2]) gl. dat de knecht aen de meester fchuldigh is.

Traduction:

ou 84 mois, eft égal à $3570x$, fomme qui furpaffe, ainfi qu'il a été dit, ce que le valet doit donner à fon maître de tant qu'il lui (favoir au valet) revient encore 40 florins. Par fuite, on a $3570x - 40 = 1554x + 140$. On trouve x (c'eft-à-dire ce que le valet gagne dans le premier mois) égal à $\frac{15}{168}$ d'un florin. Multipliant par 67 le nombre de mois des 5 années et 7 mois, il fuit qu'il gagne $\frac{1005}{168}$ dans le 67ième mois. Par fuite, multipliant par 34, on voit que dans les 67 mois enfemble il gagne $\frac{34170}{168}$, ou $203\frac{66}{168}$ fl.

Or, en 36 mois il donne à fon maître $666x + 60$, favoir $\frac{20070}{168}$ fl. Combien donc en 67 mois? Il vient $222\frac{157}{168}$ [1]). Si l'on diminue cette fomme de ce que fon maître lui doit, favoir $203\frac{66}{168}$, il refte $19\frac{91}{168}$ [2]) fl. que le valet doit au maître.

---

[1]) En vérité on trouve à l'aide de la proportion indiquée: $222\frac{113}{336}$.

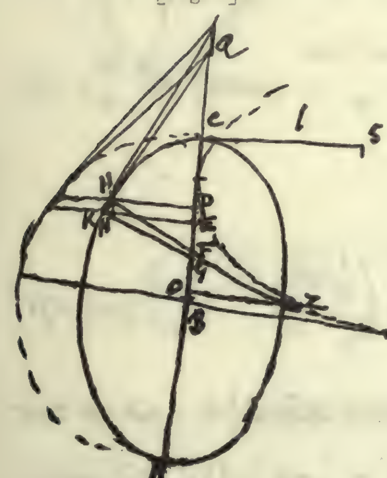
[2]) Lisez: $18\frac{317}{336}$. La solution d'Eversdyck (voir la note 2 de la p. 384) est donc exacte. Si celle de Huygens en diffère, c'est à cause d'une erreur de calcul.

XV [1].

[1659.]

[*Recherches sur la théorie des développées.*]

[Fig. 1].



§ 1 [2].

AC ∞ a; l. r. CS ∞ b; BD ∞ c; BE ∞ d.

AB [3] (a) [ad] CS (b) [ut] BD (c) [ad] DF $\left(\frac{bc}{a}\right)$ [4]

AB [3] (a) [ad] CS (b) [ut] BE (d) [ad] EG $\left(\frac{bd}{a}\right)$

DF $\left(\frac{bc}{a}\right)$ f[ubtr]. DE ($c-d$); EF $\left(\frac{bc}{a}-c+d\right)$

ex EG $\left(\frac{bd}{a}\right)$; FG $\left(\frac{bd}{a}-\frac{bc}{a}+c-d\right)$

---

[1]) La Pièce, que nous avons divisée en paragraphes, est empruntée aux pp. 181—185, 192—208 et 226 du Manuscrit A.

[2]) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la développée de l'ellipse. La méthode suivie pour déterminer cette courbe est expliquée par lui dans la „Prop. XI" de la „Pars tertia" de son „Horologium Oscillatorium" (p. 81—82 de l'édition originale). Pour l'exposer en quelques mots, soit R le point où les lignes KE et HN (parallèle à l'axe BC) de la Fig. 1 se coupent, Z le point d'intersection des normales consécutives HF et KG; on a alors $\frac{HZ}{FZ}=\frac{HN}{FG}=\frac{HN}{HR}\times\frac{DE}{FG}=\frac{QG}{QE}\times\frac{DE}{FG}$. Par suite, afin de connaître le point Z de la développée, qui correspond au point H de l'ellipse, il suffira de déterminer les deux rapports $\frac{QG}{QE}$ et $\frac{DE}{FG}$. Or, dans la présente Pièce, Huygens commence par chercher le deuxième rapport, qu'il trouve égal à $\frac{a}{a-b}$; ensuite il remplace le premier rapport par $\frac{QF}{QD}$ dont il ne diffère qu'insensiblement à cause de la situation rapprochée des points K et H.

[3]) Lisez AC.

[4]) Calcul de la sous-normale. La formule se déduit facilement de celle pour FC de la p. 317 en substituant b pour r, a pour q et $\frac{1}{2}a-c$ pour x.

DE $(c-d)$ [ad] FG $\left(\frac{bd}{a}-\frac{bc}{a}+c-d\right)$ [ut] $ac-ad$ [ad] $bd-bc+ac-ad$ [i. e. ut] a [ad] $a-b$.

[Fig. 1.]

DC $\left(\frac{1}{2}a-c\right)$; DA $\left(\frac{1}{2}a+c\right)$. [DA – DC] $(2c)$ [ad] DC $\left(\frac{1}{2}a-c\right)$ [ut] AC (a) [ad] CQ $\left(\frac{\frac{1}{2}aa-ac}{2c}\right)$ [1]); CQ $\frac{\frac{1}{2}aa-ac}{2c}$ ad[de] CD $\frac{1}{2}a-c$; QD $\frac{\frac{1}{2}aa-2cc}{2c}$ [adde] DF $\frac{bc}{a}$; QF $\frac{\frac{1}{2}aa-2cc}{2c}+\frac{bc}{a}$.

ratio HZ ad ZF componitur ex rationibus QF $\left(\frac{\frac{1}{2}aa-2cc}{2c}+\frac{bc}{a}\right)$ [ad] QD $\left(\frac{\frac{1}{2}aa-2cc}{2c}\right)$ et DE ad FG [h. e.] a ad $a-b$ [2]). Ergo eſt ea quæ $\frac{1}{2}a^3-2acc+2bcc$ [ad] $\frac{1}{2}a^3-2acc-\frac{1}{2}aab+2bcc$. Ergo HF ad FZ ut $\frac{1}{2}aab$ [ad] $\frac{1}{2}a^3-2aac-\frac{1}{2}aab+2bcc$ [h. e.] [ut] $\frac{1}{2}aab$ [ad] $\overline{2a-2b}$ in $\frac{1}{4}aa-cc$.

HF ad FZ [componitur] ex $\frac{1}{4}aa$ [ad] $\frac{1}{4}aa-cc$ [et] b [ad] $a-b$ [3]).

---

[1]) Cette proportion résulte immédiatement de celle (DA : DC = QA : QC) qu'on trouve formulée dans la „Prop. XXXVI" du „Lib. I" des „Con." d'Apollonius; voir la p. 26 verso de l'édition de Commandin.

[2]) Consultez la note 2 de la page précédente.

[3]) À l'aide de cette relation il est possible de construire la développée de l'ellipse point par point; mais Huygens désire connaître l'équation de cette courbe afin de savoir si elle est algébrique et jusqu'à quel degré son équation s'élève. À cet effet il prend pour origine le point V de la Fig. 2, posant $VO=x$, $OZ=y$. Or, afin de trouver le point V, il suffit de remarquer que CV est égal à la limite de $DF=\frac{bc}{a}$ pour $BD=c=\frac{1}{2}a$. On a donc $CV=\frac{1}{2}b$.

[4]) Le segment BD est déjà représenté par c (voir la première ligne du présent paragraphe). Or,

[Fig 2.]

$$VO \infty x; \; OZ \infty v; \; BD \infty z$$ [4]).

$$\text{HF ad FZ [h. e.] } \frac{1}{4}aab \text{ [ad] } \overline{a-b} \text{ in } \overline{\frac{1}{4}aa - cc}$$

$$\text{[ut] DF} \left(\frac{bz}{a}\right) \text{ ad FO} \left(\frac{\overline{az-bz} \text{ in } \overline{\frac{1}{4}aa-cc}}{\frac{1}{4}a^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{lr} \frac{1}{2}a - z - \frac{1}{2}b & \text{DV} \\ \frac{bz}{a} & \text{DF} \\ \frac{\overline{az-bz} \text{ in } \frac{1}{4}aa-cc}{\frac{1}{4}a^3} & \text{FO} \end{array}\right\} \text{ad[de]}$$

$$VO \frac{ccbz - accz + \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{8}a^3b}{\frac{1}{4}a^3} \infty x; \; z \infty \frac{\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^3b - a^3x}{4acc - 4bcc}$$

$$a \text{ [ad] } b \text{ [ut] } aa - zz \text{ [ad] } \frac{aab - bzz}{a} \text{ q.DH}$$ [5])

---

il semble que Huygens n'a remarqué cette double représentation que beaucoup plus bas (l. 7 de la p. 390), où il pose $c = z$.

[5]) Huygens applique ici la „Prop. XXI" du „Lib. I" des „Con." d'Apollonius (voir la note 3 de la p. 340); malheureusement il écrit pour le troisième terme de la proportion $aa - zz$, au lieu de $\frac{1}{4}aa - zz$, et cette erreur fausse les calculs qui suivent. Ainsi l'équation finale à laquelle il arrive dans le cas général devient, après correction:

$$\frac{bvvy + 2aypp + ay^3}{2apyy - bpvv + ap^3} \infty \sqrt{C.\frac{y}{p}}.$$

On en déduit:

$$(bv^2 + 2ap^2 + ay^2)^3 y^2 - (2ay^2 - bv^2 + ap^2)^3 p^2 = 0.$$

Il est vrai que cette équation est du huitième degré tandis que la développée de l'ellipse est une courbe du sixième degré, comme Huygens lui-même l'a trouvé plus tard (comparez la note 5 de la p. 394); mais, lorsqu'on y substitue $-p^2$ pour y^2, on voit qu'elle est divisible par $y^2 + p^2$, et l'équation qui reste est alors, en effet, identique à l'équation bien connue de la développée de l'ellipse.

Ajoutons que Huygens a été plus heureux dans le cas de l'hyperbole, qui est traité dans le paragraphe qui suit.

[Fig. 2.]

$$\text{q.DF}\left(\frac{bbzz}{aa}\right)\text{ [ad] q.DH}\left(\frac{aab-bzz}{a}\right)\text{ [ut]}$$

$$\text{q.FO}\left(\frac{zz\text{ in qu.}a-b\text{ in qu.}\frac{1}{4}aa-cc}{\frac{1}{16}a^6}\right)$$

$$\text{[ad] qu.OZ }(vv)$$

$$ab\text{ [ad] }aa-zz\text{ [ut] }\frac{\text{qu.}a-b\text{ in qu.}\frac{1}{4}aa-cc}{\frac{1}{16}a^4}$$

[ad] vv [1])

ſit $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \infty p$ [∞] BV. ergo $z \infty \frac{pa^3-a^3x}{8pcc}$. ſit $y \infty p-x \infty$ BO [2]) ergo $z \infty \frac{a^3y}{8pcc}$. ſed c eſt ∞z. $z^3 \infty \frac{a^3y}{8p}$.

$$ab\text{ [ad] }aa-\sqrt{C\,\frac{a^6yy}{64pp}}\text{ [ut] }\frac{4pp\text{ in qu.}\frac{1}{4}aa-a\sqrt{C\,\frac{a^3yy}{64pp}}}{\frac{1}{16}a^4}\text{ [ad] }vv$$

$\frac{bvv}{app} \infty 4-\frac{yy}{pp}-9\sqrt{C\,\frac{yy}{pp}}+6\sqrt{C\,\frac{y^4}{p^4}}$. ſit $\sqrt{C\,\frac{y}{p}} \infty e$. $\frac{bvv}{app}-4-\frac{yy}{pp}$ [3]) vocetur f. $f \infty -9ee+\frac{6ey}{p}$; $fe \infty -\frac{9y}{p}+\frac{6eey}{p}$; $\frac{pfe}{y}+9 \infty 6ee$; ſubſtituto valore $-9ee$; f [4]) $\infty -\frac{3}{2}\frac{pfe}{y}-\frac{27}{2}+\frac{6ey}{p}$; $\frac{2pyf+27py}{12yy-3ppf} \infty e$; $e \infty$

$$\infty \frac{2bvvy+19appy-2ay^3}{15apyy-3bpvv+12ap^3} \infty \sqrt{C\,\frac{y}{p}}\text{ [5])}$$

$$\text{ſi } p \infty \frac{1}{4}a \text{ etiam } b \infty \frac{1}{2}a;\ \frac{vvy+\frac{19}{16}aay-2y^3}{\frac{15}{4}ayy-\frac{3}{8}avv+\frac{3}{16}a^3} \infty \sqrt{C\,\frac{y}{p}}.$$

---

[1]) Nous supprimons, ici et ailleurs, quelques calculs intermédiaires.

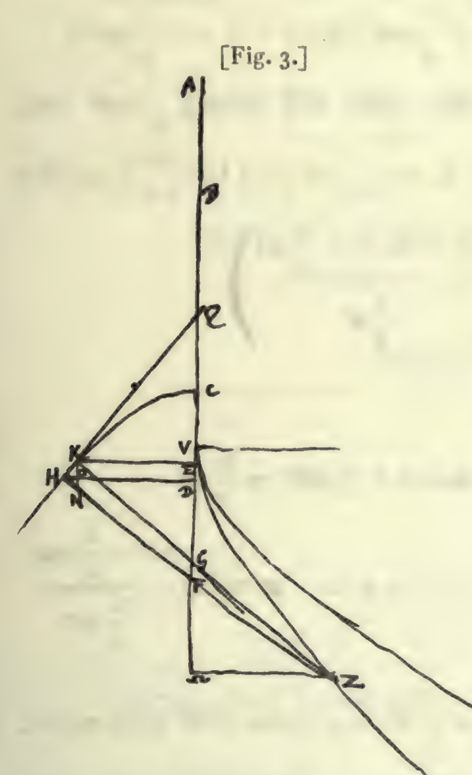
[2]) B peut donc être considéré comme l'origine des coordonnées y et v.

[3]) Lisez: $+\frac{yy}{pp}$. Nous n'indiquons pas les corrections qui devraient résulter de cette inadvertance. Le résultat final resterait inexact à cause de l'erreur signalée dans la note 5 de la p. 389.

[4]) Ici Huygens reprend l'équation $f \infty -9ee+\frac{6ey}{p}$ pour y substituer la valeur de ee déduite de l'équation qui précède.

§ 2 [6]).

[Fig. 3.]



l. tr. ∞ a [7]); l. r. ∞ b; BD ∞ c; BE ∞ d.

DF ∞ $\frac{bc}{a}$ [8]) a[dde] DE ∞ $c-d$, EF [∞] $\frac{bc}{a}+c-d$ ſ[ubtr]. $\frac{bd}{a}$ [∞] EG; GF [∞] $\frac{bc}{a}-\frac{bd}{a}+c-d$.

GF$\left(\frac{bc}{a}-\frac{bd}{a}+c-d\right)$[ad] DE $(c-d)$ [ut] $b+a$ [ad] a

BD (c) [ad] BC $\left(\frac{1}{2}a\right)$ [ut] BC $\left(\frac{1}{2}a\right)$ [ad] BQ $\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{c}\right)$ [9])

DQ [∞] $c-\frac{1}{4}\frac{aa}{c}$ a[dde] DF [∞] $\frac{bc}{a}$;

QF [∞] $\frac{cc-\frac{1}{4}aa}{c}+\frac{bc}{a}$

ratio KN ad GF ſive KZ ad ZG componitur ex rationibus NK ad KO [ſive] QF [ad] QD [ſive] $cc-\frac{1}{4}aa+\frac{bcc}{a}$ [ad] $cc-\frac{1}{4}aa$ et DE [ad] GF [ſive] a [ad] $a+b$.

ergo ratio KZ [ad] ZG [ut] $acc-\frac{1}{4}a^3+bcc$ [ad] $acc-\frac{1}{4}a^3+bcc-$

---

5) Consultez sur ce résultat erroné la note 5 de la p. 389.

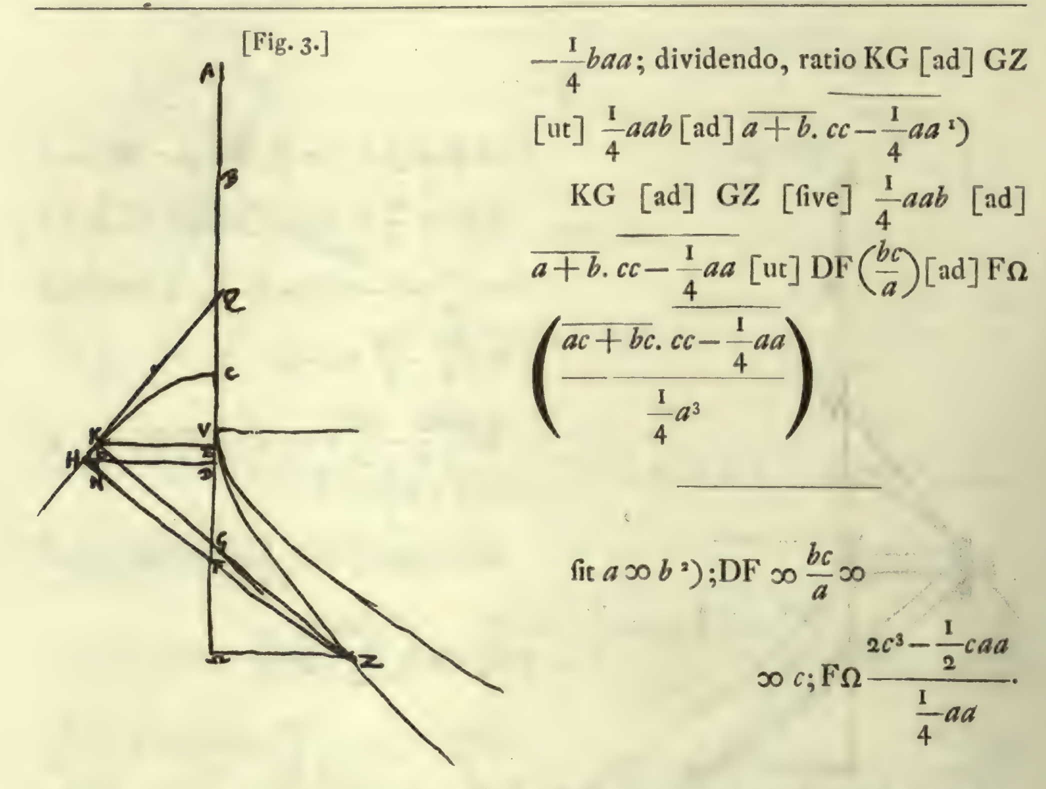
6) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la développée de l'hyperbole.

7) On a donc, dans la Fig. 3, AB = BC = $\frac{1}{2}a$. Si dans cette figure la distance AB est prise plus courte que BC, c'est parce que la figure s'approchait trop du bord de la page du manuscrit pour pouvoir prendre BA égal à BC.

8) Cette expression pour la sous-normale se déduit aisément de celle de la p. 315 en posant $r=b; q=a; x=c-\frac{1}{2}a$.

9) Voir la proposition d'Apollonius citée dans la note 4 de la p. 341.

[Fig. 3.]



$-\frac{1}{4}baa$; dividendo, ratio KG [ad] GZ [ut] $\frac{1}{4}aab$ [ad] $\overline{a+b}.\ \overline{cc-\frac{1}{4}aa}$ [1])

KG [ad] GZ [five] $\frac{1}{4}aab$ [ad] $\overline{\overline{a+b}.\ cc-\frac{1}{4}aa}$ [ut] DF $\left(\frac{bc}{a}\right)$ [ad] FΩ $\left(\frac{\overline{ac+bc}.\ \overline{cc-\frac{1}{4}aa}}{\frac{1}{4}a^3}\right)$

fit $a \infty b$ [2]); DF $\infty \frac{bc}{a} \infty c$; FΩ $\frac{2c^3-\frac{1}{2}caa}{\frac{1}{4}aa}$.

DV ∞ BD − BC − CV [∞] $c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a$ [3]) ∞ $c-a$ [adde] DF (c) [et] FΩ $\left(\frac{8c^3}{aa}-2c\right)$ [fit] VΩ $\infty \frac{8c^3-a^3}{aa}$; $\frac{8c^3}{aa} \infty y \infty$ BΩ [4]); $c \infty \frac{1}{2}\sqrt{C.\,aay} \infty$ BD ∞ DF

qu.DF (cc) [ad] q.DH $\left(cc-\frac{1}{4}aa\right)$ [5]) [ut] q.FΩ $\left(\frac{64cc}{a^4}\text{ in qu.}cc-\frac{1}{4}aa\right)$ [ad] q.ΩZ (vv)

---

[1]) La construction point par point de la développée est donc trouvée. Il s'agit dans la suite de la détermination de son équation.

[2]) Huygens ne continue pas les calculs pour le cas général. Dès ici il se borne à celui de l'hyperbole équilatère.

[3]) On a CV $=\frac{1}{2}a$, puisque CV est égale à la valeur limite de DF pour $c=\frac{1}{2}a$.

[4]) Puisqu'on a BΩ = VΩ + CV + BC $=\frac{8c^3-a^3}{aa}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a=\frac{8c^3}{aa}$.

[5]) Valeur de l'ordonnée de l'hyperbole équilatère correspondant à l'abscisse BD $=c$.

[6]) L'équation de la développée de l'hyperbole équilatère est donc trouvée. Il s'agit maintenant de la rendre rationnelle. À cet effet Huygens pose $\sqrt[3]{ay^2}=e$.

[7]) Cette équation est obtenue en substituant la valeur de ee, déduite de l'équation précédente, dans la première équation $f=3aee-3aae$.

$$aa \,[\text{ad}]\, cc - \frac{1}{4}aa \,[\text{ut}]\, \frac{64\,\text{qu.}cc - \frac{1}{4}aa}{aa} \,[\text{ad}]\, vv$$

$$aa \,[\text{ad}]\, \frac{1}{4}\sqrt{\text{C}\, a^4yy} - \frac{1}{4}aa \,[\text{ut}]\, \frac{64\,\text{qu.}\frac{1}{4}\sqrt{\text{C}\, a^4yy} - \frac{1}{4}aa}{aa} \,[\text{ad}]\, vv$$

$$a \,[\text{ad}]\, \sqrt{\text{C}\, ayy} - a \,[\text{ut}]\, \text{qu.}\sqrt{\text{C}\, ayy} - a \,[\text{ad}]\, vv$$

$$ayy - 3a\sqrt{\text{C}\, aay^4} + 3aa\sqrt{\text{C}\, ayy} - a^3 \infty avv$$ [6])

$$f \infty ayy - a^3 - avv \infty 3aee - 3aae$$

$$fe \infty 3aayy - 3aaee$$

$$\frac{3aayy - fe}{a} \infty 3aee$$

$$f \infty \frac{3aayy - fe}{a} - 3aae$$ [7])

$$e \infty \frac{3aayy - af}{3a^3 + f}$$, reſtitue f

$$\frac{2ayy + a^3 + avv}{yy + 2aa - vv} \infty e \infty \sqrt{\text{C}\, ayy}$$

$0 \infty y^8 - 2a^2y^6 - 3vvy^6 - 24a^2vvy^4 + 3v^4y^4 - 24vva^4yy - v^6yy + 2a^6yy - 3a^4v^4 - - a^8 - 3a^6vv - a^2v^6$. fortaſſe poſſit dividi. poteſt per $yy + aa$ [8]).

$\frac{3aayy - af}{3a^3 + f} \infty e$ [9]); $\frac{3aayye - afe}{3a^3 + f} \infty ee$; $\frac{f + 3aae}{3a}$ [10]) $\infty \frac{3aayye - afe}{3a^3 + f}$

$$3a^3f + 9a^5e + ff + 3aafe \infty 9a^3yye - 3aafe$$

$$\frac{3a^3f + ff}{9a^3yy - 6aaf - 9a^5} \infty e \infty \frac{3aayy - af}{3a^3 + f}$$

$$f^3 \infty 27a^5y^4 - 27a^4yyf - 27a^7y^2$$

$$\frac{f^3}{a^3} \infty 27aay^4 - 27ayyf - 27a^4yy$$

$$\frac{f}{a} \infty yy - aa - vv$$ [11])

---

[8]) Comparez la note 4 de la p. 394 qui suit sur la méthode de Hudde par laquelle ce facteur peut avoir été découvert.

[9]) Huygens reprend l'équation qu'il a trouvée quatre lignes plus haut.

[10]) Cette expression pour ee est déduite de l'équation $f = 3aee - 3aae$ qu'on trouve plus haut.

[11]) Voir, plus haut, au lieu où la lettre f est introduite pour la première fois.

$$y^6 - 3aay^4 - 3vvy^4 + 3a^4yy + 6aavvyy + 3v^4yy - a^6 - 3a^4vv - 3aav^4 - v^6 \infty$$
$$\infty\ 27aavvyy$$

eft nihil aliud quam cub. $\overline{yy - aa - vv} - 27yyaavv\ [\infty\ 0]$ [1])

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv - \frac{1}{12}aa}\ \infty\ e\ ^{2})$$

$$\frac{1}{6}aa + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv + a\sqrt{.}\ \infty\ ee$$

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{.}$$

$$\frac{1}{2}ayy - \frac{1}{2}avv + \frac{2}{3}aa\sqrt{.} + \frac{1}{3}yy\sqrt{.} - \frac{1}{3}vv\sqrt{.}\ \infty\ ayy\ \infty\ e^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv - \frac{1}{12}aa}\ \infty\ \frac{\frac{1}{2}ayy + \frac{1}{2}avv}{\frac{2}{3}aa + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv}\ \text{vix idem}\ ^{3})$$

hæc methodus hic optime adhibetur quia fine Huddenij regula [4]) pervenitur ad æquationem 6 dimenfionum tantum [5]).

---

[1]) Huygens mentionne ce résultat dans la „Prop. X" de la „Pars III" de l'„Horologium oscillatorium", p. 80 de l'édition originale, seulement on y doit lire „DN, x" au lieu de „CN, x".

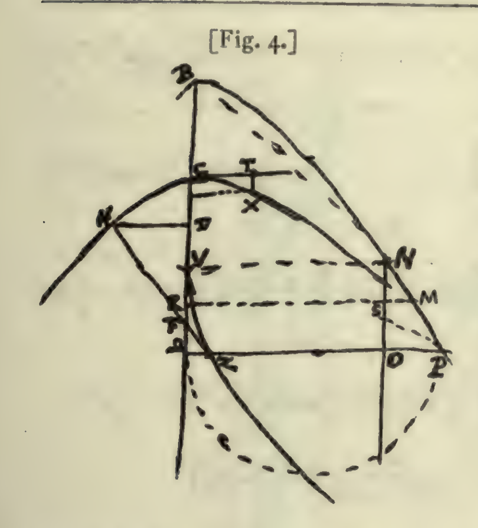
[2]) On obtient ce résultat par la résolution de l'équation quadratique $3aee - 3aae = f$ qu'on trouve au lieu indiqué dans la note 11 de la p. 393. Le choix de la racine est motivée probablement par ce que dans la partie VZ de la développée, que Huygens considère, on a toujours $B\Omega = y > BC = \frac{1}{2}a$.

[3]) Comparez le résultat $(y^2 - a^2 - v^2)^3 - 27a^2y^2v^2 = 0$, obtenu quelques lignes plus haut; mais on vérifie aisément que les deux résultats sont identiques.

[4]) Il s'agit de l'article de Hudde „Epistola prima de reductione æquationum", qui occupe les p. 406—506 de la seconde édition (de 1659) de la „Geometria Renati Des Cartes opera Fr. à Schooten", citée dans la note 5, p. 360 du T. II. C'était surtout la „III Regula", p. 414 de cet article qui a pu servir à découvrir le facteur $y^2 + a^2$ par laquelle l'équation du huitième degré de la p. 393 peut être divisée. Voici la suscription de cette règle: „Regula, Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una *literam aliquam* comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ *litera* non habet eundem dimensionum numerum in diversis Terminis". Or, en posant $v = 0$, la règle amène les expressions $y - a$, $y + a$ et $y^2 + a^2$ comme facteurs possibles de l'équation du huitième degré.

[5]) Remarquons que dans le cas de l'ellipse et dans celui d'une hyperbole quelconque la méthode

[Fig. 4.]



BNP eſt curva Heuratij [6]), ejus lat. r. ∞ ∞ a ∞ BV [7]) ∞ VN. NO parall. BΩ. VZ eſt curva ejus naturæ ut qu. ΩZ in ΩO ſive a, ſit ∞ cub OP. dico cuivis ejus parti rectam æqualem inveniri poſſe. Sit BR media proportionalis inter BV, BΩ, hoc eſt ∞ $\sqrt{ay}$, ergo applicata RM erit $\sqrt{C\!\!\!/\,aay}$. Sumatur BF ∞ RM [8]), vel ſumatur VF ∞ SM, erit FZ tangens in Z. diviſâ BF bifariam in D, ſit DH perpendicularis CF. et occurrat ei producta ZH in H. Erit ZH minus CV ∞ VZ curvæ [9]).

nota CV ∞ CB ∞ $\frac{1}{2a}$.

linea flexilis CVZ evoluta per C deſcribit hyperbolam CH cujus lat. r. et tranſv. ∞ 2VC vel VB.

Si ſumatur CT ∞ OP fiet TX ∞ ΩZ [10]), unde facile erit curvam VZ deſcribere.

---

conduit également à une équation qui ne s'élève pas au dessus du sixième degré. C'est donc bien probablement en appliquant cette méthode que Huygens a obtenu ce même résultat, qu'il formule dans la „Prop. X" de la „Pars III" de l'„Horologium oscillatorium", p. 80 de l'édition originale, sans faire connaître les calculs dont il l'a déduit.

[6]) Afin d'expliquer ce qui suit, nous devons remonter à l'équation $ayy - 3a\sqrt{C\!\!\!/\,aay^4} + 3aa\sqrt{C\!\!\!/\,ayy} - a^3 \infty avv$ (voir la ligne 4 de la p. 393), qu'on peut écrire: $(\sqrt{C\!\!\!/\,ay^2} - a)^3 = av^2$. Dans cette équation a représente l'axe réel de l'hyperbole équilatère CH des Fig. 3 et 4, y l'abscisse BΩ et v l'ordonnée ΩZ d'un point quelconque de sa développée VZ. Posant donc $\Omega P = \sqrt{C\!\!\!/\,ay^2}$, $\Omega O = a$, on aura, comme dans le texte, $OP^3 = a\Omega Z^2$. Mais, puisque $\Omega P^3 = a . B\Omega^2$, la courbe BNP, décrite par le point P, sera la „curva Heuratij", c'est-à-dire la courbe dont van Heuraet avait fait connaître la rectification dans l'article „Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas", publié par van Schooten p. 517—520 de l'édition de 1659 de l'ouvrage mentionné dans la note 4.

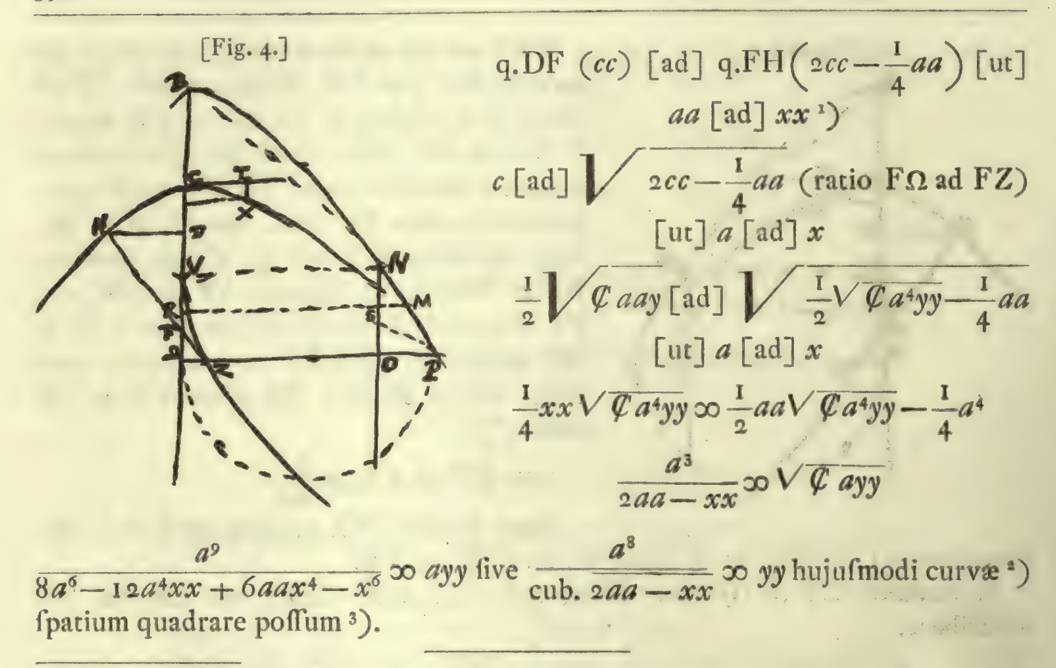
[7]) Puisque $CB = \frac{1}{2}a$, comme demi-axe de l'hyperbole, et $CV = \frac{1}{2}a$ d'après la note 3 de la p. 392.

[8]) Il s'agit de construire à l'hyperbole CH la normale HZ, qui touche la développée au point Z. Or, on a BF = BD + DF, où BD = c (voir la première ligne de la p. 391) et où DF est dans le cas de l'hyperbole équilatère = BD, par suite BF = $2c$; mais on a trouvé plus haut (voir la troisième ligne d'en bas de la p. 392) $\frac{8c^3}{aa} = y = B\Omega$; donc $BF = \sqrt[3]{a^2y} = RM$.

[9]) À cause de la théorie des développées dont Huygens venait de découvrir les principes.

[10]) On a $CT^3 = OP^3 = a.\Omega Z^2 = a.TX^2$; au lieu d'exécuter la construction à l'aide de l'hyperbole, Huygens aurait donc dû se servir de la courbe BNP, comme c'était évidemment son intention. De cette manière, en considérant la courbe BNP comme donnée, Huygens était en possession d'une méthode très simple de construire la courbe VZ par points.

[Fig. 4.]



q.DF (cc) [ad] q.FH$\left(2cc-\frac{1}{4}aa\right)$ [ut]
aa [ad] xx [1])

c [ad] $\sqrt{2cc-\frac{1}{4}aa}$ (ratio FΩ ad FZ)
[ut] a [ad] x

$\frac{1}{2}\sqrt{\text{Ȼ}\,aay}$ [ad] $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\text{Ȼ}\,a^4yy}-\frac{1}{4}aa}$
[ut] a [ad] x

$$\frac{1}{4}xx\sqrt{\text{Ȼ}\,a^4yy} \infty \frac{1}{2}aa\sqrt{\text{Ȼ}\,a^4yy}-\frac{1}{4}a^4$$

$$\frac{a^3}{2aa-xx} \infty \sqrt{\text{Ȼ}\,ayy}$$

$\frac{a^9}{8a^6-12a^4xx+6aax^4-x^6} \infty ayy$ ſive $\frac{a^8}{\text{cub. } 2aa-xx} \infty yy$ hujuſmodi curvæ [2]) ſpatium quadrare poſſum [3]).

---

[1]) Afin d'expliquer cette dernière partie du présent paragraphe, remarquons d'abord que la rectification d'une courbe donnée entraîne nécessairement la quadrature d'une autre courbe. Or, il est clair que la développée de l'hyperbole est algébriquement rectifiable puisque sa longueur VZ (Fig. 4) est égale à la différence HZ—VC. Quelle est donc la courbe correspondante dont la quadrature dépend de la rectification de cette développée? Voilà la question que Huygens se pose pour le cas de l'hyperbole équilatère.

Soit ds un élément de la développée; on a alors $\frac{ds}{dy}=\frac{\text{FZ}}{\text{F}\Omega}$, où $\text{B}\Omega=y$. Posant donc $\frac{ds}{dy}=$ $=\frac{x}{a}=\varphi(y)$, il est évident qu'on peut carrer la courbe $x=a\varphi(y)$, parce que pour cette courbe $xdy=ads$. Il s'agit donc, pour trouver la courbe cherchée, d'exprimer x en fonction de y à l'aide de la relation $\frac{a}{x}=\frac{dy}{ds}=\frac{\text{F}\Omega}{\text{FZ}}=\frac{\text{DF}}{\text{FH}}$, c'est-à-dire, en employant les notations indiquées au commencement de ce paragraphe, $\frac{a}{x}=\frac{c}{\sqrt{2c^2-\frac{1}{4}aa}}$, puisque dans le cas de l'hyperbole équilatère $\text{DF}=\text{BD}=c$ et $\text{FH}=\sqrt{\overline{\text{DF}}^2+\overline{\text{HD}}^2}=\sqrt{2c^2-\frac{1}{4}a^2}$, tandis que $c=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2y}$ d'après la note 8 de la page précédente.

[2]) Voir plus loin (Fig. 5) la construction de cette courbe.

[3]) Remarquons qu'on a, en effet, $\int\frac{a^4}{(\sqrt{2a^2-x^2})^3}dx=\frac{a^2x}{2\sqrt{2a^2-x^2}}$.

[4]) Construction de la courbe $y=\frac{a^4}{(\sqrt{2a^2-x^2})^3}$.

[5]) Dans ce paragraphe nous réunissons les renseignements que les manuscrits nous donnent sur l'invention, en 1659, de la théorie générale des développées et des courbes parallèles. En partie ils ont servi d'avant-projet pour les „Definitiones I—IV" et les „Prop. I—IV" de la „Pars

[Fig. 5.]

ED⁴) eſt $\frac{1}{8}$ circf.; AB ∞ BE [∞ a]; EG parall. BD. CF, CO, CP, CQ, CR ſunt continue proport.^es

ERS curva per puncta ita inventa ut R deſcripta eſt. dico ſpatij inter hanc et rectam ET, vel GV interjacentis partem quamvis quadrari poſſe.

AC ∞ x; CR ∞ y; CF ∞ z ∞ $\sqrt{2aa - xx}$.

§ 3 ⁵).

[Fig. 6.]

∠ DAB eſt rectus⁶).
AD eſt tangens in D.
CG tang. in G.
DF + FG ||⁷) DG.
AF + FG || ADG
ſive CG
aufer utrinque FG.
Ergo FA || FC.
Ergo FB || FC.
Ergo punctum C citra B.


[Fig. 7.]

HCD eſt recta.
∠ DAH rectus.
HE recta || HE curva.
HE recta + EC || HE curva + EC, hoc eſt HA. HC recta || HA. HC || HD.
C citra AD rectam.

III" de l'„Horologium oscillatorium" (voir les p. 59—65 de l'édition originale de 1670), desquelles elles s'écartent toutefois sur quelques points.

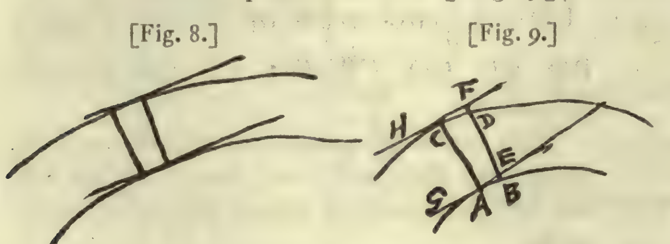
⁶) Comparez à cette première partie, qui se rapporte aux figures 6 et 7, la Prop. I (p. 60 de l'„Hor. osc.") dont elle constitue l'avant-projet. Ainsi les courbes DG et EH représentent une même développée; la courbe AC (dans les deux figures) deux parties consécutives (celle à droite et celle à gauche du point A) de la développante. En effet, Huygens démontre que ces deux parties se trouvent du même côté de la droite AB ou AD, qui est perpendiculaire à DA ou AH, d'où il conclut dans la proposition citée, que la développante est coupée orthogonalement par la tangente à la développée.

⁷) Ce signe est équivalent au signe moderne >.

[Theorema I.]

Si ſit curva quædam AB [Fig. 9], et alia item curva CD illa exterior, hoc eſt cujus cavitas reſpiciat convexitatem curvæ AB. Sit autem CD curva ita comparata ad curvam AB, ut ſi ducantur à quibuslibet hujus punctis

[Fig. 8.] [Fig. 9.]



velut A et B rectæ AC, BD quæ curvæ AB inſiſtant ad angulos rectos, atque ex alia parte occurrant curvæ CD, ut inquam, hæ omnes ita ductæ inter ſe æquales ſint. dico easdem etiam curvæ CD ad rectos angulos occurrere [1]).

Ut hoc demonſtretur de quavis linea ita ducta, puta AC, ducatur GAE ipſi AC ad angulos rectos, quam quidem conſtat tangere curvam AB in A. per C autem agatur HCF ipſi GAE æquidiſtans, ac proinde quoque ipſi AC ad angulos rectos. Si igitur oſtendatur hanc HCF contingere curvam CD in C, manifeſtum erit eidem curvam ad rectos angulos occurrere rectam AC. Sumatur in CD punctum aliud D quamlibet propinquum ipſi C, per quod ducta intelligatur FDB quæ occurrat curvæ AB ad angulos rectos; rectæ autem HCF in F. Erit ergo DB per hypotheſin æqualis CA. Et cum curva AB jaceat tota ad partem alteram tangentis GAE, curva autem CD ad alteram, neceſſe eſt rectam GAE ſecari à DB. eſto in E. Itaque ED minor erit quam BD, hoc eſt quam AC ideoque minor etiam ipſâ EF, interceptâ inter parallelas AE, CF; quia videlicet AC eſt interceptarum omnium breviſſima. Itaque apparet punctum D cadere ad partem rectæ HCF quæ eſt verſus curvam AB. Eadem autem ratione hoc oſtendetur de quovis puncto in curva CD ſumto [2]). Ergo tota curva CD eſt ad partem eandem ſita rectæ HCF, ac proinde ab hac contingitur in C. quod erat dem.

---

[1]) On ne retrouve pas ce théorème dans l'„Horologium oscillatorium".

[2]) Voir la figure à gauche sans lettres à laquelle la même démonstration est applicable.

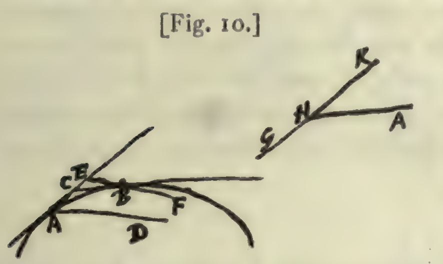
[3]) Dans l'„Horologium Oscillatorium" Huygens n'a pas reproduit la démonstration de ce „Lemma". Quand il applique dans la „Prop. II" (p. 62 de l édition originale) la construction indiquée, il se contente de faire suivre: „quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat".

[4]) On ne rencontre pas ce „Lemma" dans l'„Hor. osc.".

[Lemma I.]

dato puncto A in curva qualibet verſus eandem partem cava, dico aliud inſuper punctum in ea ſumi poſſe ut B, in quo ſi recta curvam contingat ut BC, atque occurrat tangenti in A, angulum cum ea faciat ACB quovis dato majorem [3]).

[Fig. 10.]



datus enim ſit angulus GHA. Ducatur AD quæ faciat ſuper tangentem AC angulum acutum DAC minorem complemento anguli dati GHA ad duos rectos. Manifeſtum itaque eſt curvæ partem quandam ut AB incedere intra angulum CAD, in qua parte accipi poſſit punctum ut B quod magis diſtet àb recta AD, omni alio curvæ puncto inter ipſum B et A ſumto. quare ab eo puncto ſi ducatur BE parallela AD occurrenſque tangenti AC in E, ejus pars BE tota cadet extra curvam, ac proinde vel ipſa tangens erit in B, vel ſi in B tangens alia fuerit ut BC ea incedet inter curvam BA et rectam BE. Si ergo BE tangens fuerit erit angulus BEA una cum EAD duobis rectis æqualis quia BE parallela AD. atqui angulus EAD cum ſit minor complemento anguli GHA ad 2 rectos, additus proinde ang.° GHA minor erit compoſitus duobus rectis, ergo angulus BEA major erit angulo GHA. Atque ita conſtabit jam propoſitum, quoniam BE, AE ſunt tangentes curvæ. At ſi BC demum tangens fuerit, erit ang. BCA major adhuc angulo BEC erit enim æqualis ambabus ſimul BEA et EBC, quoniam C cadit neceſſario inter A et E. Ergo ſic quoque conſtat propoſitum.

[Lemma II.]

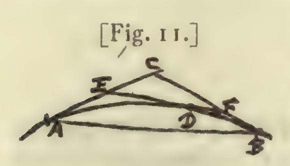
Si fuerit curva in eaſdem partes cava, et angulo tangentium contenta; ab eaque pars abſcindatur; comprehendetur pars reliqua angulo tangentium majori quam ſit angulus totam comprehendens [4]).

[Fig. 11.]

Sit curva ADB tangentium AC, BC angulo comprehenſa ACB. abſcindatur autem pars BD et ſit FDE tangens in D. Ergo angulus comprehendens partem reliquam DA eſt DEA. dico itaque hunc eſſe majorem angulo ACB.

Cum enim D punctum ſit intra triangulum ACB; et per punctum D recta tranſeat EF neceſſe eſt eam utrinque productam occurrere duobus trianguli ACB lateribus, vel uni lateri occurrentem parte alia incidere in angulum aliquem A,

[Fig. 11.]

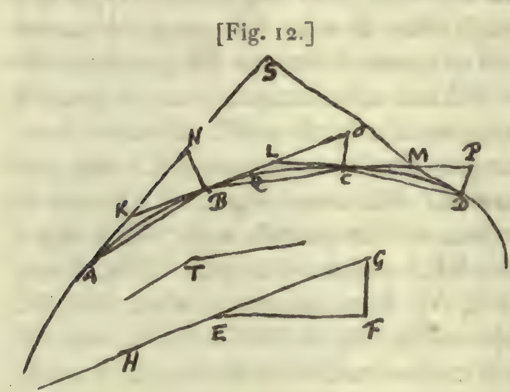


C, aut B. Non poteſt autem in angulum A incidere, quia rectæ ex D in A aut B ductæ non tangunt curvam in D quod tamen ponitur. Sed neque omnino occurrere poteſt EF lateri AB, quia cum tangat curvam ADB verſus eandem partem cavam, debet tota eſſe ad eandem partem curvæ ad quam tangentes AC, CB. Itaque nec in angulum C parte altera incidere poterit EF, quia ſcilicet tunc altera parte occurreret lateri AB. Neceſſario itaque occurrit lateribus AC, CB. efficitque triangulum EFC. Hujus autem angulum exteriorem DEA majorem eſſe conſtat angulo interiori oppoſito C. quod erat dem.

[Theorema II.]

datâ curvæ portione in eaſdem partes cava et tangentium ang. comprenſâ ut AQD poteſt ea in tot partes dividi, ut ſi unicuique parti ſubtenſa recta ducatur ut AB, BC, CD et ab unoquoque diviſionis puncto ducatur recta tangens curvam, ut AN, BO, CP, occurrenſque ei quæ curvæ in puncto diviſionis ſequenti ad angulos rectos inſiſtit, nempe lineis BN, CO, DP, ut inquam ſubtenſa quæque habeat ad ſibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut AB ad BN, BC ad CO &c. rationem majorem quavis ratione propoſita[1]).

[Fig. 12.]



Sit data ratio lineæ EF ad FG; quæ recto angulo ad F jungantur; et ducatur recta GEH. Sumatur autem angulus obtuſus T major angulo HEF, idemque major angulo tangentium quæ curvam comprehendunt, ASD. itaque angulus T ſi ſuper curvæ AQC convexitatem moveri intelligatur, ita ut lineæ ipſum comprehendentes tangant perpetuo curvam; conſtat ſemper minorem curvæ portionem comprehenſurum quam ſit tota AQD; ſit autem minima curvæ portio quam comprehendere dictus angulus poſſit, æqualis AQ curvæ. nam vel ubique æqualem portionem comprehendere eam certum eſt, velut, ſi curva fuerit circuli circumferentia, vel aliquam portionem fore minimam quam poſſit comprehendere. Jam ſi dividatur curva AQD in partes AB, BC, CD quarum ſingulæ ſint minores quam

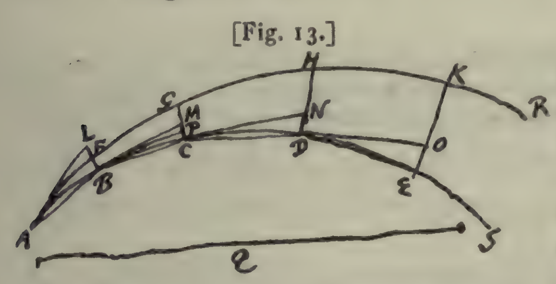
[1]) Comparez la „Prop. II" de la „Pars III" de l'„Horologium oscillatorium", p. 62—63 de l'édition originale.

AQ, et in divisionum punctis ducantur tangentes, quibus curvæ figura quædam rectilinea circumscribatur AKLMD necesse est angulos singulos AKB, BLC, &c. majores esse angulo T. quoniam si partes AB, BC, CD singulæ æquales forent ipsi AQ, anguli tangentium ipsas comprehendentium singuli vel æquales vel minores essent angulo T, nunc autem partes dictæ sunt ipsa AQ minores; ideoque angulos K, L, M ipsas comprehendentes majores esse necesse est angulo T per præc. [2]) Iidem anguli itaque multo majores erunt singuli angulo HEF; Ac proinde productis AK, BL, CM donec conveniant cum rectis BN, CO, DP, quæ super curvam AQC sive super tangentes BK, CL, DM positæ sint perpendiculares, erunt anguli NKB, OLC, PMD, priorum nempe residui ad 2 rectos minores singuli angulo FEG. habent autem △la KBN, LCO, MDP angulos rectos B, C, D. itaque ratio KB ad BN, item LC ad CO, et MD ad DP major erit quæque ratione EF ad FG. Sed AB est major quam BK, quia in triangulo AKB angulus K cui subtenditur AB est obtusus; itaque major multo erit ratio AB ad BN quam EF ad FG. Eademque ratione major ratio BC ad CO, et CD ad DP quam EF ad FG. Quare constat propositum.

[Theorema III.]

Duæ curvæ existere nequeunt quæ sint in easdem partes cavæ alterumque communem terminum habeant, sintque ita ad se invicem comparatæ ut recta omnis quæ alteram earum ad rectos angulos secet eadem producta etiam reliquam ad rectos angulos secet [3]).

[Fig. 13.]



Sint enim si fieri potest ejusmodi lineæ curvæ ABCDES et AFGHKR videlicet quæ sint in easdem partes cavæ, et communem habeant terminum A, atque ita sint comparatæ ut quælibet rectæ BF, CG quæ alteri ad rectos angulos occurrunt, etiam alteri sic occurrant.

Quoniam ergo ab A termino diversæ incedunt, poterit in exteriori curva punctum aliquod sumi ut K [4])

[2]) Voir le „Lemma II" qui précède, p. 399. On lit encore dans le manuscrit au bas de la page: „Lemma quod major angulus minorem portionem complectitur".

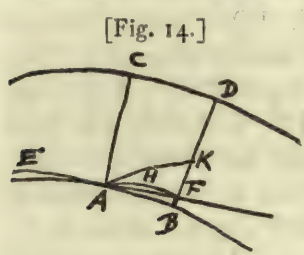
[3]) Comparez la „Prop. III" de la „Pars III" de l'„Horologium oscillatorium", p. 63 de l'édition originale.

[4]) Huygens arrête ici la démonstration parce qu'il s'aperçoit que pour l'achever il a besoin du lemme qu'il fait suivre (voir la p. 402). Or, en admettant que ce lemme soit prouvé, on peut

[Lemma III.]

Si fuerint duæ curvæ communium perpendicularium atque in easdem partes cavæ CD, AB [Fig. 14]. Interiorem autem duarum AB tangat recta EAF in puncto A unde ducatur perpend. AC ad curvam exteriorem: per aliud vero punctum sumtum in recta EF eaque ejus parte quæ inter utramque curvam interjacet ut F, ducatur alia recta curvis perpendicularis DFB. dico hujus partem FD, inter rectam EF et curvam exteriorem interceptam minorem esse recta AC.

[Fig. 14.]



Si enim non, erit DF vel æqualis vel major recta AC. Sit primo æqualis, et intelligatur per A procedere curvam AHF *parallelam curvæ* CD[1]); fieri enim potest cum *CA*, *DB non concurrerint adhuc*[2]), nam occurrunt curvæ AB, in easdem partes cavæ in quas CD. Transibit ergo curva AHF per F. eritque tota ad partes rectæ AF ubi et CD cum sit cava versus easdem partes atque CD. Itaque recta AF nequaquam continget curvam AHF in A: quod est contra propositionem . . . [3]) Cum enim AHF curva sit *parallela* curvæ CD, huic vero occurrat AC ad ang. rectos, eadem AC etiam curvæ AHF ad rectos angulos occurrere deberet[4]).

---

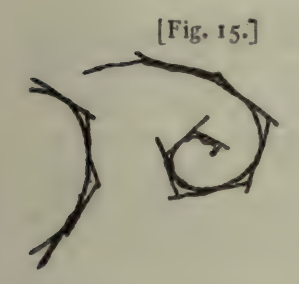
facilement reconstituer la suite de la démonstration à l'aide des indications que la „Prop. III", citée dans la note précédente, nous donne. À cet effet nous supposons que le segment Q soit choisi de sorte qu'on a Q > courbe ABCDE. Ensuite, d'après la proposition précédente, on divise la courbe ABCDE en tant de parties qu'on a partout: $\frac{AB}{LB}, \frac{BC}{MC}, \frac{CD}{ND}, \frac{DE}{EO} > \frac{Q}{KE}$, où AL, BM, CN, DO sont des tangentes à la courbe AS et LB, GC, HD, KE des perpendiculaires aux deux courbes.

On a donc $\frac{AB + BC + CD + DE}{LB + MC + ND + EO} > \frac{Q}{KE}$, et *à fortiori* $\frac{\text{courbe ABCDE}}{LB + MC + ND + EO} > \frac{Q}{KE}$. Mais, d'après le lemme, on a $KE = KO + EO < HN + ND + EO < GM + MC + ND + EO < LB + MC + ND + EO$. On en déduit $\frac{\text{courbe ABCDE}}{KE} > \frac{Q}{KE}$, et par suite courbe ABCDE > Q, ce qui est absurde, puisqu'on a, par supposition, Q > courbe ABCDE.

Ajoutons qu'il nous semble que Huygens n'a pas été satisfait de la démonstration du lemme en question, qu'il n'a pas achevée non plus. En effet, dans la démonstration de la „Prop. III", citée dans la note 3 de la p. 401, il a su éviter l'emploi de ce lemme et sur la dernière des deux pages d'où nous avons emprunté le lemme, Huygens a ébauché quelques figures où l'on retrouve les lignes auxiliaires dont il s'est servi dans cette démonstration.

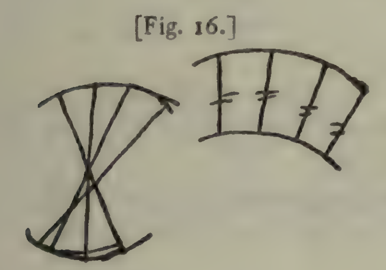
[1]) Voir au troisième alinéa de la p. 403 qui suit la définition des „curvæ parallelæ", dont la

Si sint duæ curvæ *communium perpendicularium* et cavæ in eandem partem nullæ duæ perpendiculares earum sese secabunt intra spatium quod inter curvam utramque interjacet [2]).



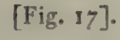
[Fig. 15.]

linea curva in easdem partes cava vocetur quam tangentes omnes rectæ ab eadem parte contingunt [5]).

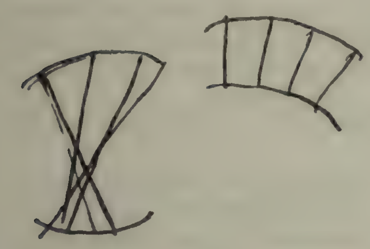


[Fig. 16.]

curvæ parallelæ vocentur quæ ita ad se mutuo sunt comparatæ ut, rectæ omnes quæ alteri earum ad angulos rectos insistunt, et ad reliquam terminantur, sint inter se æquales [6]).



[Fig. 17].



Curvæ communium perpendicularium dicantur quæ ita ad se mutuo sunt comparatæ, ut rectæ omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos etiam alteri ad angulos rectos occurrant.

---

propriété principale avait déjà été démontrée dans le „Theorema I" de la p. 398 sans que Huygens leur avait appliqué cette dénomination.

[2]) Voir à propos de cette remarque les Fig. 16.

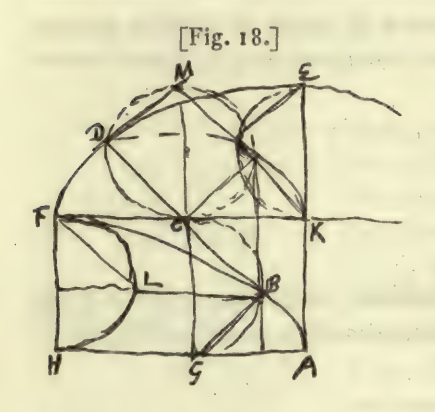
[3]) Il s'agit du „Theorema I" cité dans la note 1.

[4]) Huygens n'achève pas la démonstration, mais il est évident que la ligne AK représente la courbe parallèle à CD, passant par A, dans le cas où FD > AC.

[5]) Comparez la „Definitio I" de la „Pars III", p. 59 de l'édition originale de l'„Hor. oscil."

[6]) Cette définition et la suivante ne se retrouvent pas dans l'„Horologium oscillatorium".

[Fig. 18.]



§ 4 [1]).

[Première Partie.]

Si ABF ſit dimidia cycloides, cui circum applicatum ſit filum ſeu linea flexibilis ABF, eaque firmata in A, capite altero ab F recedens curvam quandam deſcribat ſemper tenſa manens, ea curva, puta FDE, erit dimidia item cycloides ipſi FBA æqualis ſimiliſque.

BCD tangens in B. CD ∞ CB [2]). oſtend. D eſſe in cycloide FE. Sit BL parall. AH, et jungatur LF. Ergo hæc parall. BC [3]) et æqualis. Ergo ▱ eſt FCBL. Sed LB ∞ arcui LF [4]). ergo et CF ∞ arcui LF.

Sit circulus genitor MDC tangens in C rectam FK, ubi et circulus BG. Ergo punctum D eſt in circumferentia MDC. Sed et arcus CD ∞ CB vel FL, hoc eſt rectæ CF. unde punctum D neceſſario in cycloide FDE.

Porro cum BD ſit dupla BC ſiv FL rectæ, çujus dupla quoque eſt curva FB [5]) apparet, rectam BD una cum curva BA æquari curvæ ABF. hoç eſt rectæ AE.

---

[1]) Dans son „Horologium oscillatorium" (voir la Prop. XI de la „Pars tertia", p. 82 de l'édition originale) Huygens nous dit expressément qu'il avait appliqué en premier lieu à la cycloïde la méthode, décrite dans la note 2 de la p. 387, pour déterminer la développée d'une courbe donnée. Il avait trouvé que pour la cycloïde on a HN = 2FG (voir la Fig. 1 de la p. 388) lorsque AC représente la base de la cycloïde, d'où il suit que pour cette courbe FZ devient égal à HF.

Cette assertion de Huygens est encore confirmée par une lettre du 10 février 1662 à Moray où l'on lit (voir la p. 51 du T. IV): „La propriété de la Cycloïde, de ce que par son evolution, il se décrit une courbe pareille n'estoit pas difficile a demontrer apres que Monsieur Wren a decouvert la dimension de cette ligne, mais a trouver methodiquement la dite proprieté comme j'ay fait, il y avoit plus de peine".

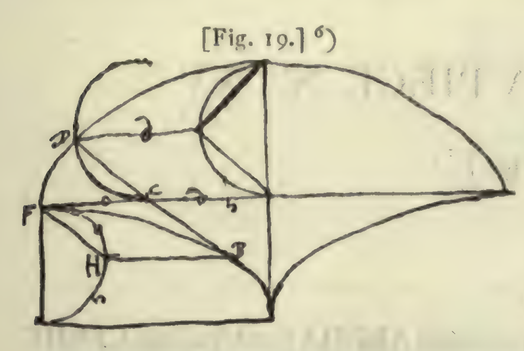
Or, cette première application méthodique de la théorie générale des développées, qui doit donc avoir précédée les calculs des §§ 1 et 2 (p. 387—397), est perdue pour nous, puisqu'on ne la retrouve pas dans les manuscrits que nous possédons.

Ce qu'on y trouve sur la détermination de la développée de la cycloïde, nous l'avons reproduit dans les deux parties qui composent ce § 4.

La Première Partie que nous croyons antérieure à l'autre est empruntée à une feuille détachée, la Deuxième à la p. 226 du Manuscrit A.

[2]) Cette supposition était donc probablement suggérée par le résultat dont nous avons parlé dans la note précédente.

[Fig. 19.] [6])



[Deuxième Partie.]

Ex eo quod BD ∞ BF [7]), hoc eſt per Wrennij inv.m [8]) ∞ 2BC, et BCD tangens, oſtenditur D punctum in cycloide FD [9]).

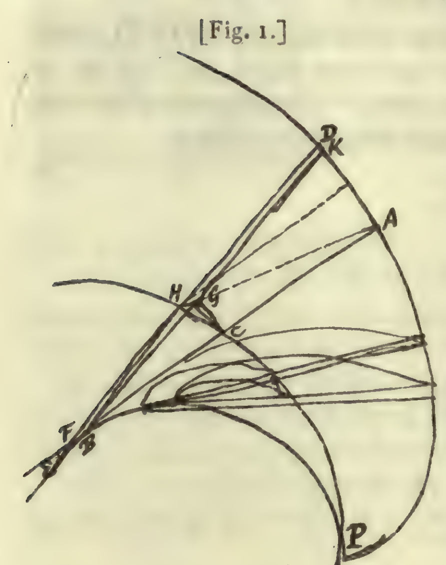
Ex eo quod tangens eſt BCD, oſtenditur occurrere alteri cycloidi ad angulos rectos [10]) hinc ex noſtra methodo ſequitur deſcribi cycloidem.

[3]) Par le théorème de la p. 375.
[4]) Comparez le § 1 de la Pièce N°. XI, p. 347.
[5]) Voir la cinquième ligne de la p. 364.
[6]) Nous avons ajouté à cette figure la lettre H.
[7]) La courbe FD est donc, par définition, une développante de la cycloïde FB.
[8]) Il s'agit de la rectification de la cycloïde par Wren; comparez la note 5 de la p. 367.
[9]) Puisqu'on a évidemment arc CD = arc FH = HB = FC.
[10]) Par la théorie générale des développées; comparez la note 6 de la p. 397.

APPENDICE À LA PIÈCE N°. XV [1]).

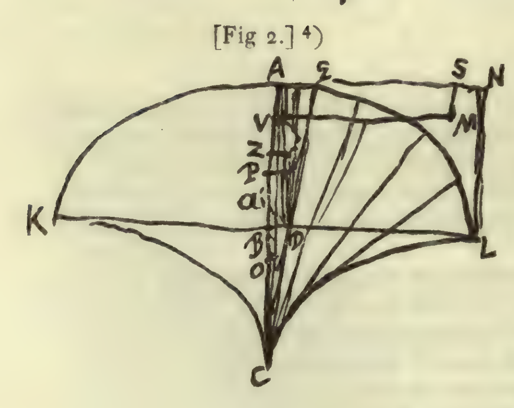
[1679.] [2])

[Fig. 1.]



ratio ſpatij ABEDA [3]) ad ſpatium CBEHC quamlibet minimo differt a ratione ſpatij ABK ad ſpatium ſimile CBG, quia ſpatium ABEDA quamlibet minimo differt a ſpatio ABK, et ſpatium CBEHC quamlibet minimo à ſpatio CBG. Ergo ratio totius DEBPD ad totum HEBPH quamlibet parum differt à ratione ſpatij ABK ad CBG. h. e. à ratione qu.ⁱ AB ad qu. CB. Ergo eſt eadem.

[Fig 2.] [4])



nota ratio ſolidi ex BAL ad ſolid. ex BCL quæ 5 ad 1 [5]). et ratio plani BAL ad plan. BCL quæ 3 ad 1. hinc ratio BP ad BO quæ 5 ad 3 [6]). Ergo et BP ad AV [7]) ut 5 ad 3. Sit AZ $\infty \frac{1}{2}$AB. Ergo VZ ad ZP ut 3 ad 1 [8]). ſit AB ∞ d. BP ∞ ∞ a. Ergo AV $\infty \frac{3}{5}a$. Hinc [9]) $a \infty \frac{5}{12}d$.

[ZP] $\frac{1}{2}d - a$ ad [ZV] $\frac{1}{2}d - \frac{3}{5}a$ ut 1 ad 3

$$\frac{3}{2}d - 3a \infty \frac{1}{2}d - \frac{3}{5}a$$

$$d - 3a \infty -\frac{3}{5}a$$

$$5d \infty 12a$$

$$\frac{5}{12}d \infty a \quad ^{10})$$

XVI.

1659.

[*Construction de la tangente à la quadratrice de Dinostrate.*]

6 Nov. 1659 [11]).

---

[1]) Cet Appendice emprunté à la p. 166 du Manuscrit E contient une nouvelle détermination du centre de gravité de l'espace limité par la cycloïde et par sa base (comparez le § 5 de la Pièce N°. XI, p. 353—355). Cette fois la détermination est basée sur les propriétés de la développée de la cycloïde.

[2]) D'après le lieu que cet Appendice occupe dans le Manuscrit E.

[3]) Dans la figure de Huygens la courbe DAP représente une epicycloïde, HC sa base circulaire, EB sa développée. Nous reviendrons plus tard sur les recherches de Huygens sur les épicycloïdes. Pour le moment il suffit de rappeler que pour une telle courbe le rapport $\frac{AB}{CB}$ est constant.

[4]) Nous avons ajouté la lettre K à cette figure.

[5]) Il s'agit des solides de révolution des espaces BAL et BCL tournant autour de la ligne KL qui est la base de la cycloïde KAL. En effet, considérons les espaces infinitésimaux de la Fig. 2 qui correspondent aux espaces HCDA et EHCB de la Fig. 1. D'après le théorème qui précède ils sont ici dans le rapport de 3 à 1, puisque dans le cas de la cycloïde on a BA [Fig. 1] $=$ 2CB (voir, p. 405, la Deuxième Partie du § 4). Or, il est facile de montrer que les distances à KL [Fig. 2] de leurs centres de gravité sont dans le rapport de $\frac{5}{9}$ à $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire de 5 à 3; d'où il suit, par le théorème de Guldin, que les solides engendrés par ces espaces infinitésimaux dans leur rotation autour de la base de la cycloïde sont dans le rapport constant de 5 à 1 et, par conséquent, que les solides engendrés par les espaces BAL et BCL sont dans ce même rapport.

[6]) Par le théorème de Guldin, P étant le centre de gravité de l'espace KAL, et O celui de l'espace KCL.

[7]) V est la projection, sur l'axe AB de la cycloïde, du centre de gravité M du triligne ANL. On a donc BO $=$ AV à cause de la congruence des trilignes CBL et LAN.

[8]) Z est le centre de gravité du rectangle KN circonscrit à la cycloïde KAL; V et P sont les centres de gravité des parties qui composent ce rectangle, savoir: l'espace cycloïdal KAL égal à trois quarts du rectangle (voir le premier alinéa de la p. 348), et l'ensemble des deux trilignes, comme ANL, qui restent.

[9]) Voir le calcul qui suit.

[10]) Résultat conforme au résultat obtenu au § 5 de la Pièce N°. XI; voir la dernière ligne de la p. 355.

[11]) Le texte de cette Pièce, qu'on trouve à la p. 256 du Manuscrit A, a déjà été reproduit dans la note 19 de la p. 440 du T. X. Nous nous bornerons donc ici à ajouter aux données de cette note que la quadratrice de Dinostrate est décrite dans les „Mathematicæ Collectiones" de Pappus, dans l'introduction à la „Prop. XXVI" du „Liber IV"; voir la p. 57 recto de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 259 du T. II.

CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES DE VAN SCHOOTEN SUR LA „GEOMETRIA" DE DESCARTES.

ÉDITIONS DE 1649 ET DE 1659.



Avertiſſement.

Quelques-uns des réſultats mathématiques obtenus par Huygens qui ne furent pas publiés par lui-même, parurent parmi les Commentaires que van Schooten ajouta à ſa traduction latine de la „Géométrie" de Deſcartes [1]). C'eſt pourquoi nous croyons devoir reproduire ici les paſſages de ces Commentaires qui ſe rapportent aux travaux de Huygens.

On connaît les relations amicales qui exiſtaient entre le profeſſeur van Schooten et ſon élève depuis l'arrivée de ce dernier à Leiden, en mai 1645, juſqu'au décès de van Schooten, en janvier 1661. Or, van Schooten aimait beaucoup à faire reſſortir les mérites de ſes élèves. Ainſi déjà en 1649, dans la première édition de la „Geometria", il inſéra une „invention" du jeune Huygens en la

---

[1]) Voir quant à la première édition de 1649, la note 1 de la p. 218 de notre T. I. Voici le titre de la deuxième: „Geometria, à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem Unà cum Notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata, Operà atque studio Francisci à Schooten in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata, Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet. Amstelædami, Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, CIƆ IƆC LIX".

Une troisième édition, identique à la deuxième, parut en 1683 „Amstelodami, ex typographia Blaviana".

faisant précéder de quelques mots de louange qui montrent qu'il avait pressenti de bonne heure le grand avenir de son élève [1]).

Cette invention de Huygens consiste dans la remarque, elucidée par un exemple, qu'un problème peut quelquefois se transformer en théorème; savoir dans le cas où tous les points situés à l'extérieur ou à l'intérieur d'une figure donnée satisfont aux conditions posées dans le problème.

C'est à l'âge de 15 ans que Huygens avait fait cette remarque. En effet, on la retrouve [2]) sur une des premières pages du Manuscrit N°. 17, dont nous avons déjà parlé dans l'Avertissement pour les „Travaux divers de Jeunesse" [3]). Lors de la rédaction de cet Avertissement, nous ignorions si ce petit manuscrit avait été commencé avant ou après le départ de Christiaan, en 1645, pour Leiden. Depuis, nous avons été mieux renseignés, grâce à feu M. J. A. Worp, qui a publié, en 1913, des annotations de Constantijn Huygens père, sur les progrès des études de ses fils [4]). On y lit sous l'année 1644: „Dans cette même année je mis Constantyn et Christiaan sous la direction de Stampioen pour leur enseigner les mathématiques. Le succès était singulier, quoique ce fût surtout Christiaan qui excellait. Non seulement qu'il comprenait et retenait facilement toute chose, mais il inventait quotidiennement toutes sortes de choses ingénieuses, qu'il assemblait dans un livret („Boeckjen"), de sorte qu'il y avait lieu de s'en étonner grandement". Or, ce „boeckje" qu'il désigna plus tard dans les mêmes termes à son frère Constantijn [5]) était sans doute le manuscrit N°. 17 [6]).

La participation de Huygens à la seconde édition, de 1659, de la „Geometria"

---

[1]) Voir le passage N°. I, p. 416.
[2]) Voir la p. 25 de notre T. XI.
[3]) Voir la p. 4 du T. XI.
[4]) Voir l'article „De jeugd van Christiaan Huygens, volgens een handschrift van zijn vader" (La jeunesse de Christiaan Huygens, d'après un manuscrit de son père), p. 209—235 du T. 31, 1913, du Journal: „Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam, Gebroeders Binger". On y lit (p. 232): „In ditzelfde jaer" [1644] „stelde ick Constantyn ende Christiaen onder Stampioen, die haer de Mathematique quam leeren, met sonderling succes, hoewel dat meest in uyt muntte Christiaen, die niet alleen alle dingen lichtelijk begreep ende onthiel, maer selfs dagelix allerhande kunstige dingen inventeerde en in een Boeckjen bijeen vergaderde, soo dat men der sich hoogelijk over hadde te verwonderen".
[5]) Voir toujours la p. 4 du T. XI.
[6]) Comparez encore la p. 16 du T. XI au § 8 et la note 1 de la p. 23 du même Tome. Il est

était beaucoup plus active. En effet, comme nous le verrons, elle ne s'est pas limitée aux endroits où elle est expressément mentionnée par van Schooten [7]).

Aussitôt après que Louis Elsevier avait fait savoir à van Schooten, qu'il voulait préparer une nouvelle édition de la „Geometria", celui-ci s'adressa à Huygens pour le prier de lui communiquer les corrections ou modifications qu'il jugerait opportun d'apporter à cet ouvrage [8]). En réponse, Huygens lui envoya, en octobre ou novembre 1654, une copie des annotations qu'il avait faites en marge de son exemplaire [9]).

Outre celles qui se rapportent aux passages que nous reproduisons dans le texte qui suit, on trouve dans cette copie plusieurs autres annotations, plus ou moins importantes, qui ont été utilisées également par van Schooten. Nous en signalons deux, dont l'une a occasionné la note volumineuse CC, p. 182—206 de l'édition de 1659; nous avons citée celle-ci dans la note 3 de l'Appendice, p. 423. L'autre concerne les points d'intersection d'une parabole et d'un cercle [10]). Huygens y traite du cas où trois de ces points coïncident, et fait remarquer que dans ce cas les deux courbes se coupent au point de coïncidence, nonobstant qu'elles y possèdent une tangente commune. On retrouve cette observation à la p. 339 de l'édition en question de la „Geometria".

Au mois de mars 1655, Huygens attira l'attention de van Schooten sur une petite inadvertance commise par Descartes dans sa „Géométrie" et lui proposa de la corriger dans le texte de la nouvelle édition de la „Geometria" ou de l'indiquer dans ses Commentaires [11]). C'est la première de ces alternatives qui fut suivie par van Schooten aux p. 28—29 de l'édition de 1659.

Enfin il y a encore la note BB, p. 179—181, qui fut ajoutée sur l'instigation de Huygens. En effet, celui-ci reçut, en juillet 1656, une lettre de Roberval, où ce savant lui indiqua ce qu'il considérait comme une faute importante commise par

---

maintenant presque certain que la remarque dont nous avons parlé, fut faite indépendamment des leçons de van Schooten, mais il reste possible qu'elle fût inspirée par le passage de la „Géométrie" de Descartes, cité dans le § 8 prémentionné.

7) Voir les passages I—V, reproduits aux p. 416—422 qui suivent.

8) Voir la lettre de van Schooten du 25 octobre 1654 à la p. 301 de notre T. I.

9) Comparez la lettre de Huygens à van Schooten du 29 octobre 1654 et la Pièce N°. 204. p. 303—305 du T. I.

10) Voir le dernier alinéa de la p. 305 du T. I.

11) Voir la lettre du 25 mars 1665, p. 323—324 du T. I.

Defcartes, favoir que Defcartes n'avait pas compris que la folution complète du problème de Pappus à quatre lignes „demande deux fections à la fois, et chacune toute entiere" [1]). Huygens trouva les remarques de Roberval „tres belles et veritables" et il envoya fa lettre à van Schooten avec la recommandation d'utilifer fes remarques pour les Commentaires [2]). Or, pour un fervent admirateur de Defcartes, comme van Schooten, la manière dont Roberval parla du „bon-homme" Defcartes était difficile à digérer. Ainfi, dans fa réponfe, il ne manqua pas de prendre ardemment la défenfe de Defcartes [3]); toutefois, quelques mois plus tard, après avoir reçu une lettre très détaillée de Huygens [4]), où celui-ci renouvela fa recommandation, van Schooten réfolut de fe conformer à l'avis de Huygens [5]); mais il le fit d'affez mauvaife grâce, puifque dans la note BB il ne nomme ni Huygens, ni Roberval, quoiqu'il fuive de très près la lettre de Huygens [6]).

Nous ne voulons pas paffer fous filence une conjecture propofée par Uylenbroek à la p. 3 de fes „Exercitationes mathematicæ et philofophicæ, Fafc. II" [7]) de 1833. D'après cette conjecture on doit lire *Hugenius* au lieu de *Huddenius* à la p. 367 de l'édition de 1659 de la „Geometria". Il s'agit d'expliquer la manière dont les règles de Cardan pour la réfolution des équations cubiques auraient pu être trouvées [8]). Or, dans une lettre du 29 mai 1655, van Schooten avait prié

[1]) Consultez la lettre du 6 juillet 1656, p. 449—451 du T. I. Ajoutons que dans les figures de la „Géométrie" de Descartes (voir les pp. 400 et 402 du T. VI de l'édition de ses Œuvres par Adam et Tannery, ou les pp. 34 et 36, ou 30 et 32, des éditions de la „Geometria" de 1649 ou 1659) qui se rapportent à la solution du problème de Pappus à quatre lignes on ne trouve tracée qu'une seule ellipse ou une seule branche d'hyperbole. Or, si dans ce problème, que nous avons formulé dans la note 1 de la p. 211 du Tome présent, on ne distingue pas les deux directions possibles des lignes en question par un signe différent, il est parfaitement vrai que la solution comprend deux sections coniques complètes.

[2]) Consultez les lettres du 25 juillet et du 27 juillet 1656 de Huygens à van Schooten et à de Roberval, pp. 460—462 et 464—465 du T. I.

[3]) Voir les p. 466—470 du T. I.

[4]) Voir la lettre du 6 décembre 1656, p. 519—524 du T. I.

[5]) Voir sa lettre du 12 décembre, p. 526—527 du T. I.

[6]) Comparez p.e. le „Problema" de la p. 180 de la „Geometria" à celui de Huygens de la p. 523 du T. I.

[7]) Voir la note 2 de la p. 500 du T. VII.

[8]) Voici le passage en question: „Cæterùm ne quid hìc desideretur, sed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutissimus noster Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit".

Huygens de lui communiquer ce qu'il avait imaginé à ce ſujet [9]). En réponſe, Huygens expoſa [10]) à van Schooten une méthode pour la réſolution de l'équation $x^3 \pm px - q = 0$ qui ne diffère pas eſſentiellement de celle qu'on trouve aux p. 367—368 de la „Geometria".

La conjecture d'Uylenbroek ſemble donc bien plauſible. Toutefois nous devons faire obſerver qu'une méthode tout-à-fait analogue fut développée par Hudde lui-même aux p. 499—501 de l'„Epiſtola prima de Reductione Æquationum" d'avril 1658; épître qui fut inſérée par van Schooten dans la nouvelle édition de la „Geometria". Et Hudde ne manque pas d'obſerver, à l'endroit cité, que la règle de Cardan „aurait pu être trouvée de la manière indiquée, quoique peut-être elle fût découverte par d'autres conſidérations" [11]). On voit donc que Hudde s'était occupé du même ſujet. Il eſt vrai que le mot „olim" dans le paſſage en queſtion [12]) paraît exclure une communication ſi récente qu'avril 1658 et s'accorde mieux avec la date du 5 juin 1655 de la lettre de Huygens, mais il eſt poſſible que Hudde eût expliqué verbalement ſa méthode à van Schooten bien avant 1658.

---

[9]) „Rem autem omnium gratissimam præstiteris, si modum quo Cardani regulæ inventæ fuerint perscribere haud graveris"; voir la p. 329 du T. I.

[10]) Voir sa lettre du 5 juin 1655, aux p. 330—331 du T. I.

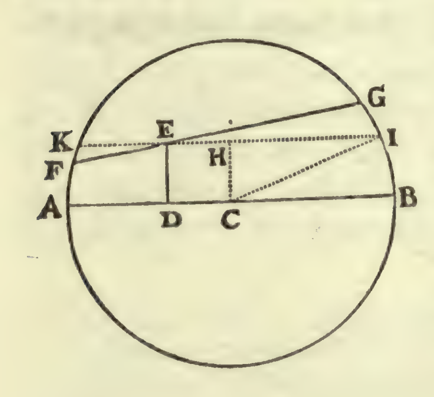
[11]) „Ubi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æquationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri possit"; voir la p. 501 de l'édition de 1659 de la „Geometria".

[12]) Voir la note 8 de la p. 414.

I[1].

1649.

Alterum exemplum [2], quod hìc afferendum duxi, deſumpſi ex inventis Nobiliſſimi & præclari Iuvenis D. Chriſtiani Hugenii, quibus ſibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non niſi magna quæque ab eo expectanda eſſe affirmare non veriti fuerint [3].



Dato Circulo AGB, dataque poſitione diametro AB: invenire extra ipſam punctum E, à quo ſi ad AB demittatur perpendicularis ED, & per idem punctum agatur recta quædam linea FG utrinque à circumferentiâ terminata, ut rectangulum FEG, ſub ſegmentis ejus FE, EG comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ ED, æquetur rectangula ADB, ſub ſegmentis diametri AD, DB.

---

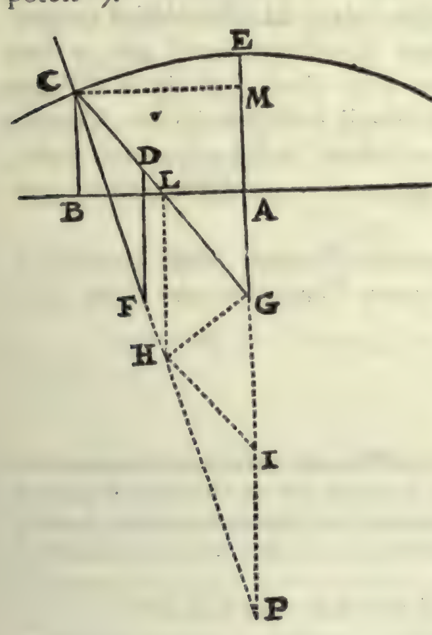
[1]) Nous empruntons ce premier passage aux p. 203—205 de la première édition, de 1649, par van Schooten, de la „Geometria à Renato Des Cartes", ouvrage cité dans la note 1, p. 218 de notre T. I. Le passage fut reproduit avec des modifications peu importantes aux p. 230—231 de l'édition de 1659. L'„invention" de Huygens qu'on y trouve insérée datait déjà de 1644, lorsque Huygens avait l'âge de quinze ans; comparez la p. 412 de l'Avertissement qui précède.

[2]) Il s'agit d'exemples qui doivent servir à élucider le passage suivant de la Géométrie de Descartes: „Et s'il manque deux conditions a la determination de ce point, le lieu où il se trouue est vne superficie, laquelle peut estre, tout de mesme, ou plate ou spherique ou plus composée" (p. 407 du T. VI de l'édition d'Adam et de Tannery). Comparez encore la p. 16 du T. XI au § 8.

[3]) Remarquons qu'en 1649, lorsque cette prédiction fut faite, Huygens n'avait encore rien publié.

Ductâ per E rectâ KI parallelâ ipsi AB, deducatur ex centro C in eam perpendicularis CH, jungatur'que CI. Positâ igitur AC vel CB $\infty\ a$, CD $\infty\ x$, & DE $\infty\ y$: erit HI $\infty \sqrt{a^2 - y^2}$, EI $\infty \sqrt{a^2 - y^2} + x$, & EK $\infty \sqrt{a^2 - y^2} - x$. Unde si multiplicavero EK $\infty \sqrt{a^2 - y^2} - x$ per EI $\infty \sqrt{a^2 - y^2} + x$ fiet rectangulum KEI seu FEG $\infty\ a^2 - y^2 - x^2$. Cui si addatur quadratum ex ED $\infty\ y^2$: 35 *Tertii Elem.*[4]) erit summa $a^2 - x^2 \infty\ a^2 - x^2$, rectangulo ADB, utpote æqualis ei, quod fit ex $a - x$ in $a + x$.

Quia igitur hìc utrique eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri potest æquatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hâc quæstione conditionum, ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quod facilè demonstrari potest [5]).



II [6]).

1659.

Porrò, ut constructio [7]) adhuc brevior evadat, operæ pretium est considerare, rectam ab H ad G ductam ipsi GC esse perpendicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum [8]), deinde sic verum deprehendi [9]):

Hinc talis emergit constructio:

Ductâ CG, secante AB in L, aga-

[4]) Nous avons cité cette proposition d'Euclide dans la note 7 de la p. 251 du T. XI.

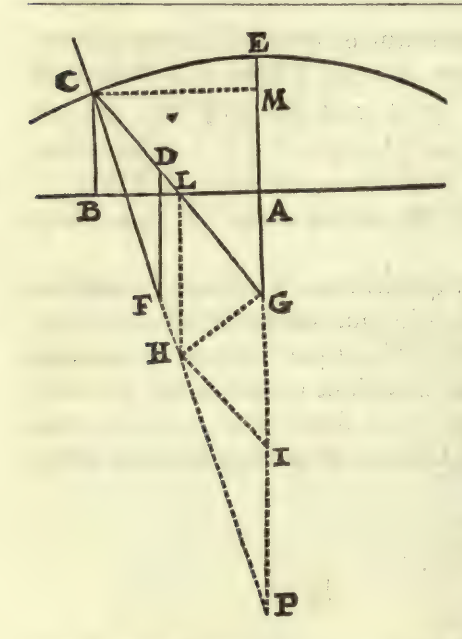
[5]) Nous ne reproduisons pas cette démonstration qui fut rédigée probablement par van Schooten lui même.

[6]) On trouve ce passage aux p. 253—255 de l'édition de 1659 de la „Geometria".

[7]) Il s'agit de la construction, inventée par Descartes, de la normale à la conchoïde CE pour un point quelconque de cette courbe dont G est le pôle et AB la base, de sorte qu'on a CL = AE. On retrouve cette construction de Descartes à la p. 18 de notre T. XI.

[8]) Comparez le premier alinéa de la p. 305 du T. I.

[9]) Nous supprimons cette vérification analytique par van Schooten de l'observation de Huygens.



tur ex L ipsi AG parallela LH, donec occurrat perpendiculari GH in H: erit'que recta HC, quæ ex H per C ducitur, secans quæsita [1]).

Verùm enimverò quoniam lineæ CP alio quoque modo investigari queunt; beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Consiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui Mathematici exemplis aliquot illustravit [2]), atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit [3]): haud abs re fore duxi, si hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti calculo exposuero [4])....... Ubi sciendum, calculum multò abbreviari posse, si in secunda hac operatione multiplicationes, quibus ad *ee* aut e^3 ascenditur, continuè omittantur.

Atque hæc quidem via est, quam & Hugenium secutum fuisse confido [5]), prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius ope hujus ipsius Methodi quæsivisse mihi asseveravit [6]).

---

[1]) On ne trouve, ni dans la Correspondance, ni dans les Manuscrits aucun renseignement sur la manière dont cette construction a été trouvée par Huygens. Elle est identique, comme on le voit, avec la construction moderne la plus simple qu'on obtient facilement par la considération du centre instantané de rotation du segment CL, lequel centre coïncide avec le point H de la figure.

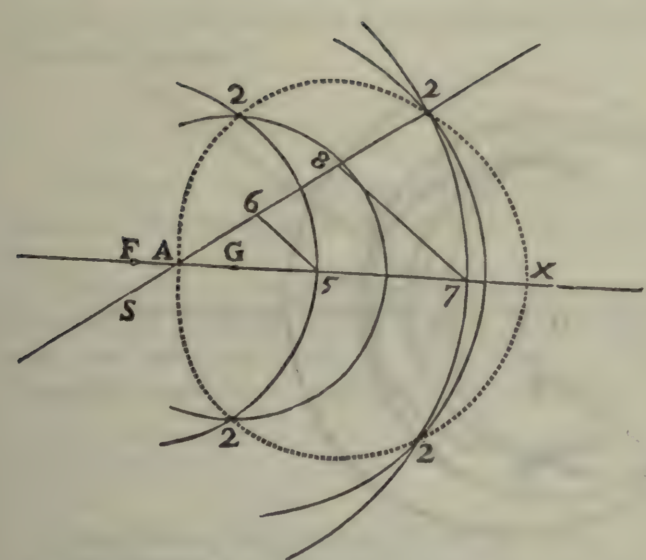
[2]) On peut consulter sur cette méthode la p. 19 du T. XI et les p. 60—61 du T. XII.

[3]) Comparez les p. 19—20 du T. XI.

[4]) Nous supprimons ce calcul, dont voici le résumé: Posant $GA = b$, $EA = CL = c$, $BC = MA = y$, $AP = v$, on trouve $PC^2 = \frac{b^2c^2 + 2bc^2y + c^2y^2}{y^2} - b^2 - 2by + v^2 + 2vy$; expression que nous représenterons par $\varphi(y)$. Or, puisque PC doit être normale à la conchoïde, van Schooten se propose de déterminer la condition sous laquelle cette expression, considérée comme fonction de y, est un minimum. À cet effet il applique la méthode de Fermat, citée dans la note 2; c'est-à-dire, il suppose $\varphi(y) = \varphi(y + e)$, divise par e l'équation qui en résulte après réduction, et pose $e = 0$. De cette manière il trouve $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$. Or, l'abréviation indiquée se rapporte au calcul de $\varphi(y + e)$.

III[7].

1659.



Notavit hìc [8]) Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem [9]) (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cùm nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam 5A ad A6 [10]). Adeo'que radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse [11]). Quod se apertius in tractatu de Dioptricis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus [12]).

---

5) Comparez la note 11 de la p. 48 du T. XI et la Seconde Partie de la Pièce N°. XIV, p. 65—67 du T. XII.

6) Comparez les premières lignes de la Seconde Partie, citée dans la note précédente.

7) Voir la note OO, p. 270 de la „Geometria" de 1659.

8) Comparez le deuxième alinéa de la p. 305 de notre T. I.

9) Il s'agit des ovales de Descartes, sur lesquels on peut consulter les p. 424—439 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes ou les p. 50—65 de l'édition de 1659 de la „Geometria". Comme on sait, Descartes avait découvert que ces courbes pourraient servir à la construction de lentilles aplanatiques. Dans le cas présent l'équation de l'ovale peut s'écrire, en coordonnées bipolaires, $r - f = n\,(r' - g)$, où $r = F2$, $r' = G2$, $f = AF$, $g = AG = AS$ et où $n = \frac{A5}{A6}$ représente l'indice de réfraction.

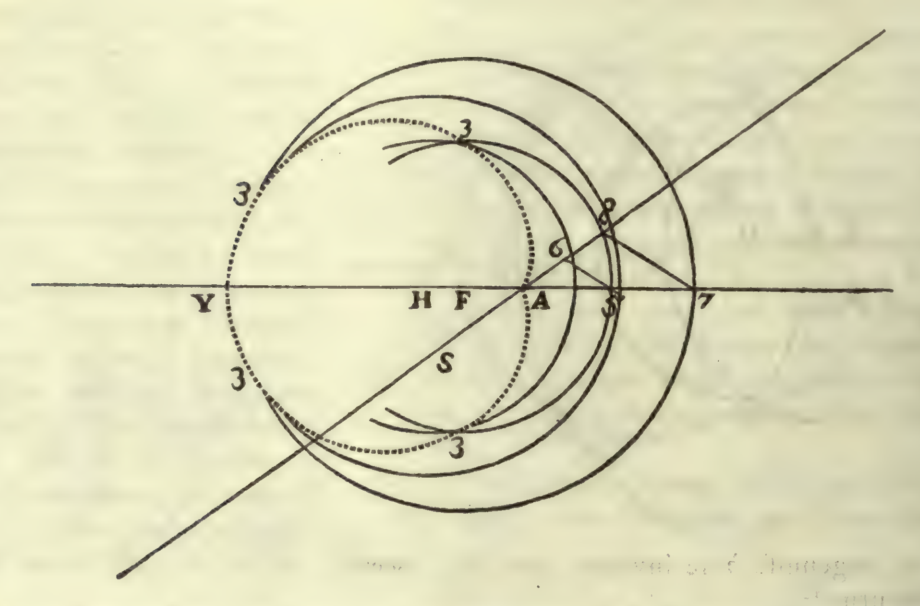
10) En effet, on a alors $f = ng$. Par suite, l'équation se réduit à $r = nr'$, ce qui représente un cercle.

11) C'est cette découverte de Huygens, faite en octobre 1652, qui donna la première impulsion à ses recherches dioptriques; voir au T. XIII les p. XLVI—XLVII de l'Avertissement.

12) Voir les p. 64—67 du T. XIII.

IV [1].

1659.



Ubi [2]) etiam ſciendum, ex poſitione punctorum H & F, quamadmodum Nobiliſſimus Hugenius notavit [3]), contingere poſſe, ut verſùs A convexa exiſtat [4]).

V [5]).

1659.

Hujus rei [6]) elegans exemplum ſuggerere poteſt Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in Scholio Prop.nis

[1]) Voir la note PP, p. 276 de la „Geometria" de 1659.

[2]) C'est-à-dire dans le troisième des cas que Descartes distingue dans la discussion de ses ovales. Ce cas est représenté dans la „Geometria" par la présente figure. Cette fois encore (voir la

30 libri 4ti Collectionum Mathematicarum [7]). In cujus ſolutionem eos, qui id per Conica vel Linearia [8]), hoc eſt, per improprium genus ſolvere quæſiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctiſſimus ac de Mathematicis ſtudiis perinde meritus Alexander Anderſonus [9]) in exercitione ſua 5ta dictum Problema non levibus indiciis ſequentis argumenti fuiſſe innuit, ſe'que ibidem ſcribit Analyticâ ſuâ duce tandem reperiſſe abſque ſolida inclinatione (ut Pappus loquitur) non poſſe definiri: viſum fuit id ipſum hìc loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus iſtis diſſentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim ſi in hujus Problematis ſolutione inveſtiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæſita recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reductibilis, & tamen ſecundùm regulam generalem p. 85 [10])

---

note 9 de la p. 419) l'équation de la courbe peut être mise sous la forme $r - f = n(r' - g)$, où maintenant $r = F3$, $r' = H3$, $f = AF$, $g = AH = AS$, $n = A5 : A6$.

3) Voir le troisième alinéa de la p. 305 du T. I.

4) Cette circonstance se présentera toutes les fois qu'on a $nf > g$. Or, au lieu cité dans la note précédente, Huygens formule cette même condition, puisqu' on y lit: „Imo etiam versus A convexa erit quoties HA ad AF minorem rationem habebit quam A5 ad A6".

5) Voir la p. 322 de l'édition de 1659 de la „Geometria". Le passage qui va suivre fait partie de la note S qu'on trouve déjà dans l'édition de 1649 (p. 278), mais sans le passage en question qui fut ajouté évidemment à propos de la lettre de Huygens à van Schooten du 20 septembre 1653 (p. 242–243 du T. I).

6) Van Schooten avait fait remarquer dans la première partie de la note S que lorsque dans l'énoncé d'un problème on suppose qu'une conique soit donnée, et que l'analyse du problème amène une équation du troisième ou quatrième degré, il est toujours possible de résoudre le problème en question par la règle et le compas en utilisant la conique donnée. Un tel problème peut donc être considéré en quelque sorte comme un problème plan, quoique ce soit au fond un problème solide.

7) Nous avons reproduit le passage en question dans la note 5 de la p. 82 du T. XII.

8) C'est-à-dire, par des lignes plus compliquées que les coniques.

9) Consultez sur Anderson et sur son ouvrage la note 3, p. 243 du T. I.

10) Il s'agit de la „Façon generale pour construire tous les problesmes solides, reduits a vne Equation de trois ou quatre dimensions" (voir les p. 464—469 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes ou les p. 85—90 de l'édition de 1659 de la „Geometria") où Descartes enseigne à résoudre ces problèmes à l'aide d'une parabole et d'un cercle.

ope ejuſdem datæ Parabolæ quàm facillimè conſtrui poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonſtrationem univerſalem, quam ſibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutiſſimus pariter atque eruditiſſimus noſter Chr. Hugenius concinnavit [1]), cum ipſa jam pridem nobis aliiſ'que ab eo communicata fuerit [2]), nec illa etiam hujus loci exiſtat eandem hìc prætereundam duximus.

---

[1]) Voir les p. 81—82 du T. XII.

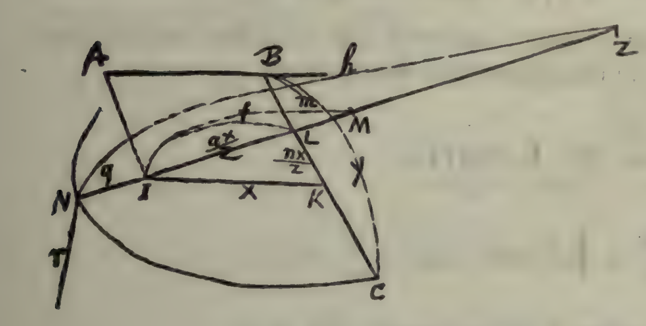
[2]) Voir la lettre du 20 septembre 1653 à van Schooten, déjà mentionnée dans la note 5 de la p. 421, et celle du 1 juin 1656 à de Carcavy, p. 429 du T. I. Ajoutons que la question de savoir si un problème comme celui qui est traité ici doit être considéré comme plan, ou comme solide, est encore discutée dans la Correspondance aux pp. 61 du T. III et 160 du T. X.

APPENDICE [1]

AUX CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES DE VAN SCHOOTEN SUR LA „GEOMETRIA RENATI DESCARTES".

[1654.] [2]

Ad pag. 33, 34 *et* 35 *Geom. Cartesij. Edit. latinæ* [3]).



[AB ∞ a, BC ∞ y]

Cum NC eſt Parabola.

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{ox + mm}$$

$$\text{LC } y - m + \frac{nx}{z} \infty \sqrt{ox + mm}$$

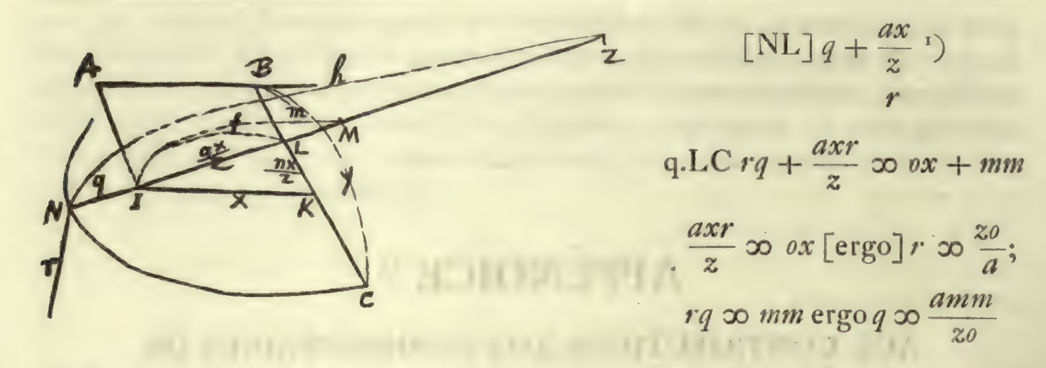
ſit r ∞ latus rectum; q ∞ NI

---

[1]) Dans cet Appendice, emprunté à deux feuilles détachées, Huygens discute l'équation $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, où m, n, o, p et z désignent des longueurs données et x et y des coordonnées cartésiennes.

[2]) Comparez les deux dernières lignes de la p. 304 de notre T. I.

[3]) Il s'agit de l'édition de 1649 de l'ouvrage mentionné dans la note 1 de la p. 411. Or, dans les pages citées, qui correspondent aux p. 29—31 de l'édition de 1659, Descartes donne des formules pour déterminer le „latus transversum" NZ et le „latus rectum" r de la conique représentée par l'équation $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, par rapport au diamètre $y = m - \frac{nx}{z}$; comme aussi pour trouver la distance IM qui détermine la situation du centre M de la conique, ou bien, dans le cas de la parabole, la distance IN. Il est vrai qu'un peu plus loin (p. 36—38 de l'édition de 1649, p. 32—34 de celle de 1659) il démontre, après coup,



$$[\text{NL}]\, q + \frac{ax}{z} \text{ [1]}$$

$$r$$

$$\text{q.LC } rq + \frac{axr}{z} \propto ox + mm$$

$$\frac{axr}{z} \propto ox \text{ [ergo] } r \propto \frac{zo}{a};$$

$$rq \propto mm \text{ ergo } q \propto \frac{amm}{zo}$$

quoniam volo diſtantiam IN, et latus rectum r ita eſſe comparata, ut ſumpta AB x quantâcumque ſemper ſit $rq + \frac{arx}{z} \propto ox + mm$, omnino neceſſe eſt terminum $\frac{arx}{z}$ eſſe $\propto ox$ et reliquum proinde reliquo. Si enim ſit $\frac{ar}{z}$ inæqualis o, puta major, fiet ut quo major ſumetur x, eo amplius terminus $\frac{arx}{z}$ ſuperet term.^m^ ox. Ergo oporteret tanto quoque ſemper majorem eſſe exceſſum termini mm ſupra rq. quod fieri non poteſt cùm ſint quantitates determinatæ.

Cum NC Ellipſis.

$$\left[y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}\right]$$

Sit IM $\propto f$; lat. rectum $\propto r$; lat. tranſv. NZ $\propto h$.

---

l'exactitude de ces formules, mais il n'y fait pas connaître de quelle manière il les a déduites. C'est pourquoi Huygens écrivit à van Schooten à propos de la nouvelle édition de la „Geometria" que celui-ci allait préparer: „Qua ratione hoc latus rectum $\frac{oz}{a}$ et linea IN $\frac{amm}{oz}$ inventa sit explicare operæ prætium videtur" (voir les lignes citées dans la note 2 de la p. 423). En effet, van Schooten donna suite à cette remarque en ajoutant, dans l'édition de 1659, l'annotation étendue CC (p. 182—206 de cette édition); tandis que Huygens de son côté rédigea à cette occasion le présent Appendice.

[1]) $\frac{a}{z}$ représente ici le rapport de IL à IK. Ce rapport peut être considéré comme connu puisqu'on sait construire la droite IL. Comparez la p. 31 de l'édition de 1649, p. 28 de celle de 1659.

$$\text{m[ult.]}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}h - f + \frac{ax}{z}\text{NL}\\ \frac{1}{2}h + f - \frac{ax}{z}\text{LZ}\end{array}\right.$$

$$h\,[\text{ad}]\,r\,[\text{ut}]\,\square\,\text{NLZ}\left(\frac{1}{4}hh + \frac{2fax}{z} - ff - \frac{aaxx}{zz}\right)[\text{ad}]\,\text{qu.LC}$$ [2])

$$\frac{1}{4}rh + \frac{\frac{2rfax}{z} - rff - \frac{raaxx}{zz}}{h} \infty\, mm + ox - \frac{p}{m}x^2$$

hinc tres æquationes

prima $\frac{2rfax}{zh} \infty\, ox$ 2.da $\frac{raaxx}{zzh} \infty \frac{pxx}{m}$ 3.a $\frac{1}{4}rh - \frac{rff}{h} \infty\, mm$ restit. val. ff fit

$$f \infty \frac{zho}{2ar} \qquad h \infty \frac{mraa}{pzz} \qquad \frac{1}{4}rh - \frac{zzhoo}{4raa} \infty\, mm$$

Restitutis valoribus h et r infra inventis [3]) erit $\frac{zho}{2ar}$ hoc est $f \infty \frac{oma}{2pz}$ IM [4]).

$$h \infty \frac{4raamm}{rraa - zzoo}$$

$$\frac{mraa}{pzz} \infty \frac{4raamm}{rraa - zzoo}$$

$$rraa \infty 4mpzz + oozz$$

lat. rect. $r \infty \frac{z}{a}\sqrt{4pm + oo}$ vel $r \infty \sqrt{\frac{oozz + 4mpzz}{aa}}$ [4])

restituto valore r erit $\frac{mraa}{pzz}$ hoc est $h \infty \frac{ma}{pz}\sqrt{4pm + oo}$

latus transversum vel $h \infty \sqrt{\frac{mmaaoo}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ [5])

Si mm fuerit ∞ o erit tertia æquatio $\frac{1}{4}rh - \frac{rff}{h} \infty$ o unde $r \infty \frac{oz}{a}$ ut Cartesius

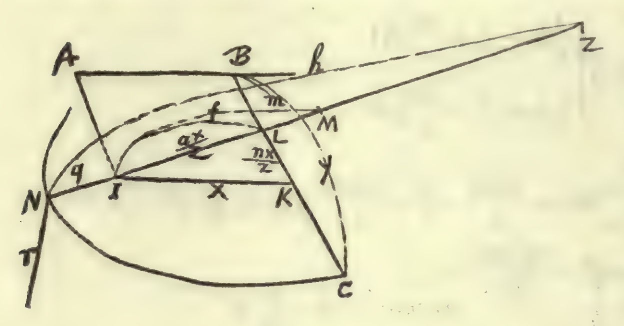
---

[2]) D'après la „Prop. XXI" du „Lib. I" des „Con." d'Apollonius que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 de notre T. XI.

[3]) Voir plus bas les expressions $\frac{ma}{pz}\sqrt{4pm + oo}$ et $\frac{z}{a}\sqrt{4pm + oo}$ pour h et r.

[4]) Formule qu'on retrouve à la p. 34 de l'édition de 1649, p. 30 de celle de 1659.

[5]) Cette formule se retrouve respectivement aux pp. 35 et 31 des éditions de 1649 et 1659.



ait [1]). At si $ox \infty o$ erit in tertia [2]) æquatione etiam $f \infty \frac{zho}{2ar}$ sive nihilo. ergo in prima [3]) æquatione tantum $\frac{1}{4}rh \infty mm$ et $r \infty \frac{4mm}{h}$: sed inventum fuit $h \infty \frac{mraa}{pzz}$ in secunda æquatione. igitur $r \infty \frac{4mmpzz}{mraa}$ et $rr \infty \frac{4mpzz}{aa}$, et $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ ut refert Cartesius ibidem [1]).

Quod pro fractione $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ scribit $\frac{p}{m}$ [4]) id quidem facilitatis causa in sequentibus facit quod denominatorem ponit m, eandem quantitatem cujus est quadratum mm, verum et difficultatem aliquam idem affert cum termino $\frac{pxx}{m}$ nulla fractio adhæret etenim tum nusquam quidem apparet p et tamen in terminis qui centrum et latera docent reperitur neque pro nihilo illic habendum sed cogitandum quod $p \infty m$ ut recte notat Florim. de Baune [5]). Sed, quidni loco fractionis prioris posuit $\frac{2n}{m}$ potius quam $\frac{2n}{z}$ [6]), nam et hoc magno usui fuisset in sequentibus? Exprimetur enim ea ratione linea IN per $\frac{am}{o}$ quæ prius erat $\frac{amm}{oz}$ [7]). Et IM per $\frac{ao}{2p}$ [8]) quæ fuerat $\frac{aom}{2pz}$ latus rectum per $\sqrt{\frac{oomm + 4pm^3}{aa}}$ (sed hoc parvum quidem prodest) latus transversum per $\sqrt{\frac{aaoo}{pp} + \frac{4aam}{p}}$. vel per $\frac{a}{p}\sqrt{oo + 4mp}$. In parabola latus rectum erit $\frac{om}{a}$.

Ego itaque formulam universalem [9]) hanc ponerem $y \infty q - \frac{nx}{m} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ ubi hoc tantum observandum quod si terminus $\frac{nx}{m}$ defuerit, erit $a \infty m$ [10]) et m ubique illius loco substituendum. Alterum autem ibidem ut in Cartesiana formula observandum, nempe si termino $\frac{p}{m}xx$ fractio desit, quod

tunc $p \propto m$ et m illius quoque loco ſubſtituendum. At hiſce obſervationibus non erit opus ſi formula univerſalis hæc ſtatuatur $y \propto q - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{l}xx}$. Erit vero lat. rectum $\sqrt{\frac{4pzzmm + zzool}{aal}}$ ſive $\frac{z}{a}\sqrt{\frac{4pmm}{l} + oo}$. tranſverſum $\frac{al}{pz}\sqrt{\frac{4pmm}{l} + oo}$ ratio horum quæ pzz ad aal. Si pro termino $\frac{nx}{z}$ habeatur x, oportet ſumere KL $\propto$ IK vel AB et ducere IL. Ratio autem lineæ IK vel KL ad IL tunc erit ea quæ z ad a. Itaque in terminis qui centrum et latus rectum tranſverſumque docent retinendæ z et a, pro quibus quælibet duæ lineæ ſumendæ quæ rationem habeant quam IK ad IL. Si terminus $\frac{nx}{z}$ deſit delendum ubique z et a [11]).

[1]) Voir respectivement les pages citées dans la nôte précédente.

[2]) Lisez: prima.

[3]) Lisez: tertia.

[4]) Voir la p. 31 de l'édition de 1649 (p. 27 de celle de 1659). Descartes, après avoir trouvé la solution du problème de Pappus à quatre lignes sous la forme: $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$, y pose $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = o$ et $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} = [-]\frac{p}{m}$, afin de réduire cette équation à la forme plus simple $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$; voir sur le problème de Pappus la note 1 de la p. 210.

[5]) Il s'agit évidemment du cas où l'expression sous le signe radical prend la forme $mm - ox - xx$, comme de Beaune le suppose dans l'„Observatio quarta" de ses „In geometriam Renati des Cartes notæ breves" qui furent insérées par van Schooten dans les éditions de la „Geometria"; voir la p. 137 de l'édition de 1649 (p. 122—123 de celle de 1659).

[6]) Voir la page de la „Geometria" mentionnée dans la note 4. Afin de donner au deuxième terme du second membre de l'équation citée dans cette note la forme simple $\frac{nx}{z}$, Descartes avait posé auparavant $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz} = \frac{2n}{z}$. Remarquons d'ailleurs que la longueur z n'est introduite dans les formules de Descartes qu'afin de pouvoir représenter certains coefficients numériques par des rapports de longueurs; on peut donc lui supposer une grandeur arbitraire p. e. $z = m$.

[7]) Il s'agit du cas de la parabole; voir p. 424 la formule pour $q = $ IN.

[8]) Savoir dans le cas de l'ellipse; voir p. 425 la formule pour $f = $ IM.

[9]) La formule est, en effet, plus générale que celle de Descartes, qui représente une conique passant par l'origine des coordonnées.

[10]) Puisqu'alors la droite NZ est parallèle à l'axe AB de sorte que les lignes IL et IK coïncident; on a donc $a = z = m$.

[11]) Savoir en remplaçant le quotient $\frac{a}{z}$ par l'unité.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1661 À 1666.

Recherches sur le calcul des logarithmes et sur la courbe logarithmique.

Quadrature de l'hyperbole par les logarithmes. Application à la détermination de l'altitude par la hauteur de la colonne barométrique et réciproquement.

Construction de l'heptagone régulier.

Courbe de Gutschoven. Quadrature et cubature de l'un de ses solides de révolution.

Règles pour trouver les tangentes aux courbes algébriques.

Trouver par construction le diamètre d'une surface sphérique.

Recherches sur les cubiques.

Calcul du plus petit nombre qui, après division par des nombres donnés, laisse des restes donnés.

Examen d'une rectification approchée de la circonférence de cercle.



Avertiſſement.

Recherches de 1661 et 1662 ſur le calcul des logarithmes et ſur la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes. Application à la détermination de l'altitude qui correſpond à une hauteur donnée de la colonne barométrique et réciproquement.

En 1868, Joſeph Bertrand découvrit [1]) dans le „Regiſtre des procès verbaux de l'Académie des Sciences" une „règle pour trouver les logarithmes", communiquée par Huygens à cette Aſſemblée, en 1666, dans l'une de ſes premières réunions. Bertrand jugea cette règle „remarquable et élégante en elle-même et la démonſtration que Huyghens ne donne pas" lui parut „difficile à faire ſans recourir à la ſérie logarithmique de Mercator [2]), publiée ſeulement en 1668 [3]) et préſentée à cette date par Huyghens lui-même dans l'une des ſéances de l'Académie [4])".

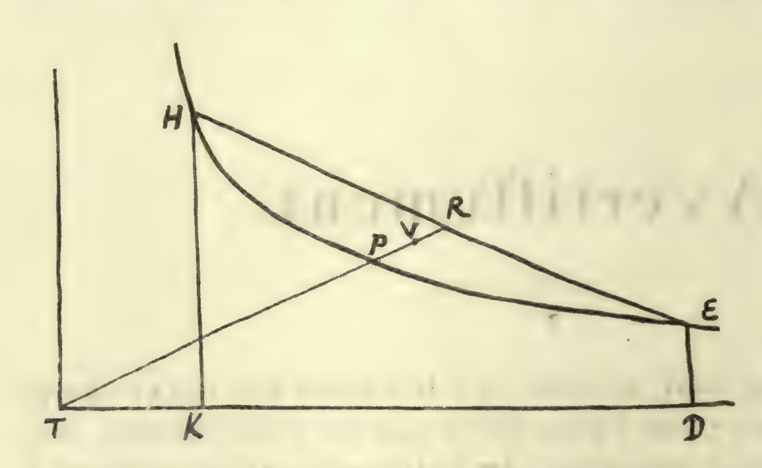
[1]) Comparez les p. 565—567 du T. 66 des „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences".

[2]) La série bien connue $l\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$

[3]) Dans la „Logarithmo-Technia" de Mercator, ouvrage cité dans la note 5 de la p. 276 du T. VI.

[4]) Dans la séance du 17 octobre 1668.

Or, la Pièce N°. I (p. 451—457), datée d'août 1661, nous donne la solution de cette énigme. Elle nous fait connaître la méthode suivie par Huygens pour trouver sa règle; méthode qui, en effet, n'a rien à faire avec la série de Mercator, puisqu'elle s'appuie sur une quadrature approchée de l'hyperbole, déduite par Huygens d'un théorème qu'il avait publié en 1651 dans ses „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro".



Suivant ce théorème[1]) on peut calculer l'aire d'un segment hyperbolique HPERH[2]) pourvu qu'on connaisse la situation du centre de gravité V sur le diamètre PR.

Si donc, on remplace, par première approximation, le segment hyperbolique par un segment parabolique construit sur le même diamètre PR et sur la même base HE, il est facile de trouver une valeur approchée pour l'aire du segment HPE (et, par suite, aussi pour celle de la figure mixtiligne HKDEPH[3])), puisqu'on sait que dans un segment parabolique le centre de gravité divise le diamètre PR dans la raison de 3 à 2.

Considérons maintenant la figure suivante, qui correspond à celle de la p. 451 du texte qui suit. Par un théorème dû à Grégoire de St. Vincent[4]) Huygens savait que les aires des figures mixtilignes ABDEA et FGDEF sont

---

[1]) Voir la note 6 de la p. 453.

[2]) Nous empruntons cette figure à celle de la p. 453 du texte après en avoir ôté les lignes dont nous n'avons pas besoin ici.

[3]) Comparez les p. 453—455.

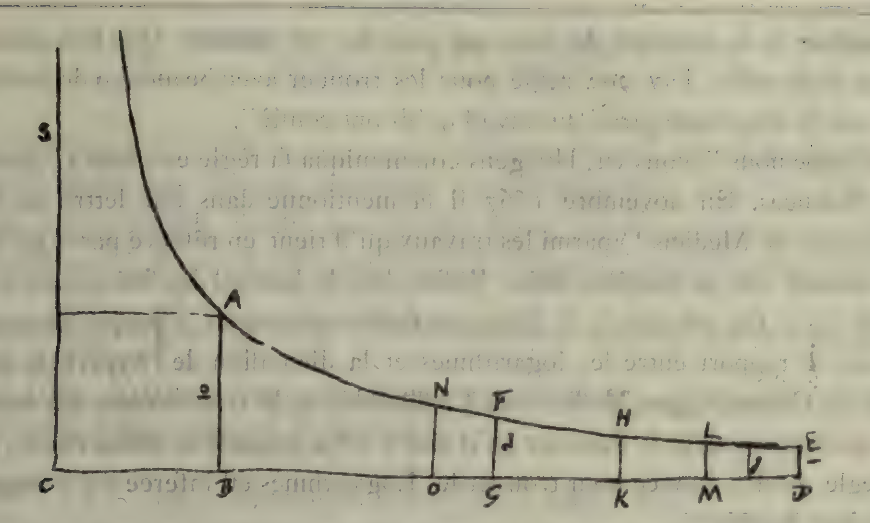
[4]) Voir la note 3 de la p. 452.

[5]) Dans le cas de $\beta = 2$ on trouve log 2 = 0,3029 au lieu de 0,3010.

[6]) Comparez la note 1 de la p. 456.

[7]) Voir les p. 307—308 du T. III.

[8]) Voir aux p. 169—174 de notre T. X la „Lettre de Mr. Huygens à l'Auteur touchant le Cycle Harmonique" et consultez encore la p. 100 du T. V.



proportionnelles aux logarithmes des rapports des ordonnées extrêmes. Pofant donc DE = 1, AB = 10, FG = β, on a:

$$\log \beta = \frac{\text{aire FGDEF}}{\text{aire ABDEA}}.$$

Si Huygens avait appliqué directement fa quadrature approximative aux aires FGDEF et ABDEA, le réfultat aurait été très peu fatisfaifant [5]), mais l'approximation devient évidemment meilleure à mefure qu'on rapproche les ordonnées extrêmes AB et FG de DE fans changer le rapport des aires. Afin de profiter de cette circonftance, Huygens divife l'aire ABDE en deux parties égales par l'ordonnée NO, moyenne proportionnelle entre AB et DE, et il agit de la même façon avec l'aire FGDE. Répétant cinq fois ces opérations, il obtient des figures, limitées à droite par l'ordonnée DE, dont les aires font la trente-deuxième partie refpectivement des aires ABDE et FGDE. Or, c'eft à celles-ci qu'il applique fa méthode.

Pour vérifier enfuite l'efficacité de fa règle, il l'emploie au calcul de log 2, avec le réfultat qu'il trouve „10 characteres vrais et l'unzième qui furpaffe le vray de l'unitè" [6]).

Entièrement fatisfait de ce réfultat, il annonce fa découverte le 1 août 1661 à Moray dans les termes fuivants [7]): „Je me fuis occupè pendant quelques jours a eftudier la mufique, et la diuifion du monochorde à la quelle j'ay appliquè heureufement l'algebre [8]). J'ay aufli trouuè que les logarithmes y font de grand ufage, et de la je me fuis mis a confiderer ces merveilleux nombres et admirer

l'induſtrie et la patience de ceux qui nous les ont donnez. Que ſi la peine n'en eſtait deſia priſe, j'ay une regle pour les trouuer avec beaucoup de facilitè, et non pas la vingtieme partie du travail qu'ils ont couſtè".

Comme nous l'avons vu, Huygens communiqua ſa règle en 1666 à l'Académie des Sciences. En novembre 1667 il la mentionne dans une lettre au Prince Léopoldo de Medicis [1]) parmi les travaux qu'il tient en réſerve parce qu'il n'y a pas encore mis la dernière main. Enfin, dans le Journal des ſcavans du 2 juillet 1668 [2]), il fait alluſion à ſa Règle en faiſant remarquer, à propos de ce qui eſt dit ſur le rapport entre les logarithmes et la dimenſion de l'hyperbole dans un livre de Gregory „que Meſſieurs de l'Aſſemblée ne le trouveroient pas nouveau, puisqu'ils pourroient ſe ſouvenir qu'il leur a deſja propoſé la même choſe, & que la regle qu'il a donnée pour trouver les Logarithmes eſt inſerée il y a longtemps dans leur Regiſtre".

Onze mois après la découverte de ſa règle, Huygens aperçut que la quadrature approchée de l'hyperbole, qu'il y avait appliquée, était encore ſuſceptible d'une autre application non moins importante. Il s'agit de la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes [3]). Du théorème de Grégoire de St. Vincent, que nous avons cité plus haut [4]), il ſuit que le rapport de l'eſpace hyperbolique TVDE [5]) au carré caractériſtique AC eſt proportionnel à la différence des logarithmes de TV et de ED. On a donc:

[1]) Voir la p. 162 du T. VI.
[2]) Voir la note 1 de la p. 231 du T. VI.
[3]) Voir la Pièce N°. III (p. 474—482), datée du 16 juillet 1662.
[4]) Voir le dernier alinéa de la p. 432.
[5]) La figure est identique à celle de Huygens qu'on trouve à la p. 474.

$$(1) \qquad \log. \frac{\mathrm{TVDE}}{q^2} = \log(\log \mathrm{TV} - \log \mathrm{ED}) + \mathrm{C},$$

où q repréſente le côté AB du carré caractériſtique, et où C eſt une conſtante.

Afin d'obtenir une formule commode pour calculer l'aire d'un eſpace hyperbolique comme TVDE, il suffit donc de déterminer, une fois pour toutes, la valeur de la conſtante C. A cet effet Huygens applique ſa quadrature approchée à l'eſpace HKDE où $\frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{DE}} = \sqrt[32]{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}}} = \sqrt[32]{10}$. Profitant des calculs qu'il avait déjà accomplis en 1661, il trouve pour cet eſpace 719557838,5[6]), ſavoir, en ſuppoſant $\mathrm{DE} = 10^4$ et $\mathrm{AB} = q = 10^5$. Il ſ'en ſuit:

$$\log(719557838{,}5 : 10^{10}) = -\log 32 + \mathrm{C},$$

ce qui permet de calculer la valeur de C, pour laquelle Huygens, ſe ſervant des tables de Vlacq à dix mantiſſes[7]), trouve 0,3622156868; nombre qu'il a remplacé plus tard par 0,3622156887) à la ſuite d'un nouveau calcul que nous ne connaiſſons pas.

Or, on ſait par l'analyſe moderne qu'on a:

$$\frac{\mathrm{TVDE}}{q^2} = \mathrm{l.\,TV} - \mathrm{l.\,ED} = \frac{1}{\mathrm{M}}(\log \mathrm{TV} - \log \mathrm{ED}),$$

où M eſt le module du ſyſtème ordinaire des logarithmes. Il en réſulte $\mathrm{C} = -\log \mathrm{M} = -\log\log e = 0{,}362215688699\ldots$, ce qui prouve l'exactitude des calculs de Huygens et ſurtout du dernier calcul dont les détails nous ſont inconnus.

Ayant trouvé ainſi la règle pour la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, il l'applique d'abord à quelques exemples numériques[9]) et il montre enſuite comment elle peut ſervir au calcul de l'aire d'un ſegment hyperbolique quelconque[10]) et à la rectification de la parabole[11]), qu'il avait appriſe à réduire, cinq ans plus tôt[12]), à la quadrature de l'hyperbole.

---

[6]) Voir la p. 475.
[7]) Voir sur ces tables la note 1 de la p. 478.
[8]) Conſultez le troiſième alinéa de la note 1 de la p. 476.
[9]) Voir les p. 477—480.
[10]) Voir les p. 480—481.
[11]) Voir les p. 481—482.
[12]) Voir les p. 234—235.

Puis, le lendemain de la rédaction de la Pièce N°. III que nous venons d'analyser, une application bien autrement intéressante se présenta à lui [1]).

Quelques mois auparavant, en mars 1662 [2]), Moray l'avait averti de la relation simple, récemment découverte par Boyle, d'après laquelle le volume d'une quantité donnée d'air est inversement proportionnel à la pression à laquelle on la soumet. À la description succincte de l'une des expériences de Boyle, Moray avait ajouté la phrase un peu énigmatique: „Je crois que vous comprendrez assez bien par cette courte description que cecy en veut à l'Atmosphere, mais comme que cen soit J'ay trop de besogne de reste, pour m'y arrester plus long temps". En réponse [3]), Huygens demanda des renseignements sur un point important qui lui était resté douteux; du reste il ne voyait pas encore qu'il fût fort aisé de déduire des expériences de Boyle la hauteur de l'atmosphère, il croyait que pour cela on aurait besoin encore d'autres expériences, comme celles qu'on avait fait en France sur les montagnes d'Auvergne [4]). Cependant, avant d'avoir obtenu l'éclaircissement demandé [5]), Huygens reçut le 12 juillet l'ouvrage de Boyle [6]) où celui-ci donne en détail les résultats de deux séries d'expériences touchant la condensation et la raréfaction de l'air. Ayant pris connaissance de ces résultats „qui prouvent" comme il s'exprime [7]) „assez clairement cette proprieté remarquable [de l'air] a sçavoir que la force de son ressort suit la proportion contraire des espaces ou il est reduit", Huygens ne doutait plus de l'exactitude approximative [8]) de la loi de Boyle. Quelques jours après [9]), il se mit à l'œuvre pour chercher la relation qui devait exister entre l'altitude au-dessus de la mer

---

[1]) Voir aux pp. 474 et 483 les dates des Pièces N°. III et N°. IV.

[2]) Voir aux p. 84—85 du T. IV la lettre de Moray à Huygens du 13 mars 1662.

[3]) Voir la lettre de Huygens du 9 juin 1662, p. 150 du T. IV.

[4]) Consultez sur ces expériences la „Lettre de Monsieur Perier", mentionnée dans la note 4 de la p. 492.

[5]) Moray le lui fournit dans une Pièce qui accompagna sa lettre du 17 juillet 1662 et qu'il avait copiée de l'ouvrage de Boyle mentionné dans la note suivante; voir les p. 176—178 du T. IV.

[6]) Voir la p. 171 du T. IV. Il s'agit de la „Defensio Doctrinæ de Elatere et Gravitate Aeris", citée dans la note 2 de la p. 171 du T. IV.

[7]) Voir sa lettre du 14 juillet 1662, p. 171 du T. IV.

[8]) Voir à la p. 485 qui suit ses réserves sur l'exactitude absolue de la loi de Boyle dans le cas des très petites pressions.

[9]) Voir, à la p. 483, la date de la Pièce N°. IV.

[10]) Huygens ne semble s'être douté aucunement de l'influence de l'abaissement de la température qui accompagne l'augmentation de l'altitude. Il n'en dit pas un mot, ni dans la Pièce en question, ni ailleurs.

et la hauteur de la colonne barométrique, dans l'hypothèſe que la diminution de la preſſion dans les couches diverſes de l'atmoſphère ſe conforme entièrement à la loi récemment découverte [10]).

En effet, par un raiſonnement ſubtil, pour lequel nous renvoyons au texte de la Pièce N°. IV [11]), Huygens trouve une relation qui eſt équivalente à la formule, en notation moderne:

$$(2) \qquad \frac{-\int_{p_0}^{p} v\,dp}{v_0 p_0} = \frac{h}{h_0},$$

où h_0 déſigne la hauteur fictive jusqu'à laquelle l'atmosphère s'étendrait ſi ſa denſité était partout égale à celle de la couche d'air qui ſe trouve au niveau de la mer, où h indique l'altitude du lieu, v le volume d'une particule d'air à cette altitude, p la preſſion à laquelle elle y eſt ſoumiſe, et enfin v_0 le volume de cette même particule tranſportée au niveau de la mer où la preſſion est p_0.

Or, puiſque, d'après la loi de Boyle, on a $v = \frac{v_0 p_0}{p}$, il eſt évident que la détermination de $-\int_{p_0}^{p} v\,dp$ ſe réduit à la quadrature d'un eſpace hyperbolique auquel la formule (1), p. 435, eſt applicable lorsqu'on y remplace q^2 par $p_0 v_0$. De cette façon on trouve:

$$(3) \qquad \log(\log p_0 - \log p) + C = \log h - \log h_0,$$

où C repréſente la conſtante de Huygens que nous avons trouvée égale à $-\log\log e$.

C'eſt là, à part une petite complication ſur laquelle nous n'inſiſtons pas ici [12]), la formule qui correſpond au calcul de la p. 486 du texte; mais puiſque h_0 eſt une conſtante (du moins lorſque l'unité de longueur qu'on emploie à meſurer les altitudes eſt donnée) on peut écrire:

$$(4) \qquad \log(\log p_0 - \log p) + C_1 = \log h$$

où

$$C_1 = C + \log h_0.$$

---

[11]) Voir les p. 484—485.

[12]) En vérité ces calculs sont conformes à la formule:

$$\log h = \log(\log p_0 - \log p) + \log v_0 p_0 + C - (\log v_0 p_0 - \log h_0),$$

où $v_0 p_0$ est posé égal à 100000.

Pour fupputer la valeur de h_0, Huygens devait connaître la hauteur de la colonne barométrique au niveau de la mer, qu'il fuppofe égale à 30 pouces anglais[1]), et le rapport du poids fpécifique du mercure à celui de l'air[2]).

Il trouve de cette façon 32640 pieds anglais pour la hauteur fictive h_0 de l'atmofphère fuppofée homogène, nombre qu'il remplace par le nombre rond 33000. À l'aide de cette donnée on trouve $C_1 = 4{,}88073$; mais, par fuite de la complication mentionnée, les calculs abrégés, que Huygens fait fuivre[3]), font mieux repréfentés par la formule:

$$(5) \qquad (\log(\log p_0 - \log p) + 5) - 0{,}11927 = \log h,$$

où 0,11927 eft le „numerus perpetuus" qui entre dans tous les calculs.

Ayant appliqué la règle qu'il venait d'obtenir à plufieurs exemples[3]), il communique, le 17 août 1662, à fon frère Lodewijk les réfultats de deux d'entre eux[4]), le priant d'en faire part au duc de Roanez[5]), un de fes amis parifiens. Le lendemain il expofa fa règle, appliquée à trois exemples, à Moray[6]), fans toutefois en faire connaître la démonftration.

Si dans la Pièce N°. IV, dont nous nous fommes occupés jusqu'ici, Huygens difcute des exemples fictifs, dans l'Appendice I (p. 491—494), de date inconnue, que nous avons ajouté à cette Pièce, il difcute les célèbres expériences faites par Perier au Puy de Dôme en Auvergne fur l'inftigation de Pafcal.

À cet effet il devait commencer par changer le „numerus perpetuus" pour l'adapter à l'emploi du pied de Paris, qui remplace le pied anglais des calculs précédents[7]); enfuite il applique sa règle aux données fournies par Perier, pour en

---

[1]) Voir les premières lignes de la p. 483.

[2]) Voir la p. 483 et surtout la note 4 de cette page.

[3]) Voir les p. 486—490.

[4]) Voir la p. 198 du T. IV.

[5]) Voir sur Artus Gouffier, duc de Roanez et sur ses relations avec Huygens la p. 238 du T. III et les pp. 7, 33, 53, 71 et 180 du T. IV.

[6]) Voir les pp. 202 et 205—206 du T. IV. On trouve la réponse de Moray à la p. 217 du même Tome. Moray y mande que „tous nos Messieurs" (savoir les membres de la Royal Society) „sont tres satisfaits de votre Reigle",

déduire entre autres l'altitude du sommet du Puy de Dôme. Il trouve pour cette altitude une valeur qui, même après la correction notable que nous y avons apportée [8]), est trop forte; conséquence nécessaire de l'hypothèse dont il part [9]).

Enfin, beaucoup plus tard, en 1673, Huygens s'est occupé encore une dernière fois du même sujet à propos d'une expérience de Cassini faite sur une montagne près de Toulon [10]).

La courbe logarithmique.

Il y a lieu de s'étonner que les recherches sur la courbe logarithmique qu'on trouve dans la Pièce N°. II (p. 460—471) (quoiqu'elle n'y soit pas encore indiquée sous ce nom) portent une date si ancienne que celle de septembre 1661. En effet Huygens ne mentionne ces recherches, ni dans sa lettre à Leopoldo de Medicis [11]), du 19 novembre 1667, où il énumère ses travaux encore inédits, ni dans le reste de sa correspondance antérieure à sa lettre à Leibniz du 23 février 1692 [12]), ni dans l'„Horologium oscillatorium" de 1673, où il donne tant de résumés de ses travaux mathématiques pas encore publiés [13]).

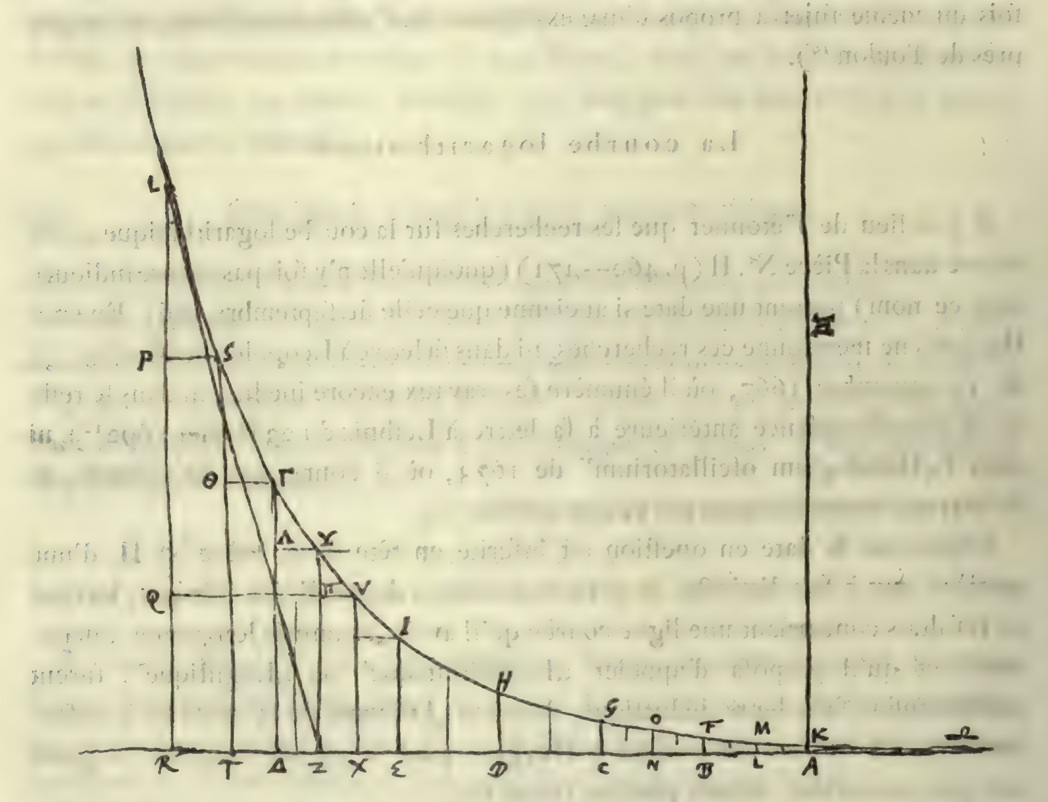
Cependant la date en question est inscrite en tête de la Pièce N°. II, d'une manière tout-à-fait distincte, ne permettant aucun doute. Il s'en suit que, lorsque les résultats concernant une ligne courbe qu'il avait „examinée longtemps auparavant" et qu'il proposa d'appeler „Logarithmique" ou „Logistique", furent publiés enfin, sans leurs déductions, dans son „Discours de la cause de la pesanteur" [14]), ils avaient été connus à Huygens pour la grande majorité, et quant aux plus importants, depuis presque trente ans.

Les déductions qui manquent dans ce „Discours", on les trouve, pour la plupart, dans la Pièce N°. II. Commençons par observer que chez la „Logarith-

---

7) Consultez la p. 494 et surtout la note 3 de cette page.
8) Voir les notes 9 de la p. 493 et 1 de la p. 494.
9) Consultez la note 12 de la p. 493.
10) Voir l'Appendice II, p. 495—497.
11) Voir les p. 160—163 du T. VI.
12) Voir la p. 21 du T. X.
13) Voir les pp. 192, 195, 198, 206 et 207 du Tome présent, comme aussi la note 2 de la p. 347 et la note 2 de la p. 476.
14) Voir la p. 169 de l'édition originale.

mique" les abſciſſes, comme AD[1]), ſont proportionnelles aux logarithmes des ordonnées HD, pourvu qu'on prenne AK pour unité de longueur des ordonnées. Cette courbe peut donc ſervir à exécuter graphiquement toutes les opérations auxquelles on emploie les logarithmes[2]). Or, ce qu'il y a de remarquable, c'eſt



qu'on peut conſtruire la logarithmique par points ſans recourir à une table de logarithmes. Huygens, à cet effet, porte ſur l'axe des x ſucceſſivement les ſegments égaux AB, BC, CD, etc. et il prend chaque fois l'ordonnée, qui correſpond à l'extrémité d'un tel ſegment, égale au double de celle du point de diviſion qui précède; de ſorte qu'on a BF = 2AK, GC = 4AK, HD = 8AK, etc. Enſuite, afin d'interpoler d'autres points entre les points K, F, G, H, etc., il

[1]) La figure est identique à celle de la p. 460 du texte.

[2]) Comparez la p. 461. Huygens s'y borne au problème d'interpoler entre deux segments donnés un nombre quelconque de segments continûment proportionnels; problème auquel il avait été conduit par ses recherches sur le „Cycle Harmonique"; voir la note 8 de la p. 432.

ſuffit de diviſer chaque ſegment en deux parties égales par les points L, N, etc., d'y ériger des ordonnées qui ſont les moyennes proportionnelles entre celles des points extrêmes du ſegment, et de répéter cette opération ſur les nouveaux ſegments, toujours plus petits, autant de fois qu'on le déſire [3]).

C'eſt de cette conſtruction que Huygens ſe ſert pour formuler la définition de la courbe [4]). Il en conclut d'abord que les abſciſſes peuvent être conſidérées comme les logarithmes des ordonnées et que deux ordonnées dont la diſtance de l'une à l'autre eſt donnée ſont partout dans le même rapport [5]). Partant de cette dernière propriété, il ſait en déduire, par voie géométrique, pluſieurs autres, parmi leſquelles nous ſignalons l'invariabilité de la longueur de la ſouſtangente [6]) dont le rapport à la diſtance entre deux ordonnées dont l'une eſt le double de l'autre, eſt trouvé égal à celui de 0,43429448190325180 4[7]) à log 2. Il trouve par la même voie la quadrature de l'eſpace compris entre deux ordonnées [8]), la ſituation du centre de gravité de l'eſpace qui s'étend à l'infini entre la courbe et l'aſymptote depuis une ordonnée donnée [9]), puis les cubatures des ſolides engendrés par la révolution d'un tel eſpace reſpectivement autour de l'aſymptote [10]) et autour de l'or-

---

[3]) Dans le „Discours de la cause de la pesanteur", p. 169—170 de l'édition originale, cette construction est généralisée, puisqu'on y lit (après avoir adapté les notations à celles de la présente figure): „Cette ligne infinie étant IGK, elle a une ligne droite pour Asymptote, comme DA; dans la quelle si on prend des parties égales quelquonques qui se suivent, comme ED, DC, & que l'on tire des points E, D, C, des perpendiculaires jusqu'à la courbe, sçavoir EI, DH, CG, ces lignes seront proportionnelles continuës. D'où l'on voit qu'il est aisé de trouver autant de points qu'on veut dans cette courbe".

Ajoutons qu'on rencontre la même construction dans un manuscrit de Torricelli, qui mourut en 1647. Ce manuscrit fut publié en 1900 par Gino Loria dans la „Bibliotheca Mathematica", Dritte Folge, Band 1, p. 80—89. Torricelli appelle la courbe „Hemihyperbola", parce qu'elle ne possède qu'une seule asymptote, mais plus loin il propose aussi de l'appeler „linea logarithmica sive Neperiana". Il prouve l'invariabilité de la longueur de la soustangente et il donne de plus la quadrature de la courbe et la cubature du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'asymptote.

[4]) Voir le premier alinéa de la p. 461.

[5]) Voir le deuxième alinéa de la p. 461.

[6]) Voir la p. 463.

[7]) Le mérite d'avoir calculé en tant de décimales ce nombre qui est égal à log e, n'appartient pas à Huygens, puisqu'il pouvait l'emprunter à l'„Arithmetica Logarithmica" de Briggs; consultez la note 3 de la p. 465.

[8]) Voir les pp. 462—463 et 466.

[9]) Voir les pp. 467—470 et, pour le cas plus général où l'espace est limité par deux ordonnées, la p. 471.

[10]) Voir la p. 467.

donnée [1]). Enfin Huygens ajoute, ſans démonſtration, deux théorèmes qui font connaître la ſituation du centre de gravité dans l'un et dans l'autre de ces ſolides [2]).

Aſſurément la Pièce que nous venons d'analyſer eſt un des plus beaux exemples de ce que les meilleurs géomètres du dix-ſeptième ſiècle ſavaient accomplir avant l'invention de l'algorithme du calcul différentiel et intégral.

Détermination de la tangente à une courbe algébrique.

La règle pour déterminer les tangentes d'une courbe algébrique quelconque donnée par ſon équation cartéſienne $f_\mu(x,y)=0$, telle qu'elle fut expoſée par Huygens dans le manuſcrit qui accompagna ſa lettre à Johan de Witt du 25 février 1663 [3]), ſemble être une extenſion ſi naturelle de la méthode de Fermat, ſurtout après la ſimplification que Huygens y avait apportée [4]), qu'on croirait que Huygens a dû la découvrir auſſitôt qu'il ſe fut poſé le problème en queſtion. Cependant les manuſcrits nous montrent qu'il en a été tout autrement. Dans le fait, Huygens, avant d'arriver à la ſolution que nous connaiſſons, en avait trouvé d'autres aſſez intéreſſantes, mais beaucoup plus compliquées.

L'impulſion à de nouvelles recherches ſur les tangentes lui fut donnée par une lettre de de Sluſe datée du 18 août 1662 [5]). Dans cette lettre celui-çi annonça qu'il avait perfectionné une méthode, inventée il y avait pluſieurs années, de telle façon qu'il pouvait trouver les tangentes d'une courbe, preſque ſans calcul, par la ſeule inſpection des termes de ſon équation [6]). Comme un exemple des

---

[1]) Voir le premier alinéa de la p. 471.

[2]) Voir la p. 471. Nous avons trouvé dans le Manuscrit G une démonstration du premier théorème, de date beaucoup plus récente que la Pièce N°. II; voir l'Appendice, p. 472—473. Quant à l'autre théorème concernant le centre de gravité du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'ordonnée, les manuscrits n'en contiennent pas la démonstration; mais consultez la note 7 de la p. 470.

[3]) Voir les p. 311—317 du T. IV.

[4]) On peut consulter sur la méthode de Fermat et sur la simplification que Huygens y apporta les pp. 20 du T. XI; 65—66 du T. XII et 297 du Tome présent.

[5]) Voir la p. 207 du T. IV où l'on lit: „Nuper tamen methodum tangentium ex notâ applicatarum ad partes axis qualicunque ratione, quam ante plures annos inueneram, ad facilitatem maximam deduxj, ita ut inspectâ solum in terminis analyticis æquatione quæ curuæ proprietatem ostendit, fere absque calculo tangentem ducam. Vnam hîc meâ methodo inuentam addo, in curuâ quam olim Clarissimus Gutiscouius mihi proposuit".

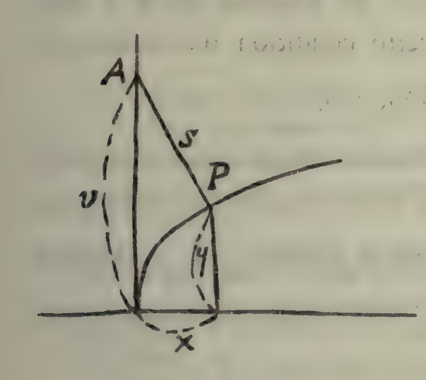
[6]) La méthode fut publiée, sans démonstration, dans le N°. 90 des „Philosophical Transactions"

résultats auxquels cette méthode pouvait conduire, il décrivit la construction de la tangente à une certaine courbe qui lui fut proposée jadis par van Gutschoven [7]).

L'équation de cette courbe peut s'écrire $y^4 + y^2x^2 - d^2x^2 = 0$. Elle est facilement résoluble par rapport à x^2, de sorte qu'on a $x^2 = \frac{y^4}{d^2 - y^2}$. Or, quoique Huygens ne pût pas croire que la méthode de de Sluse fût basée sur cette particularité [8]), il commença toutefois par chercher les moyens de déterminer les tangentes d'une courbe $x^2 = f(y)$, au cas où $f(y)$ représente une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire [9]).

Pour des raisons qu'il est difficile de deviner, Huygens n'appliqua pas à ce problème la méthode de Fermat telle qu'il l'avait simplifiée, mais il chercha d'autres méthodes par lesquelles le problème est réduit à celui de trouver le maximum ou minimum d'une fraction algébrique $\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}$; problème qui avait été résolu par Hudde [10]).

La première de ces méthodes rappelle fortement celle inventée par Descartes pour déterminer les tangentes, ou plutôt les normales, d'une courbe donnée [11]).



Soit, afin d'exposer cette méthode, s la ligne qui joint le point A de l'axe des y à un point P de la courbe, de sorte qu'on a:

$$AP^2 = s^2 = (v - y)^2 + x^2 = v^2 - 2vy + \\ + y^2 + f(y).$$

Si, ensuite, nous déplaçons le point P le long de la courbe, cette expression pour s^2 sera stationnaire (c'est-à-dire elle sera en général maxi-

du 20 janvier 1673, p. 5143—5147; elle ne diffère pas essentiellement de celle de Huygens exposée dans l'appendice à sa lettre à de Witt. Dans le N°. 95 du 23 juin 1673, p. 6059 de Sluse donna quelques indications sur la manière dont il savait démontrer sa règle.

7) Consultez sur cette courbe la p. 501.

8) On peut consulter la lettre de Huygens à de Sluse du 25 septembre 1662, p. 238 du T. IV; mais nous citerons le passage en question plus loin à la p. 445.

9) Voir les p. 504—508.

10) Voir la note 4 de la p. 505.

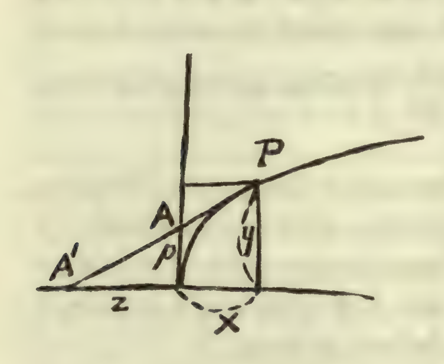
11) Il y a toutefois cette différence, qu'au lieu de chercher la grandeur minimum du segment AP,

mum ou minimum) à l'inſtant où la ligne s devient normale à la courbe. L'application de la méthode de Hudde amène donc dans ce cas une équation, qui, en notation moderne, s'écrit:

$$-2v+2y+f'(y)=0,$$

et dont on déduit $v=y+\frac{1}{2}f'(y)$; ce qui permet de conſtruire la normale AP et, par ſuite, auſſi la tangente du point P [1]).

La deuxième méthode eſt plus originale. Cette fois Huygens choiſit le point fixe A ſur la tangente elle-même, ſavoir à ſon point d'interſection avec l'axe des y. C'eſt alors l'expreſſion $\frac{x}{y-p}$, ou ſi l'on veut $\frac{x^2}{(y-p)^2}=\frac{f(y)}{(y-p)^2}$, qui doit devenir un maximum ou minimum au cas où la ligne AP, qui joint le point fixe A au point mobile P de la courbe, eſt tangente en P à cette courbe. Par cette condition on trouve $p=$ $=y-\frac{2f(y)}{f'(y)}$ [2]).



Évidemment on peut varier cette dernière méthode en fixant un autre point de la tangente, p. e. le point d'interſection A′ avec l'axe des x. Dans ce dernier cas il s'agit de rendre un maximum ou un minimum la fraction $\frac{y}{z+x}$. Huygens applique cette méthode à des cas où $y^2=f(x)$ [3]). On trouve alors, par la condition du maximum ou minimum de $\frac{y^2}{(z+x)^2}$, l'équation $z=-x+\frac{2f(x)}{f'(x)}$.

---

on doit, suivant la méthode de Descartes, commencer par déduire l'équation en x, ou en y, qui détermine les points d'intersection de la courbe avec le cercle qui a pour centre le point A et pour rayon la ligne AP. Ensuite on doit introduire la condition que cette équation possède deux racines égales qui correspondent au point P. Voir les p. 413—423 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes sous l'article: „Façon generale de trouuer les lignes droites qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits".

[1]) Voir, pour les applications de cette première méthode, les pp. 504, 506 et 515.

Ces méthodes n'exigent que des calculs très ſimples dans les cas où Huygens les emploie; mais elles ne ſont pas applicables lorſque la courbe eſt donnée par une équation algébrique quelconque $f_\mu(x, y) = 0$, irréſoluble par rapport à x et à y. Pour ce cas Huygens imagina deux autres méthodes [4]) dont toutefois il n'était nullement ſatisfait. En effet, le 25 ſeptembre 1662, il manda à de Sluſe [5]): „J'aurais déjà répondu plus tôt à votre avant-dernière [6]), n'était-ce que je me propoſais d'examiner quelques choſes concernant votre nouvelle invention, à quoi j'ai eu à peine le loiſir, il y a ſeulement quelques jours. Car j'ai été ſurpris de ce que vous écrivez de la conciſion de la méthode trouvée par vous pour les tangentes des courbes; j'ai travaillé beaucoup pour découvrir en quoi elle pouvait conſiſter, mais en vain. Il eſt vrai que j'ai trouvé ſans difficulté la tangente, que vous propoſez, de la courbe de Gutſchoven, et cela de pluſieurs manières [7]) et par un calcul très bref qui occupe à peine deux de ces lignes-ci. Et je ſuis tombé auſſi ſur votre conſtruction [8]); mais pourtant il me ſemble, d'après vos paroles, que vous avez inventé une règle de plus grande portée, s'étendant à toutes les courbes dont la nature eſt exprimée par une

---

[2]) Voir sur cette méthode la p. 505.

[3]) Voir les pp. 507—508 et 514.

[4]) Voir les p. 509—513 et consultez pour un ample exposé de ces méthodes les notes 5 de la p. 508, 11 de la p. 509 et 2 de la p. 511.

[5]) Voir les p. 237—238 du T. IV, où l'on lit: „Jam enim ante ad penultimas tuas respondissem, nisi quædam circa novem inventum tuum prius expendenda mihi proposuissem, ad quæ vix demum paucis hisce diebus liberum otium concessum est. Miratus enim quod scribis de brevitate methodi ad tangentes curvarum abs te repertæ, qualis nam ea esset invenire allaboravi sed frustra. Nam illius quidem curvæ Gutschovianæ quam proponis tangentem nullo negotio investigavi varijs modis calculoque brevissimo, qui vix duos hujusmodi versiculos occupet. Atque in tuam constructionem quoque incidi; veruntamen quantum ex verbis tuis conjicio, majus etiamnum compendium reperisti, quodque ad omnes curvas spectet quarum proprietas æquatione expressa sit, nempe ad has quoque quarum implicita quodammodo est æquatio, ut $x^3 + y^3 - xyn \infty 0$ quæ est curvæ illius quam tu in Schotenij commentarijs ad Cartesium forsan vidisti... Hujus tangentem in dato puncto ego quidem non nisi mediocriter prolixo calculo inveni (ex hac nempe æquatione, nam potest alioqui ad aliam multo compendiorem res deduci) plurimumque mirabor methodum tuam, si absque ullo pene, ac tantum inspectis characteribus istis reperire eam doceat".

[6]) La lettre du 18 août 1662 dont il est question à la p. 442.

[7]) Voir les pp. 504, 505 et 513.

[8]) Celle décrite par de Sluse dans sa lettre du 18 août 1662 (p. 207 du T. IV); mais on ne la rencontre pas dans les manuscrits de Huygens, quoiqu'elle se laisse déduire aisément des résultats obtenus par lui.

équation; ſavoir auſſi à celles dont l'équation eſt en quelque façon implicite, comme $x^3 + y^3 - xyn = 0$, ce qui eſt l'équation de la courbe que vous avez peut-être rencontrée dans les commentaires de van Schooten ſur Deſcartes [1]). . . Je n'ai trouvé la tangente à cette courbe que par un calcul médiocrement prolixe [2]) (ſavoir en me ſervant de cette équation-là, car la choſe peut être accomplie beaucoup plus commodément par une autre voie [3])) et j'admirerai beaucoup votre methode ſi elle enſeigne à trouver cette tangente preſque ſans aucun calcul et par la ſeule inſpection des termes de l'équation".

En réponſe, de Sluſe écrivit, le 6 octobre [4]), que ſa méthode avait, en effet,

[1]) Voir à ce propos la note 1 de la p. 238 du T. IV.

[2]) Voir les p. 509—512.

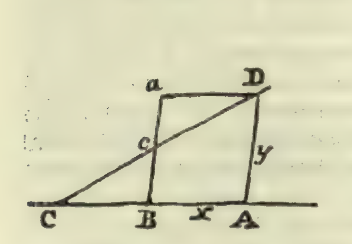
[3]) Voir les p. 506—508.

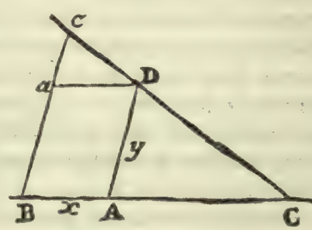
[4]) Voir les p. 246—247 du T. IV.

[5]) Dans une lettre du 10 décembre 1662, que nous ne connaissons que par la réponse de de Sluse (voir les p. 291—292 du T. IV), Huygens fit savoir à celui-ci que Hudde et lui-même avaient découvert une methode semblable à la sienne.

[6]) On retrouve cet algorithme, tel qu'il fut formulé par Hudde, dans l'„Extrait d'une Lettre de feu M. Hudde à M. van Schooten, professeur en Mathématiques à Leyde. Du 21. de Novembre 1659. Traduit du Hollandois". Cet „Extrait" fut publié p. 465—469 du „Journal literaire de juillet & aout, M.DCC.XIII. T. I. Seconde partie. A la Haye, Chez T. Johnson".

Puisque ce journal n'est pas aisément accessible, nous en empruntons la „Règle générale" qui suit: „Rangez tous les termes de l'équation qui exprime la nature de la Courbe, de manière qu'ils soient ∞ 0, &*ôtez de cette équation toutes les fractions qui ont x ou y dans leurs diviseurs. Multipliez le terme dans lequel y a le plus de dimensions, par un nombre pris à discrétion, ou même par 0, & multipliez le terme dans lequel y a une dimension de moins, par le même nombre diminué d'une unité, & continuez de même à l'égard des autres termes de l'équation. De même multipliez par un nombre pris à volonté ou par 0. le terme où x a le plus de dimensions: le terme où x a une dimension de moins, doit être multiplié par le même nombre moins l'unité, & ainsi des autres. Quand on divise le premier de ces produits par le second, le quotient multiplié par $-x$ est ∞ AC. Au contraire si on divise le second de ses produits par le premier, le quotient multiplié par $-y$ sera ∞ ac.





À cette règle le correspondant inconnu du Journal ajoute la remarque: „*Cette préparation

la portée que Huygens lui ſuppoſait et il ajouta, comme preuve, la conſtruction de la tangente à la courbe en queſtion.

Or, quelques ſemaines après, probablement au commencement de décembre [5]), Huygens apprit que Hudde était en poſſeſſion d'une méthode ſemblable. Alors, ayant pris connaiſſance de l'algorithme employé par Hudde [6]), Huygens ne tarda pas à en découvrir l'origine, qu'il expoſa dans la lettre à de Witt de février 1663 dont nous avons déjà parlé [7]). En effet, on trouvera au § 6 de la Pièce N°. VII (p. 516—517), ce que nous ſuppoſons être la première recherche inſtituée par Huygens ſur le problème en queſtion en partant de la méthode de Fermat. Elle lui fit connaître enfin la règle qu'il avait cherchée ſi ardemment. De plus, on rencontre ſur les même pages du manuſcrit de petits calculs [8]) qui ſe rapportent à l'algorithme plus général de Hudde, dont celui de Huygens conſtitue un cas particulier.

Ajoutons que Huygens communiqua ſa méthode le 13 avril 1667 à l'Académie des Sciences dans un diſcours dont nous publierons le réſumé dans un autre Tome, où nous réunirons tout ce qui concerne la participation de Huygens aux travaux de cette Académie.

Enfin, en 1693, cette méthode fut publiée dans les „Divers ouvrages de Mathématiques et de Phyſique" [9]). À cette occaſion Huygens ne manqua pas de conſtater la priorité de de Sluſe et de Hudde dans l'invention de la règle [10]).

---

n'est pas nécessaire. Il faut que M. Hudde dans le temps qu'il a écrit cette Lettre, n'ait pas connu l'avantage de sa méthode à cet égard. On voit par ses Papiers qu'il l'a connu depuis".

Voici d'ailleurs comment Huygens dix ans après s'exprime dans une lettre à Oldenburg, du 24 juin 1673 (p. 315 du T. VII), sur la part de Hudde et de lui-même dans l'invention de la méthode: „Quand est ce que nous verrons la démonstration de la methode des Tangentes de Monsieur Sluse?" (comparez la note 6 de la p. 442) „C'est cette mesme que je vous ay mandè que Monsieur Hudde et moy avions aussi. C'est pourtant Monsieur Hudde qui m'en a monstrè la pratique, et j'en ay cherchè depuis l'origine et demonstration a ma façon, laquelle en cas qu'elle soit differente de celle de Monsieur Sluze, je pourray donner aussi".

7) Voir la p. 442.

8) Voir la note 4 de la p. 516.

9) Voir l'article „Regula ad inveniendas Tangentes linearum curvarum", p. 330—335 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 du T. IX.

10) „Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam,

Notons encore que lors de la publication, en 1667, du troisième volume des „Lettres de Descartes” éditées par Clerselier [1]), et de celle, en 1679, des „Varia Opera” de Fermat [2]), Huygens aperçut [3]) que la théorie de la détermination des tangentes des courbes algébriques avait été poussée plus loin par Fermat et Descartes [4]) qu'il ne l'avait su.

S'il avait pu prendre connaissance également de la „Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée” (en juin 1638) „par M. Fermat à M. Descartes” [5]), Huygens aurait vu que Fermat était en possession d'une méthode équivalente à la sienne pour trouver les tangentes d'une courbe algébrique quelconque $f(x,y) = 0$ [6]) et qu'il l'avait appliquée, comme Huygens l'avait fait lui-même, et avec un succès égal, au folium de Descartes.

Les autres travaux mathématiques de 1661—1666.

Nous avons encore à signaler quelques autres travaux de Huygens de moindre étendue que ceux nous venons d'analyser.

Il y a en premier lieu la Pièce N°. V de 1662 (p. 498—500) où Huygens déduit par voie géométrique d'une manière aussi simple qu'élégante, une

quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusiique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque fere eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum”.

[1]) „Lettres de Mr. Descartes. Où il répond à plusieurs difficultez qui luy ont ésté proposées sur la Dioptrique, la Geometrie, & sur plusieurs autres sujets. Tome troisiesme, et dernier. A Paris chez Charles Angot, ruë S. Jacques, au Lion d'Or. M.DC.LXVII. Auec privilege du Roy”.

[2]) Voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 326 du T. I.

[3]) Voici comme il s'exprime à ce sujet dans le premier alinéa de l'article cité dans la note 9, p. 447: „Idem Fermatius linearum curvarum Tangentes regulâ sibi peculiari inquirebat, quam Cartesius suspicabatur non satis ipsum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epistolis ejus hac de re scriptis apparet. Sanè in Fermatii operibus post mortem editis, nec bene expositus est regulæ usus, nec demonstrationem ullam adjectam habet. Cartesium verò in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus assecutum invenio, nec tamen tam perspicuè eam explicuisse quàm per hæc quæ nunc tradem us fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus”.

[4]) En ce qui concerne Descartes, Huygens doit avoir eu en vue surtout la lettre à Hardy de 1638, p. 332—335 du T. III de Clerselier (p. 170—173 du T. II de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes), où Descartes explique à sa manière la méthode

équation cubique dont dépend la conſtruction de l'heptagone régulier. Enſuite on a de cette même année la Pièce N°. VI (p. 501—503) qui contient une quadrature et une cubature ſe rapportant à la courbe de Gutſchoven et à un de ſes ſolides de révolution.

Puis, la Pièce N°. VIII de 1664 (p. 518) nous fait connaître une méthode ingénieuſe pour trouver le diamètre d'une ſurface ſphérique appartenant à quelque objet, tandis que la Pièce N°. IX de l'année ſuivante (p. 519—520) nous montre que Huygens a eu un inſtant l'idée de diſcuter l'équation générale du troiſième degré en coordonnées cartéſiennes, comme Deſcartes l'avait fait pour celle du deuxième degré.

Enfin, il y a encore deux Pièces qui doivent dater de 1666. La première,

---

des tangentes de Fermat, qu'il avait fini par comprendre après y avoir fait des objections dans des lettres précédentes; voir encore les p. 328—331 de Clerselier (Adam et Tannery, T. II, p. 128—131) et sur les objections de Descartes les pp. 300—303, 305—311 et 336—337 de Clerselier (Adam et Tannery, T. I, p. 486—491, T. II, pp. 2—11 et 174—176).

Quant à la methode des tangentes de Fermat, Huygens la trouvait exposée dans l'article „Methodus ad disquirendam maximam et minimam" suivi de „De tangentibus linearum curvarum" (p. 133—136 du T. I de l'édition des „Œuvres de Fermat" de 1891—1896, citée p. 3 du Tome présent), article dont une copie avait été envoyée à Descartes, et dans d'autres articles des „Varia opera" (pp. 144—147 et 159—165 du T. I de l'édition de 1691—1896) qui étaient inconnus à Descartes; mais la méthode n'y est appliquée à des courbes algébriques que dans des cas où l'on a $y^2 = f(x)$, $f(x)$ représentant une fonction rationnelle entière ou fractionnaire.

[5]) La Pièce fut publiée en 1879 par Charles Henry, d'après un manuscrit inédit, dans le „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche et fisiche" (T. XII, p. 658—663). Elle a été réimprimée dans le T. II, p. 154—162, de l'édition de 1891—1896 des „Œuvres de Fermat".

[6]) Exprimée en notation moderne la méthode consiste dans la résolution, par rapport à la soustangente a, de l'équation:

$$f(x-e, \frac{a-e}{a}y) - f(x,y) = 0,$$

où l'on néglige les puissances de e au-dessus de la première.

Elle est basée chez Fermat sur la remarque que le point $\left(x-e, \frac{(a-e)y}{a}\right)$ de la tangente peut être quasi-considéré comme un point de la courbe.

Évidemment la methode donne: $a = -\frac{y\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$.

N°. VIII (p. 521—523) s'occupe d'un problème de l'analyſe indéterminée du premier degré, problème qui trouve ſon application dans la ſcience de la chronologie, lorſqu'il s'agit de déterminer l'année du Cycle Julien introduit par Joſeph Juſtus Scaliger. Dans la deuxième (p. 524) Huygens vérifie une quadrature approchée du cercle, propoſée par un certain Oudart.

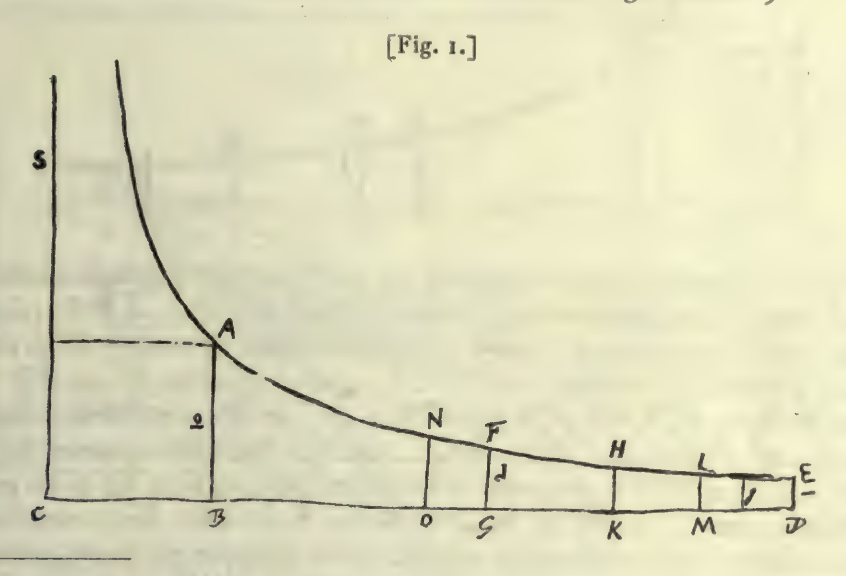
I[1].

1661.

aug. 1661.

Fundamentum regulæ nostræ ad invenienaos logarithmos[2].

[Fig. 1.]



[1]) La Pièce est empruntée aux p. 17—19 du Manuscrit B.

[2]) Voici, en notation moderne et sous sa forme la plus générale, la règle qu'on peut déduire des indications qui suivent: Posant $AB = \alpha$, $FG = \beta$, $ED = d$, $a = \alpha^{2^{-\nu}} d^{1-2^{-\nu}}$, $b = \alpha^{2^{-\nu-1}} d^{1-2^{-\nu-1}}$, $f = \beta^{2^{-\nu}} d^{1-2^{-\nu}}$, $g = \beta^{2^{-\nu-1}} d^{1-2^{-\nu-1}}$, on a approximativement, pour des valeurs de ν suffisamment grandes:

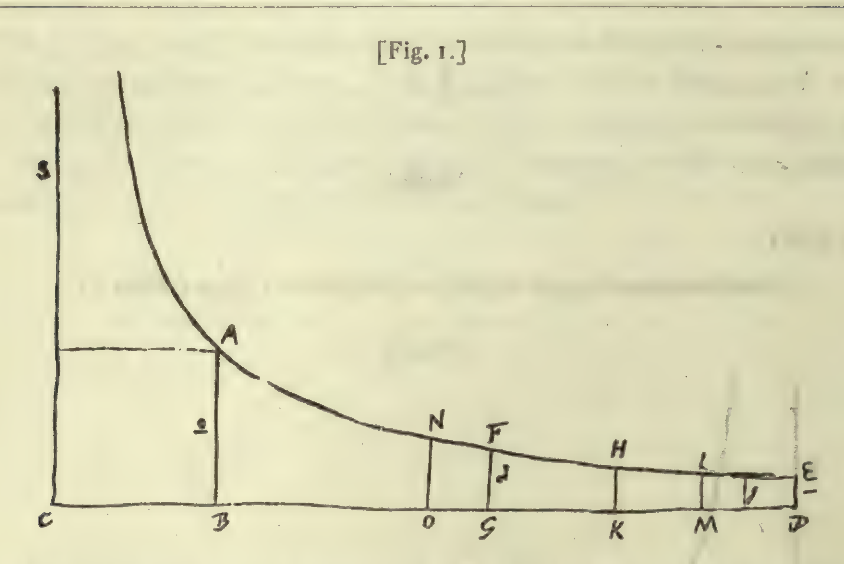
$$(1)\quad \frac{\log\beta - \log d}{\log\alpha - \log d} = \frac{\dfrac{100fd}{81f + 81d + 108g} + \dfrac{20}{27}g - \dfrac{1}{18}f - \dfrac{1}{18}d}{\dfrac{100ad}{81a + 81d + 108b} + \dfrac{20}{27}b - \dfrac{1}{18}a - \dfrac{1}{18}d} \times \frac{a - \dfrac{ad}{f}}{a - d}.$$

Prenant $\alpha = 10$, $d = 1$, $\nu = 5$, on trouve donc pour le calcul des logarithmes de Briggs la formule:

$$(2)\quad \log\beta = \frac{\dfrac{100f}{81f + 108g + 81} + \dfrac{20}{27}g - \dfrac{1}{18}f - \dfrac{1}{18}}{\dfrac{100a}{81a + 108b + 81} + \dfrac{20}{27}b - \dfrac{1}{18}a - \dfrac{1}{18}} \times \frac{a - \dfrac{a}{f}}{a - 1},$$

où $a = \sqrt[32]{10}$, $b = \sqrt[64]{10}$, $f = \sqrt[32]{\beta}$, $g = \sqrt[64]{\beta}$.

[Fig. 1.]



Sit AFE hyperbole cujus asymptoti SC, CD rectum angulum comprehendentes. sitque AB æquidistans SC partium 10, qualium ED 1, et FG 2, siquidem volo invenire logarithmum numeri 2. Quoties igitur spatium ABDE continet spatium FGDE, toties ratio AB ad ED continet rationem FG ad ED [2]), per inventa Gregij a S. Vincentio [3]). hoc est toties excessus logarithmi numeri AB supra logarithmum numeri ED continet excessum logarithmi numeri FG supra logarithmum numeri ED. notus autem est logarithmus numeri AB quem ponimus esse 10000000000 et logarithm. numeri ED sive 1, qui est 0. Ergo excessus logarithmi utriusque notus est nempe 10000 &c. idem videlicet qui logar. numeri AB.

Vide librum C ante medium ubi de his agitur [1]).

Si ergo noscatur quam rationem habeat spatium ABDE ad spatium FGDE, notus erit excessus logarithmi num.i FG supra logar. numeri ED, adeoque logarithmus ipse numeri FG.

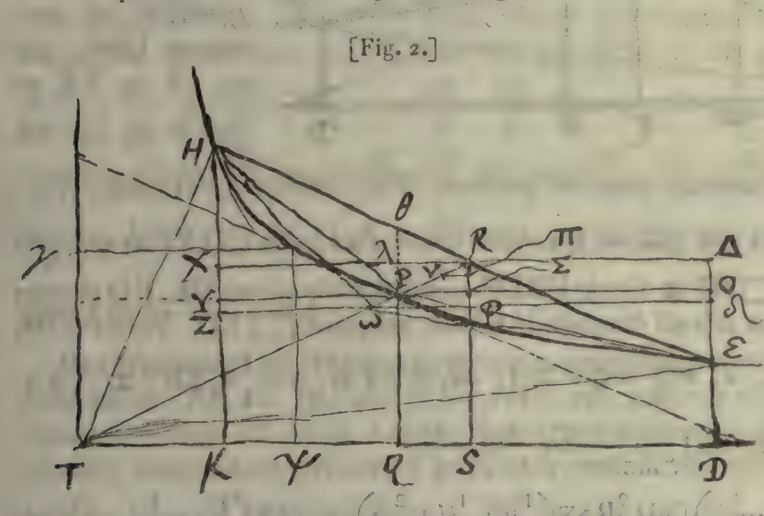
[1]) Il s'agit des p. 110—111 du Manuscrit C, qui contiennent le résumé d'une communication présentée par Huygens à l'Académie des Sciences en novembre 1666. Nous reproduirons ce résumé dans un autre Tome de notre publication, qui contiendra les discours tenus par Huygens dans cette Académie. On y rencontrera un exposé de la „methode pour trouver les logarithmes", à peu près dans la même forme que dans la présente Pièce mais sans aucune indication sur la manière dont la règle en question a été déduite. Joseph Bertrand a publié en 1868, p. 566—567 du T. 66 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, un résumé moins complet de la même communication. Ce dernier résumé fut emprunté aux Procès-verbaux conservés au Secrétariat de l'Académie.

[2]) En notation moderne: $\frac{AB}{ED}=\left(\frac{FG}{ED}\right)^{\frac{\text{aire ABDE}}{\text{aire FGDE}}}$.

[3]) Voir la „Prop. CXXIX", p. 596 de l'„Opus geometricum", ouvrage cité dans la note 6, p. 53 du T. I. Voici cette proposition, où nous avons remplacé les notations par celles de la Fig. 1: „Sint SC, CD asymptoti hyperbolæ AFE, & AB, FG, ED parallelæ asymptoto:

Ad inquirendam rationem dictorum spatiorum divido utrumque bifariam primo, quod fit inveniendo mediam proportionalem inter lineas extremas, veluti inter AB, ED constituta media NO, ea bifariam dividet spatium ABDE. Rursus medietates quæ versus ED eadem ratione biseco, et harum medietates denuo atque id aliquoties continuo, prout accurate logarithmum invenire lubet. Ponamus exempli gratia HKDE spatium per 5^{tam} bisectionem inventum esse, ideoque 32^{mam} partem spatij ABDE, ac similiter spatium LD ex 5ta bisectione spatij FD ortum esse, ac proinde 32^{mam} partem dicti spatij FD. Si igitur nota sit ratio spatij HD ad spatium LD, ea erit ipsa ratio spatij ABDE ad FGDE.

[Fig. 2.]



Spatia HD et LD separatim inveniuntur hoc modo. Sumamus spatium HD [Fig. 2]. Inter HK, ED media constituatur PQ et a centro hyp. T ducatur recta TPR, quæ rectam HE necessario bifariam secabit in R [4]) unde ducatur RS. item XRΔ, YPO parallelæ TD asymptoto. fit igitur □XD æqu. trapezio HKDE. et necessario □XO ∞ triangulo HPE. nam quia Pθ dupla Pλ [5]) erit △^{m}PHΘ æqu. □PX et △^{m}PEθ æqu. □PΔ. Auferenda autem est portio hyperbolæ HPE à trapezio HKDE sive a □°XD ut habeatur spatium HKDEP. quæ portio per nostra theoremata de quadr. hyperbolæ [6]) sic

plano autem ABGF, incommensurabile sit planum FGDE" [le cas de la commensurabilité est traité par Grégoire dans la Prop. CXXV, p. 594 de son livre]. „Dico rationem AB ad FG, toties multiplicare rationem FG, ad ED, quoties quantitas ABGF continet quantitatem FGDE."

On a donc, d'après cette proposition, $\frac{AB}{FG}=\left(\frac{FG}{ED}\right)^{\frac{ABGF}{FGDE}}$, où la multiplication des deux membres par $\frac{FG}{ED}$ amène la relation indiquée dans la note précédente.

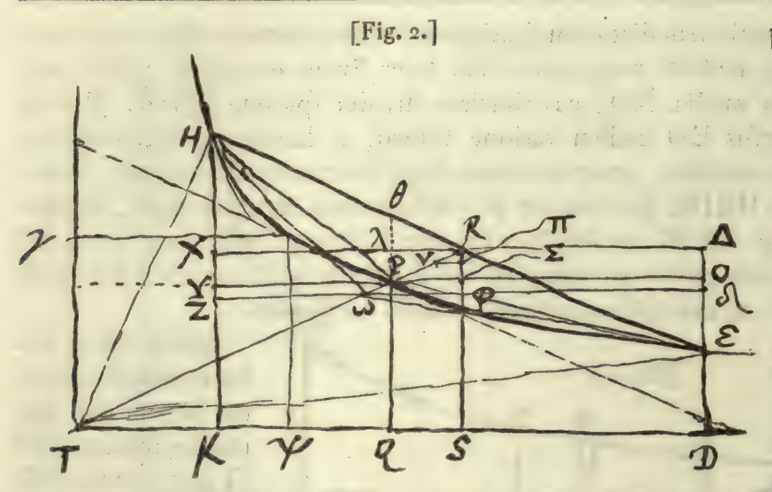
Comparez encore le dernier alinéa de la p. 457.

[4]) Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 457.

[5]) À cause de l'égalité, au cas de l'hyperbole équilatère, des angles HRX et TRX. Comparez le début de l'avant-dernier alinéa de la p. 457.

[6]) Voir (p. 305 du T. XI) le „Theorema VI" des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro". D'après ce théorème on a la pro-

[Fig. 2.]



proximè invenitur. Sit RV $\infty \frac{2}{5}$RP [1]), jam V erit proximè centr. gr. portionis HPE. Unde ficut VT ad $\frac{2}{3}$ totius RTP [2]) ita $\triangle^{m}$HPE ad portionem HPE. hoc eft, fi ut VT ad $\frac{2}{3}$RTP ita fiat PR ad Rω erit $\triangle^{m}$HωE æquale proxime portioni HPE. vel ducta VΠ parall. XΔ, fi ut ΠS ad $\frac{2}{3}$RSΣ ita fiat RΣ ad Rφ ducaturque Z$\varphi\delta$, erit $\square$Xδ ∞ portioni HPE [3]), ideoque $\square$ZD ∞ fpatio HKDE quæfito. datis autem HK, ED et inter ipfas mediâ PQ, data erit φS ducenda in KD ut habeatur $\square$ ZD. Veluti fi HK vocetur a, ED voc. d, PQ voc. $b \infty \sqrt{ad}$, fit RS $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$, ΣR [∞] $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b$. cujus $\frac{3}{5}$ [∞] $\Sigma\Pi$ [∞] $\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d - \frac{3}{5}b$.

$\Pi\Sigma$ [4]) $\left(\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b\right)$ [ad] $\frac{2}{3}$RSΣ $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}b\right)$ [ut] RΣ $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b\right)$ [ad]

Rφ $\left(\dfrac{\frac{1}{6}aa - \frac{1}{3}bb + \frac{1}{6}dd}{\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b}\right)$. hic confideravi bb effe ∞ ad.

$$\text{ex RS } \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$$

$$\text{S}\varphi \quad \frac{\frac{19}{3}bb - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{6}dd + 2ab + 2db}{3a + 3d + 4b}$$

---

portion, segm. hyp. HPE : $\triangle$HPE $= \frac{2}{3}$ (2TP + PR) : TV, où V représente le centre de gravité du segment hyperbolique.

hoc eſt $\frac{100ad}{81a+81d+108b}+\frac{20}{27}b-\frac{1}{18}a-\frac{1}{18}d$ [∞] Sφ. ducenda in KD.

Similiter data LM [Fig. 1] ∞ f et ED ∞ d, interque ipſas media prop.ⁱ ∞ ∞ g ∞ $\sqrt{fd}$. invenietur altitudo ducenda in MD, daturaque ſic rectangulum æquale proximè ſpatio LD; ea inquam altitudo invenietur $\frac{100fd}{81f+81d+108d}+$ $+\frac{20}{27}g-\frac{1}{18}f-\frac{1}{18}d$; mutatis nempe tantum a in f et b in g, in terminis qui inventi ſunt pro quantitate Sφ [Fig. 2].

Vocetur altitudo Sφ, p. Et altera quam dixi ducendam in MD [Fig. 1] vocetur n. Quadratum vero hyperbolæ γψ [Fig. 2] ſit qq. ſit igitur KD ∞ ∞ $\frac{qq}{d}-\frac{qq}{a}$. Et MD [Fig. 1] ∞ $\frac{qq}{d}-\frac{qq}{f}$. Itaque ratio ſpatij HD ad ſpatium LD erit ea quæ p in $\frac{qq}{d}-$ ad n in $\frac{qq}{d}-\frac{qq}{f}$. Sed ratio $\frac{qq}{d}-\frac{qq}{a}$ ad $\frac{qq}{d}-\frac{qq}{f}$ eſt eadem quæ $\frac{a-d}{a}$ ad $\frac{f-d}{f}$ ſive $a-d$ ad $a-\frac{ad}{f}$. Ergo ratio ſpatij HD ad ſpatium LD erit ea quæ p in $a-d$ ad n in $a-\frac{ad}{f}$.

Ad inveniendos logarithmos numerorum primorum ab unitate ad centenarium, d ſit unitas, AB 10. Itaque p in $a-d$, hoc eſt, numerus exprimens ſpatium HD (quod pars nota eſt ſpatij ABDE) ſemel tantum inveniendus eſt ad logarithmos omnium numerorum primorum infra centenarium reperiendos; imo ad omnes omnino. Sicut p in $a-d$ ad n in $a-\frac{ad}{f}$ ita erit logarithmus denarij (quia idem quoque eſt exceſſus logarithmi denarij ſupra logar.ᵐ unitatis) ad logar.ᵐ numeri propoſiti quia hic quoque exceſſus eſt logarithmi numeri propoſiti ſupra logarithmum unitatis qui eſt 0.

Radix quæ quinto extrahitur ex 10 eſt 10746078283213 [5]), hæc eſt a.

---

[1]) Formule exacte, dans le cas d'un segment parabolique, pour déterminer la situation du centre de gravité V.

[2]) RTP représente RT + TP = 2TP + PR.

[3]) On a trouvé Port. HPE = △HωE; mais △HωE = $\frac{\omega R}{TR}$ △HTE = $\frac{R\varphi}{RS}$ △HTE. Or, △HTE = trap. HKDE (à cause de l'égalité des triangles HTK et ETD) = ▭XD. Par suite △HωE = $\frac{R\varphi}{RS}$▭XD = ▭Xδ.

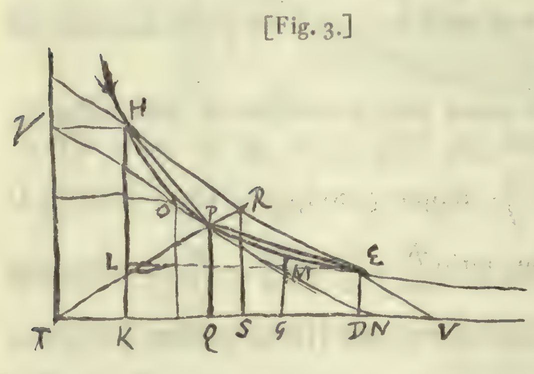
[4]) Lisez: ПS.

[5]) On retrouve cette donnée et la suivante (avec 15 chiffres de plus) à la p. 10 de la première édition (de 1624) de l'„Arithmetica Logarithmica" de Briggs; ouvrage cité dans la note 4 de la p. 477 du T. I.

Radix quæ sexto extrahitur ex 10 est 10366329284377, hæc est b.
unitas 10000000000000, est d[1]).

Hinc invenitur Sφ sive p, in $a-d$ ∞ 77324248946607, qui est numerus, semel tantum inveniendus ut diximus[2]).

[Fig. 3.]



HPE hyperbole. asymptoti γT, TD. HK, PQ, ED parallelæ asymptoto Tγ. PQ media prop. inter HK, ED. Ost. trapezium HPQK æquale trapezio PEDQ.

qu. hyp. TO ∞ aa; TK ∞ b; TD ∞ ∞ c; $\frac{aa}{b}$ HK; $\frac{aa}{c}$ DE; $\sqrt{\frac{a^4}{bc}}$ PQ sive $\frac{aa}{\sqrt{bc}}$; TQ ∞ $\sqrt{bc}$; $\sqrt{bc}-b$ KQ; $c-\sqrt{bc}$ QD.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{aa}{b}+\frac{aa}{\sqrt{bc}}\ \text{HK}+\text{PQ}\\ \sqrt{bc}-b\ \text{KQ}\end{array}\right\}\ \text{m[ult].}\qquad \left.\begin{array}{l}\frac{aa}{c}+\frac{aa}{\sqrt{bc}}\ \text{PQ}+\text{ED}\\ c-\sqrt{bc}\ \text{QD}\end{array}\right\}\ \text{m[ult].}$$

$$\frac{aa\sqrt{bc}}{b}+aa-aa-\frac{aab}{\sqrt{bc}}\qquad aa+\frac{caa}{\sqrt{bc}}-\frac{aa\sqrt{bc}}{c}-aa$$

---

[1]) Remarquons que par l'introduction de cette nouvelle unité $d=10^{13}$, la formule (2) de la note 2 de la p. 451 est remplacée par la suivante:

$$(3)\qquad \log\beta=\frac{\frac{100fd}{81f+108g+81d}+\frac{20}{27}g-\frac{1}{18}f-\frac{1}{18}d}{\frac{100ad}{81a+108b+81d}+\frac{20}{27}b-\frac{1}{18}a-\frac{1}{18}d}\times\frac{a-\frac{ad}{f}}{a-d},$$

où maintenant $a=d\sqrt[32]{10}$, $b=d\sqrt[64]{10}$, $f=d\sqrt[32]{\beta}$, $g=d\sqrt[64]{\beta}$, tandis que d peut être choisi égal à une puissance quelconque de 10.

Ajoutons que les p. 11—16 du Manuscrit B contiennent des calculs qui se rapportent à l'application de la règle à la détermination du „logar. numeri 2". Après avoir trouvé à la p. 11 les mantisses 301029994, Huygens reprend une partie des calculs, et trouve 30102999567; résultat „ou il y a 10 characteres vrais et l'unzieme qui surpasse le vray de l'unité", comme il s'exprime dans sa communication à l'Académie des Sciences.

Quant aux valeurs de f et g, employées dans ces calculs, on les trouve à la p. 458 qui suit. Huygens les a calculées à l'aide de tables de logarithmes à 14 mantisses de l„Arithmetica

aabcc — *aabbc* ∞ *aabcc* — *aabbc* bon. Demonſtratio adſcripta eſt hac eadem pagina [3]).

HK ad PQ ut PQ ad ED. HK + PQ ad PQ ut PQ + ED ad ED et HK + PQ ad PQ + ED ut PQ ad ED ſed ut PQ ad ED ita DQ ad QK (quia ut PQ ad ED ita DT.QT.KT [4])). Ergo HK + PQ ad PQ + ED ut DQ ad QK. unde quod fit ab HK + PQ in KQ æquale quod fit ab PQ + ED in DQ. Ideoque et utriuſque dimidia æqu.ᵃ. nempe trapez. HKRS trapez. RSDE [5]).

$$\text{Oſt. TQ } (\sqrt{bc}) \text{ [ad] QP} \left(\frac{aa}{\sqrt{bc}}\right) \text{ [ut] EL } (c-b) \text{ [ad] LH } \left(\frac{aa}{b} - \frac{aa}{c}\right)$$

aac — *aab* ∞ *aac* — *aab* bon

cum ergo anguli RTS, REL ſive RVS ſint æquales, fiet RV æqu. RT, ductaque γPN parall. RV, etiam PN æq. PT ſive etiam ipſi Pγ cum $\triangle\gamma$PT iſoſc. Ergo γPN tangit hyperb. in P. Ergo P vertex portionis HPE, ideoque TPR ex centro hijperb.T educta ſecat baſin portionis HE bifariam in R. ipſamque portionem in duo æqualia, e quibus auferendo $\triangle$ᵃ æqualia HPR, EPR etiam ſegmenta reliqua æqualia erunt HP, PE. quibus ablatis a trapezijs æqualibus HPQK, PQDE relinquentur ſpatia mixtilinea HOPQK, PMEDQ inter ſe æqualia [6]).

Hinc jam facile oſtenditur [7]) Rationem HK ad ED toties multiplicem eſſe rationis MG ad ED, (ſumpta MG ad libitum inter HK, ED,) quoties ſpatium HKDEP mixtilineum, multiplex eſt ſpatij MGDE. Ut ſi MG ſit media prop. inter PQ, ED, ſit ratio HK ad ED quadrupla rationis MG ad ED, ſicut et ſpatium HKDEP quadruplum ſpatij MGDE.

Logarithmica" en divisant log 2 respectivement par 32 et 64 et en cherchant les nombres correspondant à ces logarithmes. Cela était évidemment permis puisqu'il ne s'agit que d'une vérification de l'exactitude de la règle en question.

[2]) Ainsi se termine la description de la règle. Ce qui suit se rapporte aux propriétés de la Fig. 3 et à la proposition de Grégoire de St. Vincent, citée dans la note 3 de la p. 452.

[3]) Voir la démonstration qui suit.

[4]) Huygens veut dire qu'on a PQ : ED = DT : QT = QT : KT.

[5]) Lisez : „trapez. HPQK trapez. PQDE".

[6]) Ce résultat est identique avec la „Prop. CVIII", p. 585 de l'ouvrage de Grégoire, mais la démonstration est différente.

[7]) Comparez la démonstration de Grégoire de la Prop. CXXV, mentionnée dans la note 3 de la p. 452.

APPENDICE[1] À LA PIÈCE N° I.

[1668?]

Regula ad inveniendos Logarithmos.

Habeantur primum radices continuè è denario extractæ, usque ad sextam vel septimam, atque eæ characterum 14. Et radix ultimo extracta vocetur *b*; quæ vero penultimò, sive illam præcedens vocetur *a*. Unitas vero dicatur *d*. Omniaque in 10^{13} ducta intelligantur ut radicum fractio evanescat.

Radix quinta ex 10 est 10746078283213, *a*.
Radix sexta ex 10 est 10366329284377[2]), *b*.
Unitas ——— 10000000000000, *d*.

Jam inveniatur numerus æqualis istis simul $\frac{200.da}{3d+3a+4b}+40.b-3a-3d$, qui numerus vocetur *p*, est autem 5596610351845 32, idemque ducatur in $a-d$, ac productus inde vocetur *v*. Qui numerus ad omnes logarithmos inveniendos adhibebitur, estque 417550944311 6778,&c, sed hos priores characteres adhibere sufficit.

Si igitur ex. gr. inveniendus sit logarithmus binarij; habeantur et hujus radices quinto sextoque extractæ sicut de denario diximus, et

Radix quinta ex 2, 10218971486541 vocetur *f*
Radix sexta ex 2, 10108892860517[3]) vocetur *g*
Unitas 10000000000000 *d*

Similiter quoque inveniatur numerus æqualis istis simul $\frac{200.df}{3d+3f+4g}+40.g-$

[1]) L'Appendice est emprunté aux p. 21—22 du Manuscrit N°. 13 dont il est question dans le dernier alinéa de la note 5 de la p. 235.

[2]) Consultez sur ces données la note 5 de la p. 455.

[3]) Consultez le dernier alinéa de la note 1 de la p. 456.

$-3f-3d$, qui numerus vocetur n. (In hoc exemplo eſt 545869542830178.) Hic numerus n ducatur in $a-\frac{ad}{f}$ productuſque inde vocetur s, qui hic eſt 12569535892606 &c. Jamque erit ſicut numerus v ad s, ita logarithmus denarij ad logarithmum propoſiti numeri [4]), nempe hic, 0,30102999567. Pro characteriſtica præponendum ſcimus 0, quia datus num. minor eſt denario.

Si dati numeri, qui denario major ſit, invenire logarithmum libeat, extrahatur toties continuè radix ejus, donec ultimo extracta minor ſit radice ſexta ex 10 nempe 10366 &c. voceturque ultimo extracta g, penultima f, ſicut prius; omnia deinceps eodem modo peragantur, et invenietur hac ratione logarithmus radicis quæ ſeptima ab ultimâ numeratur, ſive quæ ſex locis ultimam præcedit; idque æque accurate atque modo logarithmum binarij invenimus, nempe ad 10 characteres veros. Inventum deinde logarithmum duplicando exiſtet logarithmus radicis octavæ ab ultima; et rurſus duplicando, nonæ; atque ita porro, donec exiſtit ipſius numeri propoſiti logarithmus, duplicatio continuabitur.

In vulgari logarithmorum inventione, neceſſe erat ex 32 characteribus cum totidem zero adjunctis, quadragies circiter radicem extrahere [5]), ut fieret logarithmus 10 verarum notarum. ſed et alia multa præterea peragenda erant ſummæ prolixitatis.

Demonſtratio horum in libro B [6]).

---

[4]) On a donc d'après cette règle:

$$(4)\qquad \log\beta=\frac{\left(\frac{200df}{3d+3f+4g}+40g-3f-3d\right)\left(a-\frac{ad}{f}\right)}{\left(\frac{200da}{3d+3a+4b}+40b-3a-3d\right)(a-d)},$$

formule dont il est facile de constater l'identité avec celle de la note 1 de la p. 456.

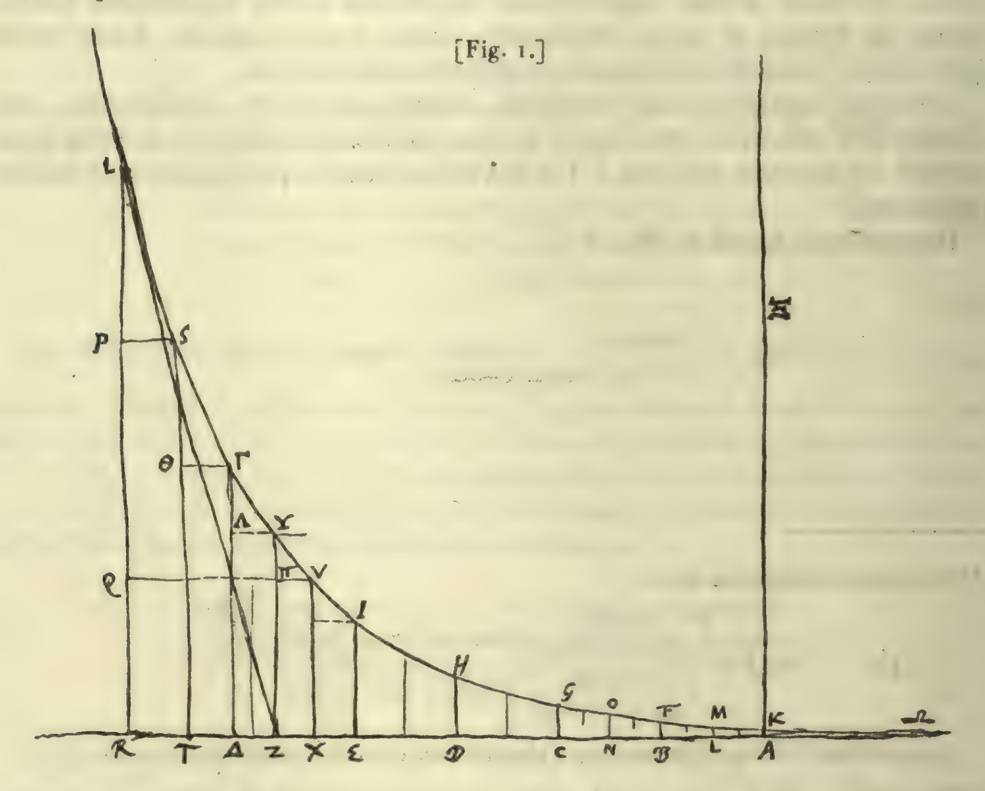
[5]) Voir, à la p. 10 de l'„Arithmetica Logarithmica" de 1624, la table des racines $\sqrt[2^n]{10}$, jusqu'à $n=54$, dont Briggs s'est servi pour le calcul de ses logarithmes. Dans la racine qui correspond à $n=40$ l'unité est suivie de onze zéros.

[6]) Voir la Pièce N°. I, p. 451—457, qui est précédée dans le Manuscrit B par des calculs préparatoires qui avec des modifications légères auraient pu amener la formule pour $\log\beta$ sous la forme (4) de la note 4; toutefois on ne la rencontre pas dans ce Manuscrit sous cette forme.

II.[1])

1661.

10 Sept. 1661.



[Fig. 1.]

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 175—183 du Manuscrit B. Avec l'Appendice qui l'accompagne, elle a été publiée par Uylenbroek dans ses „Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ", ouvrage cité dans la note 2, p. 500 du T. VII. Elle y occupe les p. 172—183 du „Fasciculus II."

La Pièce traite des propriétés de la courbe appelée plus tard par Huygens „Logarith-

In recta AE funt partes æquales fumtæ AB, BC, CD &c. et erectæ perpendiculares AK, BF, CG, DH, EI &c. quarum unaquæque eft præcedentis dupla. tranfit autem curva KGIL per extrema dictarum perpendicularium, quæ eadem per extrema etiam tranfit perpendicularium LM, NO &c. quæ e punctis bifectionum partium AB, BC &c. erectæ funt, ac mediæ proportionales inter binas utrimque proximas. crefcunt autem et hæ fecundum duplam proportionem. ac rurfus per extrema aliarum perpendicularium quæ bifecant partes ultimo effectas in recta AE, funtque item proximarum fuarum mediæ proportionales et in dupla proportione crefcentes; atque ita in infinitum per omnes enim ejufmodi perpendicularium extremitates linea curva verfus AE convexa tranfit [2]). Et patet quotlibet puncta per quæ defcribenda fit in linea facile invenire. Habet autem proprietates infignes. Primo ad inveniendas quotcunque medias proportionales inter duas datas. Sint ex. gr. PR, QR. Statuantur ad curvam perpendiculares ijs æquales ST, VX, et intervallum TX quo inter fe diftant dividatur in partes æquales unâ plures quam quot medias quærimus. Veluti fi duas, oportet dividi in tres partes, ut hic punctis ΔZ, e quibus eductæ ad lineam perpendiculares ΔΓ, ZY erunt mediæ duæ quæfitæ inter ST, VX five LR [3]), QR. Quod facile demonftratur quia inter XV, TS cadit feries infinita proportionalium ex natura lineæ, earumque totidem inter XV, ZY quot inter ZY, ΔΓ, ac inter ΔΓ, TS; totidem inquam, quia partes XZ, ZΔ, ΔT funt æquales, innumeræque illæ proportionales æqualibus intervallis a fe mutuo diftant.

TA, XA confiderandæ funt ut logarithmi linearum TS, XV [4]), et intervallum TX ut differentia logarithmorum. Ubicunque binæ perpendiculares intervallo eodem diffitæ erunt, habebunt eandem inter fe rationem. Sic ficubi duæ diftiterint intervallo æquali AB earum major minoris dupla erit, quia nempe BF eft dupla AK.

---

mique" ou „Logistique"; voir la p. 169 de l'édition originale de 1690 du „Discours de la pesanteur", qui accompagne le „Traité de la lumiere". Les résultats obtenus furent publiés sans démonstrations aux p. 176—178 du même „Discours".

[2]) Prenant AR pour l'axe des x et AΞ pour celle des y, on a donc pour l'équation de la courbe $y = \mathrm{AK} \times 2^{\frac{x}{\mathrm{AB}}}$, ou, si l'on veut, $y = ka^x$, où $k = \mathrm{AK}$, $a = \sqrt[\mathrm{AB}]{2}$.

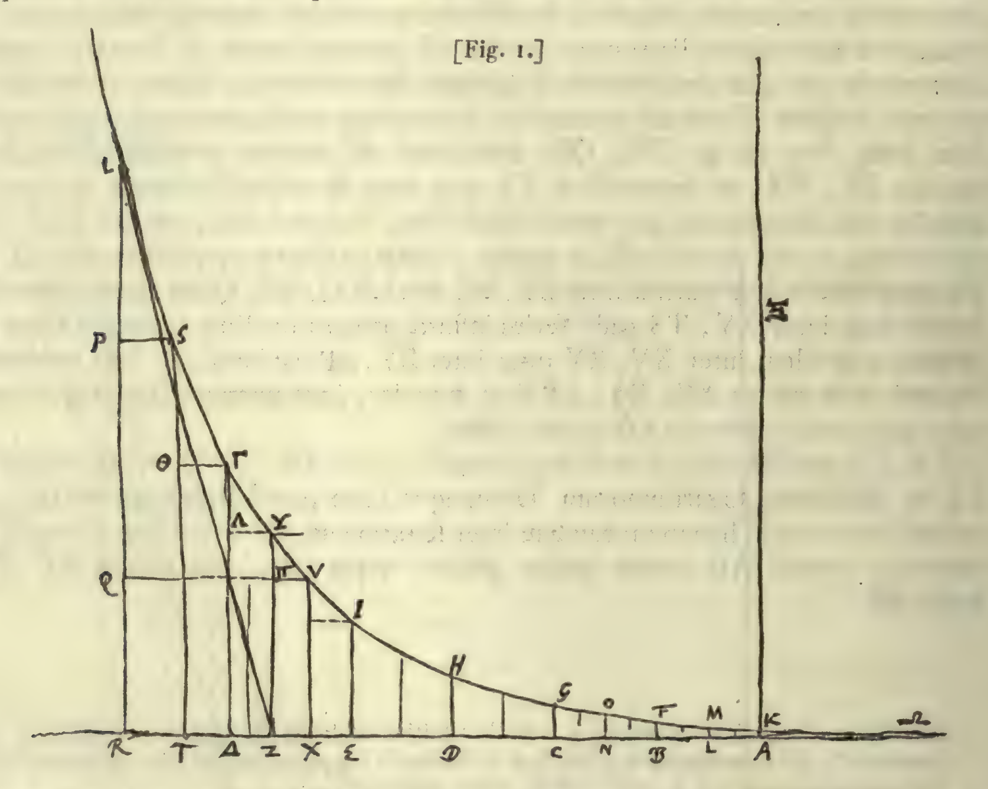
[3]) Lisez: PR.

[4]) Posant AK = 1, et prenant pour base du système des logarithmes le nombre $b = 2^{\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}}}$, on a, en effet, log TS = AT; mais la conception de Huygens est un peu différente. D'après les calculs qui suivent il considère les abscisses AT non pas comme égales mais seulement comme proportionnelles aux logarithmes des ordonnées TS. Soit donc log TS = m.AT. Or, puisque l'addition de AB aux abscisses double les ordonnées on aura nécessairement log 2 = m.AB et, par suite, $\mathrm{AT} = \frac{\log \mathrm{TS}}{\log 2} . \mathrm{AB}$, ou bien, si l'on suppose AB égal à $10^n \log 2$, AT $= 10^n \log$ TS.

Recta RA est curvæ asymptotos.

Spatia duo quævis a binis perpendicularibus intercepta quæ æqualibus intervallis distant ut sunt spatia TSΓΔ, YZXV, eam inter se rationem habent quam major unius perpend.[is] ad majorem perpend.[em] alterius vel quam minor ad minorem facillime demonstratur.

Spatium quodvis a binis perp.[bus] interceptum est ad spatium deinceps decrescens in infinitum ut differentia perpendicularium ad perpend.[m] minorem. Sic spatium STΔΓ est ad spatium infinitum ΓHKΩΔ ut SΘ ad ΓΔ. Si enim

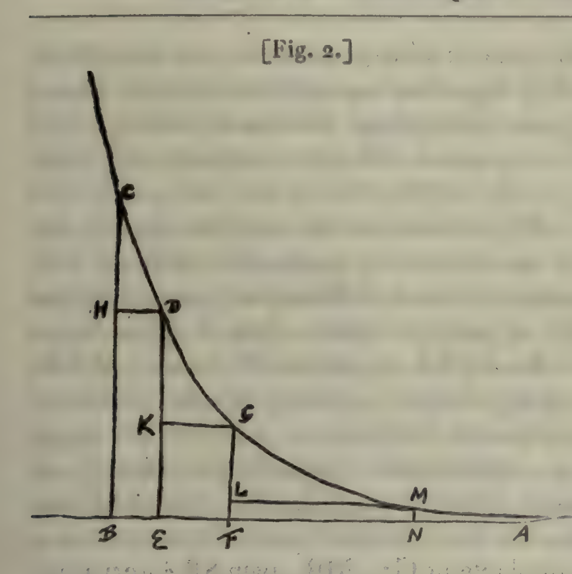

[Fig. 1.]

æqualibus intervallis ipsi TΔ constituantur perpendiculares YZ, VX, IE &c. in infinitum. Quia spatium STΔΓ ad spatium ΓZ ut ST ad ΓΔ per præced.[m] hoc est ut SΘ ad ΓΛ quia tres SΓ, ΓΔ, YZ sunt prop.[es]; Et rursus spatium ΓZ ad YX sicut ΓΛ ad YΠ, Ideoque spatium SΔ ad YX sicut SΘ ad YΠ; atque ita porro, Erit proinde spatium SΔ ad omnia spatia ΓZ, YX, &c. in infinitum ut SΘ ad omnes ΓΛ, YΠ &c. quæ simul efficiunt ipsam ΓΔ. Ergo &c.

Spatia quævis duo a duabus perpend.[bus] intercepta ut CE [Fig. 2], GN sunt inter se sicut perpendicularium differentiæ, hoc est hic ut CH ad GL, ducatur enim et GK parall. AB.

Quia ergo per præced. spatium CE est ad spatium infinitum DEA ut CH

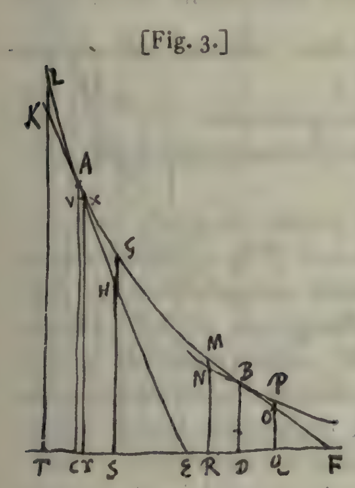
[Fig. 2.]



ad HB. Spatiumque similiter DF ad spatium infinitum GFA ut DK ad KE, Et invertendo et componendo spatium infinitum GFA una cum spatio DF, hoc est spatium infinitum DEA ad spatium DF ut DE sive HB ad DK, Erit ex æquo spatium CE ad spatium DF ut CH ad DK. Eodem modo autem ostenditur spatium DF ad spat. GN ut DK ad GL. Ergo ex æquo erit spatium CE ad spatium GN ut CH ad GL. quod erat ost.

Si curvam linea recta contingat et a puncto contactus in asymptoton perpendicularis ducatur; erit pars asymptoti inter perpendicularem et tangentem intercepta, eidem semper lineæ rectæ æqualis.

[Fig. 3.]

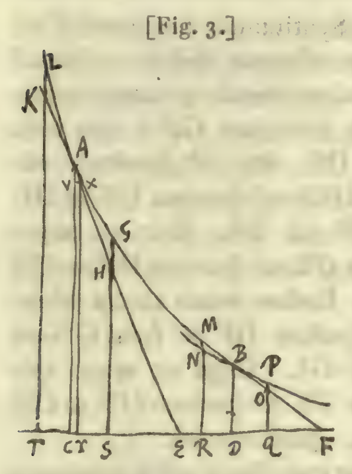


Sint hic [Fig. 3] tangentes AE, BF, et a punctis A, B perpendiculares in asymptoton, AC, BD. dico partes CE, DF esse æquales. Vel potius sic; sit AE tangens, sitque ipsi CE æqualis DF; dico et FB tangentem esse in B.

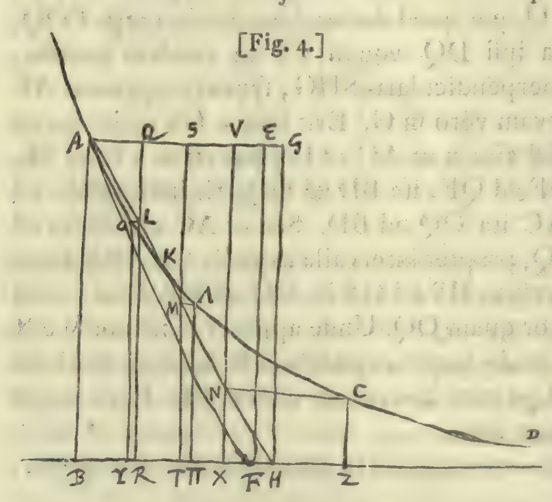
Sumatur enim in recta BF quodlibet punctum præter B, ut O, per quod ducatur perpendicularis POQ, et, sumta ipsi DQ æquali CS in eandem partem, erigatur perpendicularis SHG, secans tangentem AE in H, curvam vero in G. Erit itaque GS major quam HS [1]). Est autem ut AC ad HS hoc est ut CE ad SE, sive ut DF ad QF, ita BD ad OQ. Et invertendo est HS ad AC ita OQ ad BD. Sed ut AC ad GS ita est BD ad PQ, propter intervalla æqualia CS, DQ. Ergo ex æquo erit ut HS ad GS ita OQ ad PQ. Erat autem GS major quam HS. ergo et PQ major quam OQ. Unde apparet punctum O esse a parte convexa curvæ AB. Eodem modo autem et punctum N sumtum ab altera parte puncti B ostendetur cadere ad partem convexam curvæ AB. Ergo tangit eam recta NBOF in puncto B. quod erat dem.

Longitudo lineæ CE vel DF cujus ope tangens in quovis puncto duci posset,

[1]) Puisque la courbe est partout convexe du côté où se trouve l'axe TF; voir la p. 461.



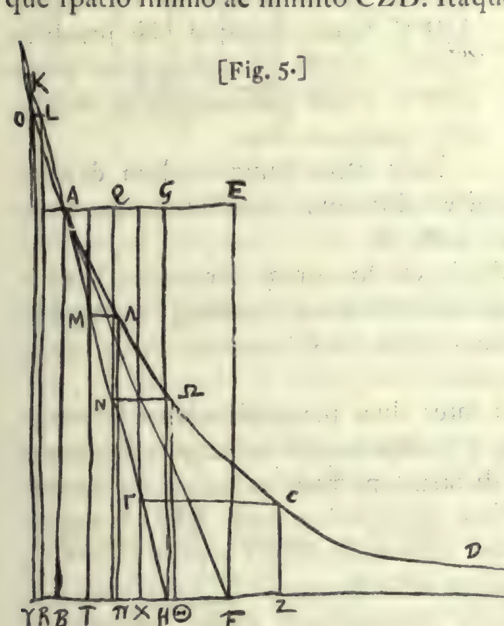
non poteſt ratione ulla geometrica, ut puto, inveniri [1]) ſed ex logarithmis quamlibet proximè. Nam ſi conſideremus triangulum minimum AVX, cujus latus AX tam curvæ AB quam tangentis AE portio cenſendum eſt, et perpendiculares AC, XY duos numeros eſſe putemus minimo quodam exceſſu ſeſe ſuperantes ut 100000 et 99999. Erit VX vel CY, logarithmorum ipſorum differentia [2]) quæ inter iſtos eſt 43430, ut patet ex tabulis. Jam ſi igitur fiat ut AV quæ eſt 1 ad VX 43430 ita AC 100000 ad CE, fiet hæc 4343000000, qualium nempe differentia inter logarithmos numerorum 100000 et 99999 eſt 43430, qualiumque logarithmus binarij eſt 3010299957. linea autem quæ referat logarithmum binarij facile invenitur, applicando tantum duas perpendiculares inter curvam et aſymptoton quarum altera ſit alterius dupla velut GS, MR, nam SR intervallum referet logarithmum binarij. Ergo ſi fiat ut 30102 ad 43430 hoc eſt proxime ut 3 ad $4\frac{1}{3}$ ita SR ad aliam ea erit linea CE vel DF, quam *latus rectum curvæ hujus* appellabimus. Invenitur autem adhuc accuratius ſi loco numerorum 100000 et 99999, quæritur per numeros 1 et $1\frac{1}{10000000000000000}$, fit enim CE 43429448190325 1804[3]) qualium logarithmus binarij eſt 30102999566398 1195[4]). Patebit autem uſus hujus lateris recti in ſequentibus.



Si a puncto quolibet in curva ſumpto ut A [Fig. 4] demittatur in aſymptoton perpendicularis, AB, dico rectangulum ab AB et latere recto BF comprehenſum nempe ABFE æquari ſpatio infinito inter curvam, perpendicularem AB et aſymptoton BZ interjecto.

Fiat enim primò in eodem latere AB, rectangulum quoddam AH quod majus ſit rectangulo AF. dico illud majus quoque eſſe dicto ſpatio infinito. Ductis enim diagonijs AF, AH rectangulorum utrorumque, conſtat quidem AF tangere curvam in A, quia BF ponitur eſſe latus rectum. Unde pars quædam lineæ AH cadet intra curvæ cavam partem, puta AK. dividatur AH in partes tot æquales punctis

L, M, N, ut earum quælibet fit minor quam AK. Et ductis per ea puncta rectis parallelis AB, divident eæ rectang.m AH in rectangula æqualia ut funt AR, QT &c. ab ijfdem vero punctis fi ducantur parallelæ afymptoti lineæ LO, MΛ, NC, et a punctis ubi hæ occurrunt curvæ AC, demittantur perpendiculares in afymptoton velut OY, ΛΠ, CZ, fient etiam fpatia inter binas quafque earum interjecta inter fe æqualia ut funt AOYB, OΛΠY, ΛCZΠ ac denique etiam infimum fpatium infinitum CZD, ut conftat ex præcedentibus [5]), quia nempe differentiæ duarum perpendicularium dicta fpatia comprehendentium funt ex conftr.e æquales. Jam vero rectang.m AR majus effe liquet fpatio AOYB, cum hoc illius pars fit, nam OY neceffario cadet inter AB et LR. Ergo et □SR majus erit fpatio OYΠΛ, quippe quod æquale eft fpatio AOYB. Item □VT majus erit fpatio ΛΠZC atque ita fingula rectangula fi plura forent, fingulis fequentibus fpatijs quum par utrorumque fit numerus, ac denique ultimum □VH majus quoque fpatio infimo ac infinito CZD. Itaque omnia rectangula omnibus fimul fpatijs; hoc eft rectangulum ABHG fpatio infinito ABDC majus erit.



Efto rurfus □ quoddam ABHG [Fig. 5] quod fit minus rectangulo ABFE; dico illud minus quoque effe fpatio infinito ADB. Ductis enim ut ante diagonijs AF, AH, cum AF tangat curvam in A, fecabit eam recta HA verfus A producta; productaque pars cadet intra cavitatem curvæ ut AK. Dividatur AH in tot partes æquales ut earum unâ appofitâ in producta HA, velut AL, non pertingat ad K. Conftructis porro reliquis ut prius. patet rectangulum AR minus nunc effe fpatio AOYB cujus nempe pars eft, nam LR manifefto nunc cadit inter OY et AB. Hinc ergo et rectang. AT minus

---

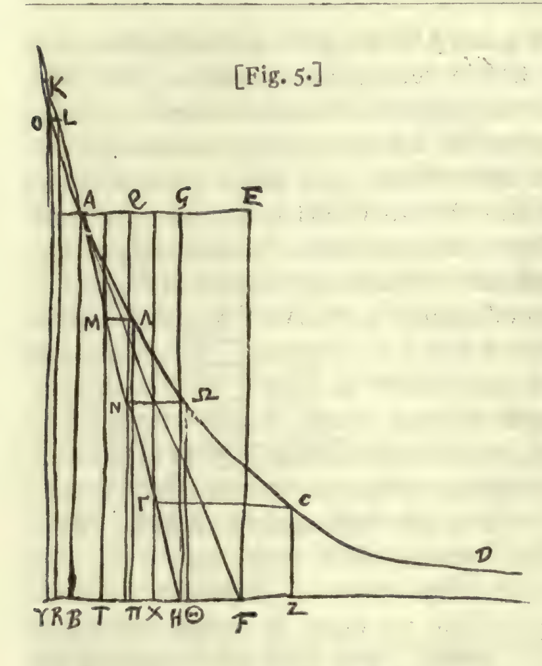
[1]) On a CE $= \frac{\log e}{\log 2}$.AB, où e représente la base des logarithmes népériens et AB (voir la Fig. 1, p. 460) la différence des abscisses qui correspond au rapport de 2 à 1 des ordonnées.

[2]) Voir la note 4 de la p. 461. On a ici $n = 10$.

[3]) On retrouve cette donnée, avec le même nombre de chiffres, à la p. 11 de l'„Arithmetica Logarithmica", ouvrage mentionné dans la note 5 de la p. 455. Ajoutons qu'on a log $e =$ $= 0{,}434294481903251827$ (Adams, Proc. Roy. Soc. of London, vol. 42, 1887, p. 25).

[4]) Ce nombre, qui indique les premiers 18 mantisses de log 2, se retrouve à la p. 14 de l'„Arithmetica Logarithmica".

[5]) Voir les p. 462—463.


[Fig. 5.]

erit ſpatio ΑΛΠΒ, cum et rectangulum rectangulo et ſpatium ſpatio priori ſit æquale. eadem ratione rectang.^{m} QT minus erit ſpatio ΛΩΘΠ, et $\square^{m}$ QX ſpatio ΩCZΘ, et $\square$GX ſpatio CDZ infinito, quod nempe et ipſum reliquis ſpatijs æquale eſt. Itaque totum rectang.^{m} ABHG minus eſſe patet ſpatio omni AΩCDBA infinito.

Cum igitur oſtenſum ſit rectangulum quodlibet quod majus eſt rectangulo ABFE, majus quoque eſſe ſpatio ACDB infinito; item rectangulum quodvis quod minus eſt rectangulo ABFE minus quoque eſſe prædicto ſpatio; neceſſe eſt rectangulum ipſum ABFE eidem ſpatio infinito æquale eſſe. quod erat dem.

Nota vero hunc modum demonſtrandi ſine deductionè ad abſurdum, quæ videtur hoc pacto alibi quoque devitari poſſe [1]).

[Fig. 6.]

Si ergo ab eodem puncto curvæ perpendicularis in aſymptoton, et tangens ducatur ut ſunt hic [Fig. 6] AB, AF, erit ſemper triangulum ABF dimidium ſpatij totius infiniti ABD.

Spatium quodvis inter duas perpendiculares interceptum ut ABLH [Fig. 7], equale erit rectangulo ſub latere recto et differentia dictarum perpendicularium, ut hic rectangulum AK. Nam cum ſpatium infin. ABD ſit æquale $\square^{lo}$ AF; ſpatium vero infin. HLD æquale $\square^{lo}$CF; eritreliquum ſpatium ABLH æquale $\square^{lo}$ reliquo AK.

[Fig. 7.]

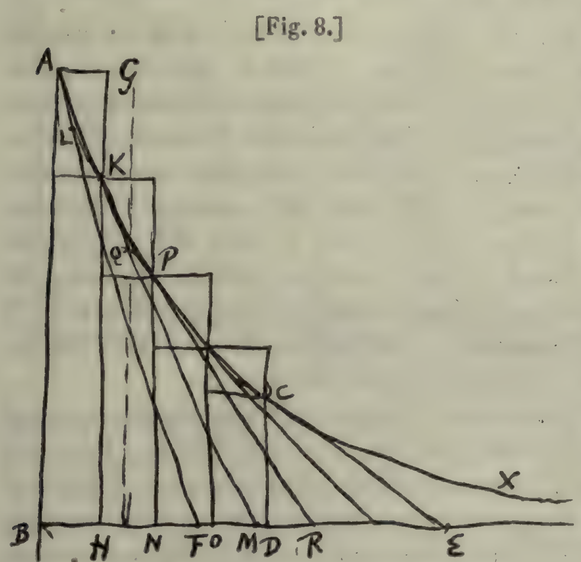
Alia præcedentis demonſtratio datur, oſtendendo ABDC [Fig. 8] terminatum duabus perpendicularibus AB, CD, duplum ſemper eſſe ſpatij inter duas tangentes AF, CE, ab ijſdem punctis eductas, intercepti.

Baſis BD in partes æquales dividatur BH, HN &c. unde perpend.^{es} ad curvam

[1]) Comparez, à la p. 338 du Tome présent, la description de Huygens de la méthode archimédienne de la réduction à l'absurde; il lui semble donc que cette méthode peut être remplacée quelquefois par celle suivie dans la démonstration qu'il vient d'achever.

erigantur, HK, NP &c. Et a punctis A, K, P &c. tangentes ducantur AF, KM &c. et compleantur rectangula BG, BK, KN, PH &c. et tangentes binæ quæque proxime sibi occurrant in punctis L, Q &c. Jam quia BF, HM, NR &c sunt æquales fient et FM, MR, &c æquales et singulæ singulis BH, HN, NO &c.

[Fig. 8.]



Itaque triang. FLM minus erit $\frac{1}{2}$ rectang.° AH, majus vero $\frac{1}{2}$ $\square^{lo}$ KB. Itidem triang.^{m} MQR, minus erit $\frac{1}{2}$ $\square^{lo}$ KN, majus vero $\frac{1}{2}$ $\square^{lo}$ PH. Atque ita composita figura ex omnibus triang. minor erit $\frac{1}{2}$ figurâ ex circumscriptis rectang.^{lis} major vero dimidia figura ex rectangulis inscriptis. Unde facile ostendetur spatium ACEF dimidium esse spatij ACDB. Quod cum ubique contingat, ubicunque perpend.^{is} CD statuatur patet cum CD infinite parva erit, spatium ACEF, fore infinitum inter curvam et asymptoton interjacens rectaque AF terminatum; spatium vero ACDB, fore infinitum inter curvam et asymptoton, atque linea AB terminatum. Itaque illud spatium infinitum hujus infiniti spatij dimidium erit, ac proinde et triangulum reliquum AFB ejusdem spatij infiniti ACXEB dimidium esse constabit.

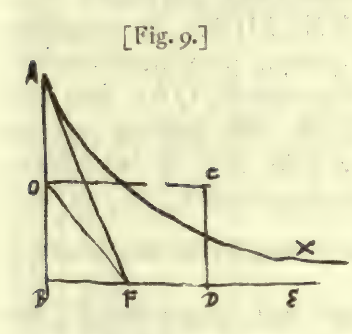
Hinc et de solido spatij infiniti circa axem BE demonstrabitur, esse sequialterum coni ex conversione trianguli AFB circa BF.

Nempe cum solidum a triang.° FLM sit minus quam $\frac{1}{3}$ cylindri a $\square^{lo}$ AH, majus vero quam $\frac{1}{3}$ cylindri a $\square_{lo}$ KB, atque ita de ceteris; facile ostendetur solidum a spatio ACEF, esse $\frac{1}{3}$ solidi a spatio ACDB idque ubicunque terminus CD statuatur. Unde solidum ab infinito spatio ACXEFA erit $\frac{1}{3}$ solidi ab infinito spatio ACXEBA. ac proinde conus a reliquo triangulo AFB æquabitur $\frac{2}{3}$ solidi ab eodem spatio ACXEBA.

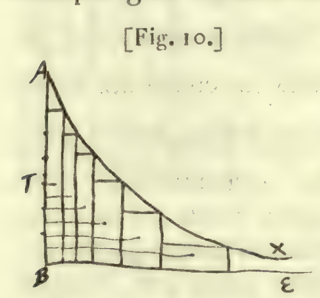
Hinc porro et distantia centri grav.^{is} spatij infiniti ABEXA, ab asymptoto BE ostenditur esse quarta pars perpendicularis AB.

Sumta enim BD [Fig. 9] ∞ duplæ BF et BO ∞ $\frac{1}{2}$ AB, et completo □lo BOCD, erit hoc duplum trianguli ABF ac proinde æquale ſpatio infinito ABEXA. Sed et cylindrus a □ BOCD circa BD æquabitur ſolido ex converſione ſpatij dicti infiniti circa BE. Eſt enim cylindrus e converſione □BOCD ſexcuplus coni a converſione triang.i OFB circa BF, ideoque ſeſquialter coni à triang.° AFB circa eandem BF, cujus coni et ſolidum a ſpatio infinito ABEX ſeſquialterum oſtendimus. Itaque centra gr. ſolidi infiniti et □i BOCD æqualiter diſtare neceſſe eſt a linea BE [1]); utraque igitur diſtat dimidiâ BO, hoc eſt quarta parte AB. q. e. d.

[Fig. 9.]



[Fig. 10.]



Poteſt idem hoc de centro gr.is aliter quoque oſtendi deſcriptis intra ſpatium infinitum ABEX [Fig. 10] rectangulis quorum unumquodque æquali altitudinis exceſſu ſibi proximum ſuperet. hæc enim ſi multitudine infinita imaginemus poterunt haberi pro æqualibus inter ſe [2]), altiſſimi autem centrum gr. diſtabit ab aſymptoto BE per dimidiam AB, et ſequentium deinceps centra gr. æqualibus ſemper intervallis propiora fient ipſi BE, quæ ſcilicet, intervalla erunt dimidia exceſſus altitudinum proximorum rectangulorum. Cum igitur æqualium magnitudinum centra gravitatis in æqualia intervalla dividant lineam BT, dimidiam ipſius AB: erit commune omnium gravitatum centrum in medio ipſius BT, hoc eſt, diſtabit per $\frac{1}{4}$ AB ab aſymptoto BE.

Nullius ſpatij a curva et aſymptoto et duabus perpendicularibus comprehenſi centrum grav. ulterius diſtat a majori earum perpendicularium quam eſt longitudo lateris recti.

Sit ejuſmodi ſpatium ABCD [Fig. 11], dico ejus centr. gr. non alterius distare ab AB quam eſt longitudo lateris recti [3]). Si enim fieri poteſt ſit ejus centr. gr. in G ita ut GM major ſit latere recto. poſſum ergo ab ea abſcindere particulam ut MR ut reſidua RG adhuc major ſit latere recto. ducatur MRO [4])

---

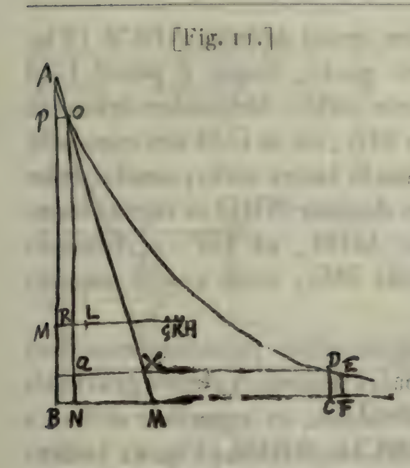
[1]) D'après le théorème de Guldin.

[2]) Voir l'avant-dernier alinéa de la p 462.

[3]) L'analyse moderne nous donne facilement pour cette distance: $r - \frac{CD}{AB-CD} \times BC$, où r représente le „latus rectum" de la courbe. C'est d'ailleurs le résultat obtenu plus loin par Huygens lui même; voir le troisième alinéa de la p. 471.

[4]) Lisez: NRO.

[Fig. 11.]



parall. BA, et per O ubi occurrit curvæ, agatur AOM recta [5]). ſietque neceſſario NM minor latere recto, quia OM non tangit ſed ſecat curvam in O. Sit OP parall. BC. et ipſi OP vel BN ſumatur æqualis CF verſus partem acutam ſpatij infiniti, et ducatur FE parall. BA. quia igitur portionis OEFN baſis FN æqualis eſt baſi CB portionis ADCB, erit quoque ON ad EF ut AB ad DC [6]). unde quum portio utraque conſtare concipi poſſit ex innumeris rectang.is æquales baſes habentibus atque eadem proportione decreſcentibus, manifeſtum eſt (ſed et acurate oſtendi poſſet) utriuſque centra grav. ſimiliter dividere diſtantiam utriuſque extremarum perpendicularium; quæ diſtantia cum ſit utrobique æqualis, æqualiter ergo utriuſque centra gr. aberunt a perpendicularibus majoribus AB, ON. Ergo cum centr. gr. ſpatij ADCB ponatur G, erit (ſumpta RH ∞ MG) punctum H centr. gr. ſpatij ONFE [7]). a quo ſi auferatur ſpatium DEFC, cujus intra ſeipſum eſt centr. gr.; apparet ſpatij reliqui ODCN centr. gr. inter H et G cadere, puta in K. Jam vero quia ſpatium AONB eſt ad ſpatium ODCN ut AP ad OQ, ex præcedentibus [2]), hoc eſt ut OP ad XQ; ſi fiat ut OP ad XQ ita KG ad GL, erit L centr gravitatis ſpatij AONB, quia nempe G ponitur centr. gr. ſpatij totius ABCD et K centr. gr. ſpatij ONCD. Erit autem GL minor quam XQ cum et KG ſit minor quam OP; nam tota HG ipſi OP æqualis erat. atqui XQ minor eſt quam MN, et hæc minor latere recto, ut ſupra dictum fuit. Ergo GL omnino minor erit latere recto. Sed GR ipſo major erat: Ergo GL minor quam GR. Itaque L centr. gr. ſpatij AONB caderet extra ſpatium ipſum, atque ita ut ducta per L linea recta [8]) totum caderet ad partem unam quod eſſe non poteſt.

Hinc itaque patet, ubicunque CD perpend.is ſtatuatur, etſi in infinitum diſtans ab AB, ſemper ſpatij ab utraque terminati centr. gr. non ulterius ab AB remotum fore, quam longitudine lateris recti atque adeo recte de ſpatio infinito concluditur eſſe ei centr. aliquod gr., idque non alterius quam dictum eſt diſtare ab AB.

Oſtendam autem neque minus diſtare ab AB, dicta longitudine lateris recti, ac proinde ipſa hac longitudine inde abeſſe [9]).

---

[5]) Remarquez le double emploi de la lettre M dans la figure. Il s'agit cette fois du point M situé sur l'asymptote BC.

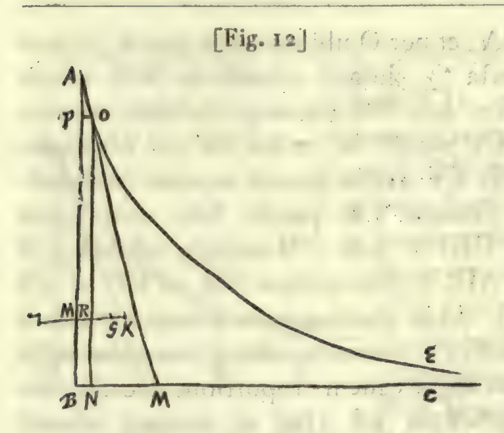
[6]) Consultez, p. 461, le premier alinéa de la présente Pièce.

[7]) En vérité on doit considérer H, K et L non pas comme les centres de gravité eux mêmes des espaces en question, mais comme les projections de ces centres sur la droite MG.

[8]) Savoir une droite parallèle à AB.

[9]) Comparez la note 3. En effet, on constate facilement que le deuxième terme de l'expression

[Fig. 12]



Sit enim ſpatij infiniti AECB [Fig. 12] centr. gr. G, ſitque ſi poteſt GM minor latere recto. Abſcindam igitur ab ea partem MR, ita ut GM una cum MR minor adhuc ſit latere recto; conſtat enim fieri poſſe. ducatur NRO ut ſupra, itemque recta AOM, et OP: et ſumatur RK æqualis MG, unde et GK æqualis fiet MR.

Cum igitur duas portiones quaslibet quarum baſes æquales, centra gravitatis ſuæ ita dividunt, ut æqualiter diſtent a perpendiculari majori, ſicut modo de portionibus ABCD, ONFE [Fig. 11] oſtendimus. ſequitur et de infinitis portionibus quales ſunt hic ABCE, ONCE idem verum eſſe, cum ergo G ponatur centr. gr. ſpatij infin. ABCE, ſitque MG æqualis RK erit K centr. gr. ſpatij infiniti ONCE [1]. Si jam ergo fiat, ſicut portio AONB ad dictum ſpatium infin. ONCE, hoc eſt, ut AP ad ON, hoc eſt ut PO ſive BN ad NM, ita KG ad GL, erit in L centr. gr. portionis AONB: eritque GL æqualis NM, quum KG ſit æqualis BN. Eſt autem BM major latere recto, (æqualis enim huic eſſet, ſi AM tangeret curvam in A, cujus pars AO nunc arcum curvæ ſubtendit, ideoque angulus PAO ſit major quam ſi AO in A tangens eſſet). Sed GM una cum MR minor eſt latere recto ex conſtructione. Ergo ablatis utrimque æqualibus hinc MR, inde BN, relinquetur NM major quam GM. Sed ipſi NM æqualis oſtenſa eſt GL. Ergo et GL major quam GM. Itaque L, centr. gr. portionis ABNO cadit extra portionem ipſam, ita ut recta per illud duci poſſit cui tota portio jaceat ad partem eandem, quod eſt abſurdum. Itaque in ſpatio infinito ABCE centr. gr. nec magis, nec etiam minus diſtat ab AB quam longitudinem lateris recti, ergo hac ipſa longitudine ab ea remotum eſt. qu. erat dem.^m^.

---

pour la distance en question s'approche indéfiniment de zéro lorsque le point C s'éloigne de plus en plus vers la droite.

[1]) Comparez la note 7 de la p. 469.

[2]) Voir le deuxième alinéa de la p. 464 et le dernier de la p. 467.

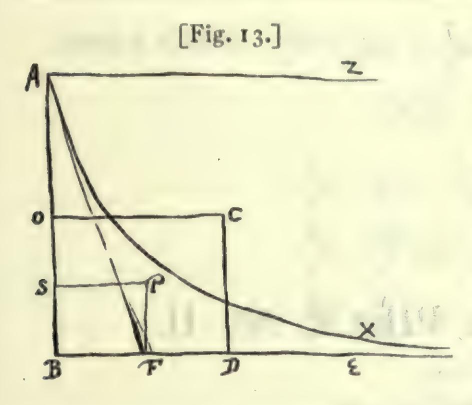
[3]) Voir le premier alinéa de la p. 468.

[4]) Comparez la note 17 de la p. 199 du Tome présent.

[5]) Comparez la note 3 de la p. 468. On arrive facilement à ce résultat en considérant l'espace en question comme la différence des deux espaces qui s'étendent à l'infini depuis chacune des deux ordonnées. On connaît, en effet, par ce qui précède, la situation des centres de gravité et les aires de ces deux espaces.

[6]) Plus tard Huygens ajouta ici: „demonstrationem multo poſt ſcripsi in libro G". Voir l'Appendice qui suit.

e résultat semble reposer sur le théorème suivant: Soit Q une figure située entièrement



[Fig. 13.]

Hinc et de folido fpatij infiniti ex converfione ejus circa perpendicularem pronuntiare poterimus. Etenim fi intra angulum perpendicularis cum afymptoto rectangulum applicetur, ut OBDC [Fig. 13], cujus altitudo OB dimidia fit AB, bafis vero BD dupla lateris recti. manifeftum eft ejus rectanguli centrum gr. P incidere in centr. gr. fpatij infiniti ABEX; cui fpatio quoque dictum rectangulum æquale eft [2]). Unde conftat converfione ejus circa OB cylindrum gigni æqualem folido infinito ex converfione fpatij infiniti circa eundem axem AB. Sicut de cylindro qui fit ejufdem rectanguli converfione circa BD, oftenfum antea eft [3]), effe eum æqualem folido alteri infinito ex circumvolutione fpatij ABEX circa afymptoton BE.

Eft ergo folidum ex fpatio infinito ABEX circa afymptoton BE ad folidum infinitum ex eodem fpatio circa AB perpendicularem, ficut PF ad PS, hoc eft ficut $\frac{1}{4}$ perpend.is AB ad latus rectum lineæ AX. ad folidum vero circa rectam AZ afymptoto parallelam ut 1 ad 3. Quod poftremum folidum calicem refert infinitæ capacitatis, licet exigui ponderis, quod et in Ciffoide contingit [4]).

Portionis a binis perpendicularibus terminatæ centrum gravitatis diftat a perpendiculari majore longitudine lateris recti demta linea quæ fe habeat ad bafin portionis ficut minor perpendicularis ad exceffum quo ipfa a majori fuperatur [5]). Si igitur detur portionis cujufvis terminatæ centrum grav. inveniri poterit latus rectum.

Centrum gr. folidi infiniti circa afymptoton diftat a perpendiculari five a bafi ipfius folidi per dimidium lateris recti [6]).

Ergo et centr. gr. folidi infiniti circa perpendicularem diftabit per $\frac{1}{8}$ ipfius perpendicularis, quæ eft axis folidi [7]).

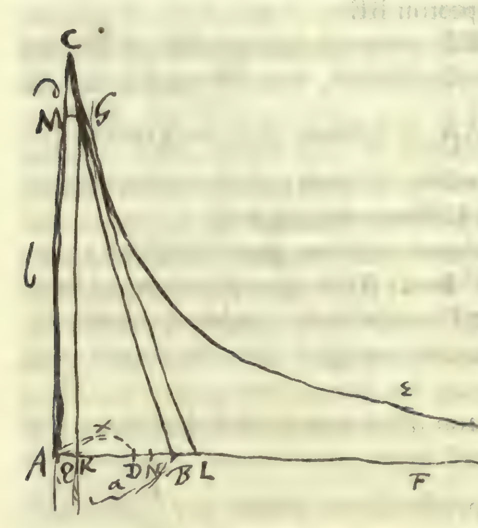
---

dans un des quadrants du système XOY de coordonnées rectilignes rectangulaires; soit Q_x le solide engendré par la rotation de cette figure autour de l'axe des x, Q_y celui qui résulte de la rotation de la même figure Q autour de l'axe des y; la distance du centre de gravité de Q_x à l'axe des y est alors à la distance du centre de gravité de Q_y à l'axe des x, comme la distance du centre de gravité de la figure Q à l'axe des y à la distance de ce même centre à l'axe des x.

Afin de démontrer ce théorème, considérons en premier lieu l'anneau décrit par la révolution d'un élément dQ de la figure Q autour de l'axe des x. Évidemment le moment de cet

APPENDICE À LA PIÈCE N°. II.

[1689] [1]).



Invenitur centrum gr. solidi à spatio infinito rectis CA, AF et Logistica CE comprehenso, circa AF conversi.

AB latus rectum. Conus a triang.° CAB circa AB est $\frac{2}{3}$ solidi illius infiniti ut ostensum lib. B [2]).

Si solidi à CAFE centr. gr. D. Et solidi a GKFE centr. gr. N Erunt æquales AD, KN: quod facile ostenditur ex sectione in orbes proportionales quorum omnium eadem altitudo in recta AF [3]).

AC ∞ b; lat. r. AB ∞ a; AK ∞ c; AD ∞ x; CM ∞ $d \infty \frac{cb}{a}$.

Solid. à CAFE [proportionalis] $\left(\frac{3}{2}bb\right)$; solid. à GKFE $\left(\frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd\right)$; solid. à CGKA $\left(+ 3bd - \frac{3}{2}dd\right)$.

---

anneau par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par l'axe des y est égal à $2\pi xy\ dQ$. Or, on trouve la même expression pour le moment de l'anneau décrit par dQ autour de l'axe des y, pris par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par l'axe des x. Il en résulte que le moment du solide Q_x par rapport au plan passant par l'axe des y est égal au moment du solide Q_y par rapport au plan passant par l'axe des x. Par suite, les volumes des solides Q_x et Q_y sont en raison inverse des distances de leurs centres de gravité respectivement à l'axe des y et à l'axe des x. Mais, en vertu du théorème

solid. à GKFE $\left(\frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd\right)$ [ad] solid. à CGKA $\left(3bd - \frac{3}{2}dd\right)$ [ut]

$$\text{DQ}\left(x - \frac{1}{2}c\right) \text{ ad DN } (c)$$

$$\frac{3}{2}b - 3d\,^{4)} \text{ [ad] } 3d \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$\frac{3}{2}b - \frac{3bc}{a} \text{ [ad] } \frac{3bc}{a} \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$\frac{3}{2}a - 3c \text{ [ad] } 3c \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$3a - 6c \infty 6x - 3c$$

$$a - 3c\,^{5)} \infty 2x;\ c \text{ minimum} \infty 0.$$

$$\frac{1}{2}a \infty x.$$

---

de Guldin, ces mêmes volumes sont en raison directe des distances du centre de gravité de la figure Q aux axes des x et des y; d'où s'ensuit le théorème en question.

Or il n'y a rien dans cette démonstration qui, sous une forme un peu modifiée, n'ait été facilement accessible à Huygens. On peut donc présumer que le théorème lui était connu; comme la dernière phrase du texte le semble prouver.

Ajoutons qu'on retrouve le même théorème dans l'ouvrage suivant de Guido Grandi, qu'il publia en 1701: „Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam lineam, Qua occasione plures Geometricæ Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illustrantur. Addita epistola geometrica ad P. Thomam Cevam S. J. Auctore D. Guidone Grando Cremonensi, Monacho Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publ. Phylosophiæ Professore".

Cet ouvrage fut réimprimé par G. J. 's Gravesande dans les „Christiani Hugenii Zuilichemi Dum viveret. Zelhemii Toparchæ. Opera reliqua. Tomus primus. Amstelodami, Apud Janssonio-Waesbergios, M.DCC.XXVIII", p. 137—315.

Guido Grandi, né à Crémone en 1671, mort à Pise en 1742, démontre le théorème d'une manière analogue à celle que nous avons suivie, quoiqu'un peu plus compliquée, et il l'emploie de même pour démontrer la conclusion à laquelle Huygens était arrivée, voir les p. 266—268 de la réimpression de son ouvrage.

[1]) D'après le lieu (p. 17 verso) que cet Appendice occupe au Manuscrit G.

[2]) Voir le deuxième alinea de la p. 467.

[3]) Comparez le raisonnement analogue qu'on trouve au milieu du premier alinéa de la p. 469.

[4]) C'est-à-dire en négligeant le terme $\frac{3}{2}dd$.

[5]) Lisez: $a - c$.

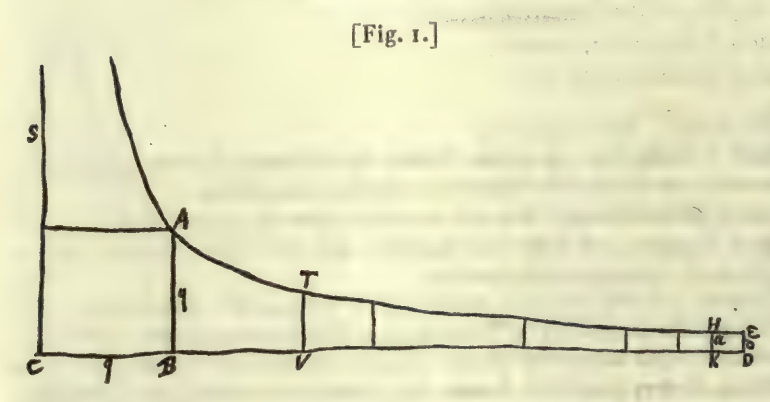
III [1].

1662.

16 Jul. 1662.

Hyperbolæ dimenſio ope Logarithmorum.

[Fig. 1.]



AHE eſt hyperbola. aſymptoti SC, CD. quadratum hyperbolæ AC. AB decupla ED. Spatium HD ex quinta biſectione ſpatij ABDE. AB ∞ q. HK ∞ a. ED ∞ d. Ergo KD ∞ $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$. vide quæ ſupra [2]) ubi de inventione logarithmorum, ubi oſtenditur quod ductâ KD in Sφ 103640932441 58 [3]) fit productum æquale ſpatio hyperbolico HD.

Quod ſi velim jam invenire magnitudinem ſpacij cujuſlibet ABVT cujus data ſit laterum ratio AB ad TV (omnia enim, in quibus hæc ratio eadem eſt, ſunt æqualia) oportet facere ut ſicut differentia logarithmorum HK et ED, ad differentiam logarithmorum AB et TV, ita ſit ſpatium HD ad aliud quod æquabitur ipſi ABVT quæſito.

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 92—95 du Manuscrit B.

[2]) Voir la Pièce N°. I aux p. 451—455.

[3]) On retrouve ce nombre dans les calculs qui, dans le Manuscrit B, précèdent la Pièce N°. I citée dans la note précédente. Il a été supputé à l'aide de la formule qu'on trouve à la première ligne de la p. 455.

Sit AB 100000. Ergo ED 10000; sit TV 50000. $\frac{qq}{d}$ ∞ 1000000

log. AB	5,00000,00000
log. ED	4,00000,00000
	9,00000,00000 sume dimidium ∞ $\sqrt{qd}$ sive medio prop. inter AB, ED.
	4,50000,00000
	4,50000,00000
a[dde] log. ED	4,00000,00000
	8,50000,00000
	4,25000,00000
log. ED	4,00000,00000
	8,25000,00000
	4,12500,00000
log. ED	4,00000,00000
	8,12500,00000
	4,06250,00000
log. ED	4,00000,00000
	8,06250,00000
f. log. HK a	4,03125,00000
ex log. qq	10,00000,00000
log. $\frac{qq}{a}$	5,96875,00000
hinc $\frac{qq}{a}$ ∞	930572,0409

$\frac{qq}{d}$ ∞ 1000000,0000

$\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ ∞ KD ∞ 69427,9501

69427,9591 KD
10364,0932 Sφ inventa in superioribus
719557838,5 [4]) spatium HD.

log. HK. 4,03125,00000
log. ED. 4,00000,00000
0,03125,00000 diff.

5,00000,00000 log. AB
4,69897,00043 log. TV
0,30102,99957 diff. log.^{m} AB et TV quæ hic est log. 2.

---

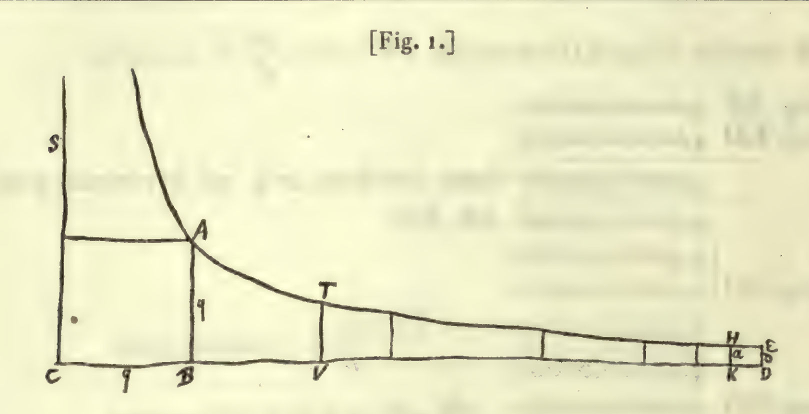
[4]) Nous supprimons dans le texte cette multiplication. Primitivement elle fut exécutée comme ici à côté; ensuite Huygens, pour obtenir un résultat plus exact, ajouta à chaque ligne des produits partiels le chiffre qui aurait suivi s'il avait admis dans cette ligne un chiffre de plus, tout en intercalant les dixièmes entre les lignes déjà écrites. De cette manière les premières quatre lignes devenaient comme il suit:

```
    694279591
    103640932
          138
         2082
        62478
      2777116
     41656770
    208283877
   694279591
   719557837
```

```
      1388
     20826
    624783
         6
  27771160
         2
      etc.;
```

ce qui menait au résultat reproduit dans le texte.

[Fig. 1.]



1.us ad[de] { 8,85706,57085 log. ſpatij HD.
2.us { 9,47860,97724 log. diff.æ log.orum AB, TV [1])

3.us ſ. { 8,33567,54809
{ 8,49485,00217 log. diff.æ log.orum HK, ED.

9,84082,54592 log. 69314,71776, ſpatium ABVT qualium partium quadratum AC, 100000,00000.

Potuiſſet et 3tius à primo ſubtrahi, et reſiduo addi ſecundus. Illudque reſiduum ad quamvis hyperbolæ portionem quadrandam uſui fore ſciendum eſt, nempe 0,36221,56868.

Hinc itaque Regula facilis oritur ad hujuſmodi portionem quamlibet hyperbolicam quadrandam.

Data enim proportione linearum portionem terminantium in numeris, capiatur differentia logarithmorum utriuſque numeri, et quæratur ejus differentiæ logarithmus, quo addito ad 0,36221,56868, hoc eſt, ad reſiduum illud modo dictum quod ſemper idem eſt, fiet logarithmus ſpatij quæſiti, unde et ſpatium numero dabitur [2]).

[1]) C'est-à-dire après multiplication par AB^2; voir les formules de la note 2.

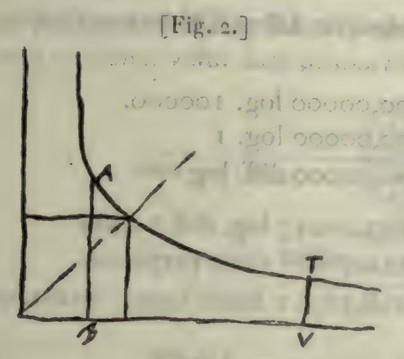
[2]) Cette règle correspond à l'emploi de la formule moderne:

$$\log\frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2}=\log(\log TV-\log DE)+(-\log\log e).$$

Or, Huygens savait (voir la p. 452) que l'aire d'un espace hyperbolique comme TVDE est proportionnelle à la fois à l'aire du carré AC et à la différence des logarithmes de AB et de DE. Il pouvait donc poser $\frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2}=C(\log TV-\log DE)$ où C représente une constante, et en déduire:

$$\log\frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2}=\log(\log TV-\log DE)+\log C,$$

où il s'agit de calculer la valeur de log C. À cet effet il applique sa méthode d'approximation



[Fig. 2.]

Sit ex. gr. data ratio linearum AB ad TV quæ 36 ad 5 [3]).

1,55630,25008 log. 36
0,69897,00043 log 5
0,85733,24965 diff. log.orum

ad[de] { 9,93314,92856 log. diff.æ
0,36221,56868 num. perpetuus

10,29536,49724 hujus logarithmi numerus erit area spatij ABVT in partibus qualium quadratum hyperbolæ est 100000,00000. Habebit autem numerus ille 11 characteres, quum characteristica logarithmi ejus sit 10, quæratur itaque primo numerus proximus dato logarithmo conveniens neglecta characterica 10; invenitur 19740; deinde ex differentia logarithmorum proximorum reliqui characteres eliciantur 81018, scribendi post priores ut fiat 19740,81018,0, addito ad finem zero ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo 1,97408,10180 area spacij ABVT.

à la détermination de l'aire de l'espace HKDE; après quoi la formule

$$\log \frac{\text{spat. HKDE}}{AB^2} = \log(\log HK - \log DE) + \log C$$

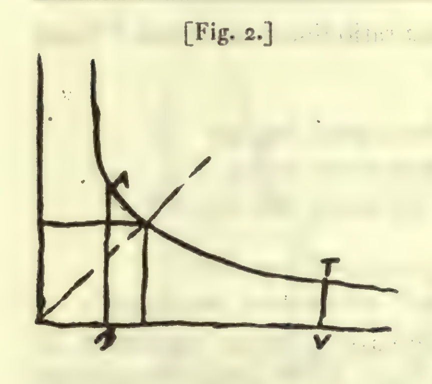
lui permet de calculer la valeur cherchée de log C, pour laquelle il trouve 0,3622156868.

Ajoutons qu'on retrouve la même règle dans le Journal des Sçavans de juillet 1668 (voir la p. 231 de notre Tome VI), à la p. 23 du Manuscrit N°. 13, cité dans la note 5 de la p. 235, et dans l'„Horologium oscillatorium", p. 78—79 de l'édition originale. Seulement, Huygens remplace dans le Manuscrit N°. 13 et dans l'„Horologium oscillatorium" le „numerus perpetuus" de la présente règle par 0,3622156887; sans doute par suite d'un nouveau calcul que nous ne connaissons pas. Or, on a, en effet, $-\log\log e = 0{,}362215688699$.

Remarquons encore que l'emploi de l'ancienne valeur dans le Journal des Sçavans prouve que la Pièce qu'on trouve dans le Manuscrit N°. 13 doit être postérieure au 2 juillet 1668.

[3]) On retrouve le même exemple dans le Journal des Sçavans, dans le Manuscrit N°. 13 et dans l'„Horologium oscillatorium" aux lieux indiqués dans la note précédente; toutefois, dans ce Manuscrit et l'„Horologium oscillatorium" les résultats sont un peu différents de celui obtenu dans le texte à cause de la valeur différente assignée au „numerus perpetuus". C'est le seul exemple traité dans l'„Horologium oscillatorium"; mais le Manuscrit N°. 13 suit d'assez près jusqu'à la fin le texte de la Pièce présente à l'exception de la valeur employée pour le „num. perp.".

[Fig. 2.]



Sit rursus proportio AB ad TV data ut 100000 ad 1.

5,00000,00000 log. 100000.
0,00000,00000 log. 1
5,00000,00000 diff. log.orum

ad. { 10,69897,00043 log. diff.æ dictæ
0,36221,56868 num. perpetuus.
11,06118,56911 hujus logar.i quæratur numerus
fit 11,51292,54200 area ABVT.

Sit jam data proportio AB ad TV quæ 100000 ad 99999.

5,00000,00000 log. 100000
4,99999,56570 log. 99999
43430 diff. log.orum

4,63778,98294 log. diff.æ
0,36221,56868 num. perpetuus
5,00000,55162 logarithmi hujus numerus ut inveniatur, quærendi logarithmi duo proximi quorum differentia 55162, qui sunt logarithmi numerorum 78730, et 78729 [1]). Est autem 5,00000,00000 logarithmus 100000. Itaque multiplicetur 100000 per 78730 et dividatur per 78729, fit $100001\frac{3}{7}$ [2]) numerus conveniens logarithmo proposito, atque hic numerus est partium area ABVT qualium nempe quadratum hyperbolæ est 1,00000,00000.

---

[1]) Il s'agit de la table des logarithmes à dix mantisses qu'on trouve dans l'„Editio secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum", de 1628, de l'„Arithmetica Logarithmica"; ouvrage que nous avons mentionné dans la note 5 de la p. 455 du présent Tome. On la trouve aussi dans les éditions française, allemande, hollandaise et anglaise de cet ouvrage qui parurent en même temps. Dans cette table Vlacq a comblé la lacune qui existait dans la première édition, où Briggs s'était borné à donner les logarithmes (jusqu'à 14 mantisses) des nombres de 1 à 20000 et de 90000 à 100000.

En effet, on rencontre dans la table en question le nombre 55162 dans la colonne des „Differ.", comme indiquant la différence des logarithmes de 78729 et 78730. On a donc: $0{,}0000055162 = \log\frac{78730}{78729}$ et, par suite, num. $5{,}0000055162 = 7873000000 : 78729 = 100001\frac{21271}{78729}$.

Possumus etiam quinque posteriores characteres omittere cum tanta ἀκρίβεια non est opus, velut data proportione AB ad TV quæ 27183 ad 10000

4,43429 log. 27183
4,00000 log. 10000
0,43429 diff. log.
4,63778 log. diff.æ
0,36222 num. perp.
5,00000 logarithmus 1,00000 quæ est area spacij ABVT, quam hic apparet ipsi quadrato hyperbolæ æqualem esse, nam et hoc demtis quinque zero est 1,00000.

Data vicissim magnitudine spacij ABVT puta 1,97408 partium qualium quadratum hyperbolæ 1,00000 continet inveniemus proportionem laterum AB, TV dictum spatium terminantium hoc modo,

1,97408 spatium datum
s. { 5,29536 log. spatij dati
0,36222 num. perp.
4,93314 log. differentiæ log.orum
0,85733 differ. log.orum

Quærendi jam duo numeri quorum logarithmi differant 0,85733. Hi enim numeri inter se rationem laterum quæsitam tenebunt.

s. { 5,00000 log. 100000
0,85733 diff. log.orum
4,14267 log. 13889

Ergo AB ad TV ut 100000 ad 13889 hoc est proxime ut 36 ad 5 [3]).

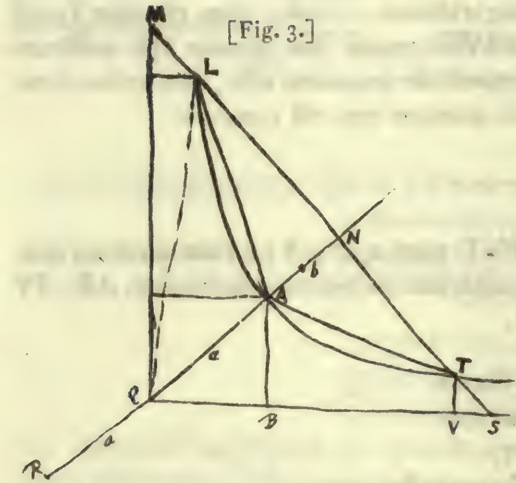
Sit spatium ABVT datum 1,00000, nempe æquale quadrato hyperbolæ.

---

[2]) Lisez plutôt $100001\frac{3}{11}$.

[3]) On a $36:5 = 100000:13888\frac{8}{9}$.

1,00000 ſpatium datum
ſ. | 5,00000 ejus log.
| 0,36222 num. perp.
4,63778 log. differ. log.^{orum}
0,43430 diff. log.^{orum}
ex 5,00000 log. 100000
4,56570 log. 36790 [1]).



[Fig. 3.]

Portionis Hyperbolæ aream invenire [2]).

Conſideretur primum portio hyperboles cujus latera tranſverſum rectumque ſint æqualia, hoc eſt cujus aſymptoti rectum angulum conſtituant ut LAT. AR latus tranſv. ſit $\infty\ 2a$. AN $\infty\ b$ Ergo NT $\infty \sqrt{2ab + bb}$. et TS $\infty\ a + b - \sqrt{2ab + bb}$

$aa + 2ab + bb \infty \triangle$ MQS
$\frac{1}{2}aa \infty$ qu. ABQ } ſ.

$\frac{1}{2}aa + 2ab + bb$ hinc ſubtrahe inſuper $2\triangle$TSV ſive $\frac{1}{2}$qu. TS

$\frac{1}{2}aa + ab + \frac{1}{2}bb - a\sqrt{2ab + bb} - b\sqrt{2ab + bb} + ab + \frac{1}{2}bb$

$\overline{a + b}\sqrt{2ab + bb}$ hinc ſubtrahe 2 ſpat. ABVT eritque reliquum æquale ſpat. LAT.

---

[1]) Dans le Manuscrit N°. 13 le même problème est traité en employant dix mantisses, ce qui conduit à la conclusion: „Ergo [AB] ad VT ut 1,00000,00000 ad 36787,94412".

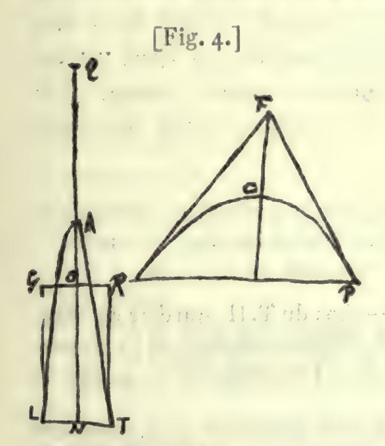
[2]) Plus tard, à une époque inconnue, Huygens a biffé toute la partie du texte que l'on trouve sous cet en-tête en ajoutant l'annotation „Hæc multo brevius peragi possunt"; mais puisque plus loin (voir la note 1 de la p. 482) la valeur de l'aire du segment LAT est utilisée dans les calculs, nous n'avons pas cru devoir supprimer la déduction de cette valeur. Quant à la méthode plus brève, elle est indiquée par la figure qu'on trouve à la p. 78 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium". En effet, si du point L on abaisse la perpendiculaire LE sur l'asymptote QS, on voit que le segment hyperbolique LAT est égal au trapèze LEVT diminué de l'espace hyperbolique LATVE.

ſit AQ 100000. a
AN 200000. b
Ergo 400000. $2a+b$
5.6020599 log. $2a+b$
5.3010299 log. b
10.9030898 ſum.
5.4515449 log. $\sqrt{2ab+bb}$
282840 $\sqrt{2ab+bb}$. NT.
ex 300000 $a+b$ NS ∞ NQ
17160 TS
5.4515449 log. $\sqrt{2ab+bb}$
0.4771213 log. $a+b$
5.9286662 log. $\overline{a+b}\sqrt{2ab+bb}$
5.4515449 log. NT
5.3010299 log. AN
10.7525748 log △.LAT
565680 △LAT [3])

ratio AQ ad TS eadem quæ AB ad TV. hinc per method. præc. invenietur ſpat. ABVT
5.00000 log. AQ
4.23451 log. TS
0.76549 diff. log.orum
4.88394 log. diff.æ [4])
0.36222 num. perp.
5.24616 log. sp. ABVT
176260 ſpat. ABVT in partibus qualium quadr. AB 100000.
Ergo qualium quadr. AQ est 100000 talium 176260 erit 2 ſpatium ABVT.
ex 848530 $\overline{a+b}\sqrt{2ab+bb}$
671270 [5]) portio LAT in partibus qualium qu. AQ 100000.
majoribus logarithmis utendo accuratius area hæc invenietur.

Omnes autem hyperbolæ portiones quarum diameter ad latus tranſverſum eandem rationem habent, eæ ad inſcriptum ſibi triangulum quoque eandem rationem habent. Unde apparet datâ qualibet portione poſſe hac methodo aream ejus inveniri.

[Fig. 4.]



Lineæ Parabolicæ, portionem rectam continenti, invenire rectam lineam æqualem.

Sit portio data PCR [6]), et in eadem baſi ponatur △lum iſoſc duplæ altitudinis RFP. Tum hyperbolæ portio ſumatur LAT cujus dimidium latus tranſv. QA ſit ∞ baſi parabolæ RP. Quæ autem ex centro ſectionis ad mediam baſin hyperbolæ extenditur QN ſit ∞ duabus ſimul RF, FP. Jam per methodum præcedentem inventa hyperbolicæ portionis area, dividatur ea per baſin LT, fietque altitudo rectan-

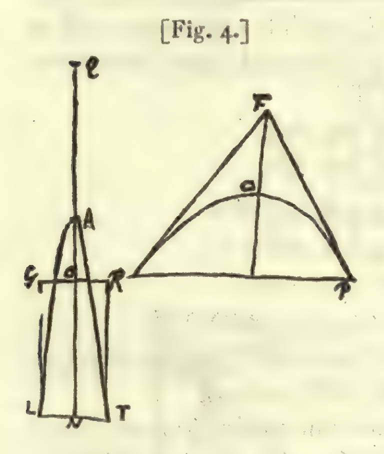
[3]) Huygens divise ici par 100000, mais, puisqu'il le fait partout pour les aires qu'il veut comparer, le résultat n'en est pas faussé.

[4]) Après multiplication par l'aire du carré sur AB (voir les formules de la note 2 de la p. 476), pour laquelle Huygens prend 100000.

[5]) Lisez: 672270.

[6]) La construction, qui va suivre, pour trouver un segment OQ qui soit égal à l'arc parabolique

[Fig. 4.]



guli GT portioni æqualis, qua altitudine NO deducta ab NQ sive RF + FP, reliqua OQ æquabitur curvæ parabolicæ RCP.

Sit RP 100000. RF, 150000. Hinc portio LAT fit 67127000000 [1]) qualium AQ 100000

10,82690 log. port. LAT
5,75257 log. LT [2])
5,07433 log. NO

300000 NQ } f.
118670 NO }
181330 OQ ∞ curvæ RCP.

RCP est identique à celle qu'on trouve aux pp. 344 et 501—502 du T. II, qui date de 1659, et on la retrouve avec une modification légère à la p. 77 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium". D'ailleurs elle se déduit aisément du „Theorema VIII", p. 249 du présent Tome.

[1]) Puisque le „latus rectum" de l'hyperbole LAT peut être choisi à volonté on peut considérer cette hyperbole comme une hyperbole équilatère et y appliquer ensuite les calculs qu'on trouve à la p. 481. Or, d'après ces calculs on a 671270 (lisez: 672270) pour l'aire du segment hyperbolique LAT dans le cas où l'on pose 100000 pour le carré construit sur le côté AQ [Fig. 3]. Donc, puisque dans le présent calcul on pose AQ = RP = 100000, on trouve 100000^2 pour le carré sur AQ et 67127000000 (lisez: 67227000000) pour l'aire du segment LAT.

[2]) Ce nombre est la somme de log NT (p. 481) et de log 2.

IV.

1662.

17 Jul. 1662.

De altitudine Atmosphæræ [1]).

In Toricelliano experimento altitudo Hydrargyri in tubo, cum bene ab aere purgatus eſt, inventa eſt a Boilio 2 ped. 6 poll. Londinenſium ſive unciarum 30 [2]). Quæ nempe hydrargyri altitudo æquiponderat cylindro aeris uſque ad extremam atmoſphæram, cujus eadem ſit craſſitudo quæ tubi diametri. Proportio autem gravitatis Hydrargyri ad aquam eſt quæ $13\frac{4}{7}$ [3]) ad 1 proximè unde cylindrus aqueus dictis 30 uncijs hydrargyri ſive cylindro aereo æquiponderans erit altus circiter 34 pedibus. Proportio rurſus gravitatis aeris ad aquam a me inventa eſt circiter quæ 1 ad 960 [4]) Aeris videlicet ita ut hìc compreſſus eſt. Itaque altitudo 32640 pedum aeris ita compreſſi æquiponderaret aquæ pedibus 34, vel uncijs 30 argenti vivi, quanta nempe altitudo ſit ductis 960 in 34. Sumamus autem rotundum numerum 33000 pedum.

---

[1]) Quoique cette Pièce n'appartienne pas aux mathématiques pures, nous n'avons pas voulu la séparer de celle qui précède et dont elle constitue une application. Elle la suit immédiatement aux p. 96—100 du Manuscrit B et y est datée du lendemain du jour où l'autre Pièce fut composée.

Une version plus récente assez différente se trouve aux p. 27—33 du Manuscrit N°. 13; nous la reproduisons dans l'Appendice I, p. 491—494, pour autant qu'elle diffère notablement de la version du texte présent.

[2]) On rencontre cette donnée dans l'„Experimentum XXXVI" des „Nova experimenta physico-mechanica"; ouvrage de 1660, cité dans la note 4 de la p. 295 de notre T. III. Dans l'„Experimentum XVII" Boyle avait trouvé „triginta digitos & supra octavam digiti partem".

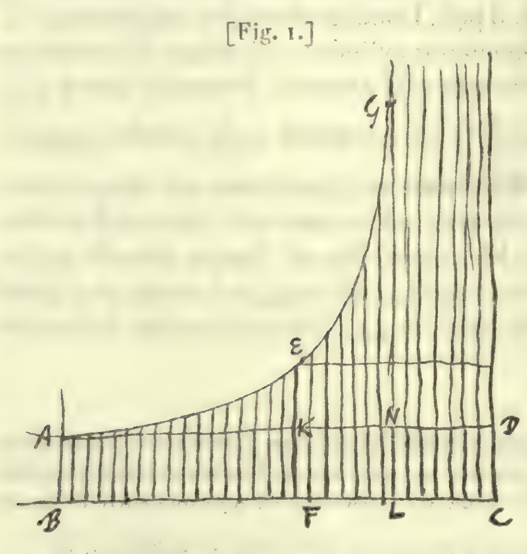
[3]) Boyle dans l'„Experimentum XXXVI" avait trouvé $13\frac{19}{28}$.

[4]) Comparez la lettre au frère Louis du 22 février 1662, p. 64 du T. IV. On trouve les expériences, du 20 février 1662, qui ont amené cette donnée, à la p. 57 du Manuscrit B. Nous les publierons dans un autre Tome.

Porro compertum eſt Boilianis experimentis, ſpatia ab eadem quantitate aeris occupata contrariam rationem ſervare ponderum quibus premitur [1]). Ita ſi aeris particulam tubo vitreo incluſam 60 unciæ hydrargyri premant, is aer duplo minus ſpatium occupabit quam ſi tantum 30 uncijs hydrargyri prematur. Ubi tamen ſemper aeris quoque gravitas in cenſum venire debet, ut nempe aer tubo incluſus, cum nullus hydrargyrus adfuſus eſt, tamen quaſi a 30 uncijs hydrargiri premi intelligatur, quia tantum eſt pondus aeris ſuperſtantis. At cum 30 unciæ hydrargiri injectæ ſunt, quaſi a 60 uncijs premi credendus. Uncias pedis Lond.is non vero gravitatis intelligimus. Hiſce igitur poſitis omnia quæ ad Atmoſphæræ altitudinem, diverſamque aeris in qualibet ejus regione denſitatem pertinent, explicari poſſunt.

Ponamus cylindrum quendam aeris ab ima terra ad ſupremam atmoſphæram diviſum eſſe ſectionibus horizon.bus in partes minimas quarum unaquæque æqualem aeris quantitatem et pondus contineat, quas partes extenſione admodum inæquales fore perſpicuum eſt, cum quanto quæque altior eſt tanto minus aeris pondus ſuſtineat ideoque amplius ſe extendat. Quantitates autem aeris æquales iſtis partibus comprehenſæ deſignentur per particulas æquales in quas ſectum eſt rectangulum ABCD. Quarum quæ proxima eſt AB, referat particulam aeris infimam, et ſequentium quæque ſequentes ordine eodem particulas aeris. Quod ſi igitur recta AB referat altitudinem ad quam ſeſe extendit particula aeris infima, facile jam et reliquarum extenſio reperietur. Conſideremus enim quamlibet earum ut FK; quæ cum ſuſtineat tantùmmodo reliquarum pondus quæ efficiunt rectangulum KFCD, tanto proinde latius ſe expandet quam particula infima ad AB, quanto graviores ſunt quæ toto

[Fig. 1.]



[1]) Huygens reçut le premier avis de cette découverte de Boyle par l'intermédiaire de Moray dans une lettre du 13 mars 1662; voir les p. 84—85 du T. IV. Après avoir pris connaissance ensuite de la „Defensio Doctrinæ de Elatere et Gravitate Aeris" (ouvrage cité dans la note 2 de la p. 171 du T. IV), où Boyle communique les expériences qui l'on conduit à sa loi, Huygens fut pleinement convaincu de l'exactitude de cette loi puisqu'il écrivit à Moray le 14 juillet 1662 (voir la p. 171 du T. IV): „J'ay esté sur tout bien aise d'y trouver les deux experiences touchant la condensation et rarefaction de l'air, qui prouvent assez clairement cette proprieté remarquable a sçavoir que la force de son ressort suit la proportion contraire des espaces ou il est reduit".

rectangulo ABCD continentur ijs quæ efficiunt rectangulum KFCD. Hoc est sicut BC ad CF ita erit EF altitudo extensionis particulæ KF ad AB altitudinem extensionis particulæ infimæ. Ergo rectangulum AB, BC, æquale erit rectangulo EF, FC, ideoque punctum E ad hyperbolen, quæ per punctum A describitur ad asymptotos BC, CD. Singularum itaque prout ordine exhibentur in rectangulo ABCD, extensiones determinat hyperbola AEG, utque EF est extensio particulæ KF, ita GL est extensio particulæ NL atque ita de cæteris.

Extensiones autem omnium simul quæ rectangulo ABFK continentur, efficient spatium AEFB, et omnium quæ rectangulo ABLN extensiones efficient spatium AEGLB. atque ita quanto majus est ex. gr. spatium AEGLB rectangulo ABLN tanto major erit altitudo extensarum partium hujus rectanguli quam si omnes æque atque infima ad AB compressæ jacerent. Et quæ proportio spacij AEGLB ad rectangulum totum ABCD, eadem erit altitudinis partium extensarum rectanguli ABLN ad altitudinem omnium rectanguli ABCD, ita ut infima est, compressarum; hoc est ad altitudinem 33000 pedum.

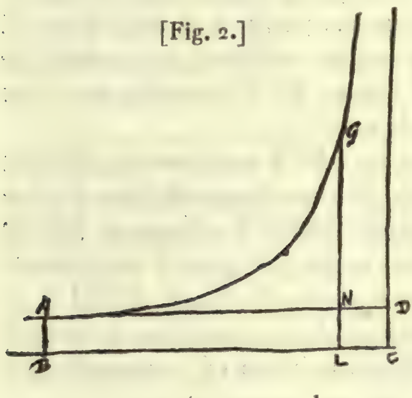
Hic itaque primo animadvertendum est, cum spatium quale AEGLB possit majus majusque sumi in infinitum (nam spatium inter hyperbolen et asymptotos est infinitæ magnitudinis) sequi infinitam esse aeris sive atmosphæræ altitudinem. utique si in quantalibet aeris extensione sibi constare sumamus Boilianum experimentum. Sed si ex corporeis partibus aer constat sese mutuo tangentibus, nam contactum hunc arguere videtur vis illa aeris elastica, non potest fieri ut in infinitum cylindrus aliquis aereus extendatur, cum definitum pondus habeat et quantitatem. Credibilius itaque est post ingentem aeris expansionem non amplius proportionem illam servari quam ostendit Experimentum Boilij. Verum, quia quousque se extendit experientia, successus semper egregiè respondisse inventus est haud aberraturos puto si eodem principio imposterum utamur ad illa quæ sequuntur supputanda. namque etsi forte pars centiesmillesima quantitatis aeris, quæ in suprema regione sita est, non secundum istam rationem extenditur, id nihil impedit quo minus in reliquo omni aere exacte satis observetur. Prædicta igitur hypothesi, veluti si per omnia certum sit Boilij experimentum, innixi, sequentia Problemata solvemus. Veluti si scire velim ad quantam altitudinem ascendendum sit ut tantum pars decima aeris, hoc est secundum quantitatem aut pondus, supra caput extet. quo nempe loco hydrargyrus in tubo Toricelliano tantum 3 pollices altus restabit. Problema 1.

Ac rursus si inquirendum sit, datâ loci altitudine supra terræ superficiem, quanta aeris portio, seu gravitas supra atque infra resideat, et ad quantam proinde altitudinem hydrargyrus in tubo suspensus manebit [2]). Itaque primò sit inveniendum,

---

[2]) Après avoir mentionné à son frère Lodewijk, dans une lettre du 17 août 1662, sa solution de ce dernier problème, Huygens communiqua le lendemain à Moray les règles pour la solution des deux problèmes; voir les pp. 198, 202 et 205—206 du T. IV.

Data aeris portione ſeu gravitate a loco aliquo ſurſum, invenire quanta ſit loci ejus altitudo.



[Fig. 2.]

Sit ſurſum pars decima aeris. Ergo ponatur LC [Fig. 2] ∞ $\frac{1}{10}$BC. Hinc ducta LG parallela aſymptoto CD, fiet et LN ſeu AB ∞ ∞ $\frac{1}{10}$LG [1]). Jam itaque data ratione GL ad AB inveniatur magnitudo ſpatij ABLG in partibus primò qualium quadr.^{m} hyperbolæ ſeu rectangulum ABCD 100000. idque per Regulam ſuperius deſcriptam [2]).

ſ. { 1,00000 log. 10
  { 0,00000 log. 1

1,00000 diff. log.

add. { 5,00000 log. diff. [3])
   { 0,36222 num. perpetuus ad dimetiendam hyperb. ſupra inventus.

5,36222 log. ſpatij ABLG 230260.

100000 [ad] 230260 [ut] 33000 pedes cuj. log. 4,51851 [ad alt. quæſ.]

5,00000

0,48149

ſ. { 5,36222 log. ſpatij ABLG
  { 0,48149 diff. log.^{orum} 100000 et 33000

4.88073 log. altitud.^{is} pedum quæſitæ quæ erit 75986

Sed quia patet ad logar. 5,00000 addendum fuiſſe num. perpetuum 36222, et rurſus à ſumma 5,36222 auferendum 0,48149 qui et ipſe hic ſemper eſt idem, poterit brevitatis gratia in hac regula eſſe numerus perpetuus 0,11927, quæ ſcilicet eſt differentia duorum 0,48149 et 0,36222. adeo ut hoc modo tantum operatio inſtituatur.

---

[1]) Puisqu'on a AB : LG = LC : BC; comparez le premier alinéa de la p. 485.

[2]) On trouve cette règle à la p. 476. Remarquons toutefois qu'elle fait connaître le rapport de l'aire cherchée (ici celle de l'espace ABLG) au rectangle (AC) sur l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de l'hyperbole. On a donc dans le cas présent: log spat. ABLG = log (log 10 — log 1) + log 100000 + num. perp. Consultez la note 2 de la p. 476.

[3]) C'est-à-dire après avoir ajouté log ABCD = log 100000 = 5; voir la note 1 de la p. 476.

ſ. { 1,00000 log. 10
  { 0,00000 log. 1

1,00000 diff. log.

ſ. { 5,00000 log. diff.æ log.orum 3)
  { 0,11927 num. perp.

4,88073 log. altitud.is pedum quæſitæ quæ erit 75986

Exempl. 2.

Sit ſurſum pars aeris quæ ſe habeat ad totius altitudinis pondus ut 36789 ad 100000. Ea pars putetur NLCD. Cum ſit ergo BC ad CL ut 100000 ad 36789, eadem erit et proportio GL ad AB.

ſ. { 5,00000 log. 100000
  { 4,56571 log. 36789

0,43429 diff. log.orum

ſ. { 4,63778 log. diff.æ log.orum 3)
  { 0,11927 num. perp.

4,51851 log. 33000, altitud. pedum quæſitæ

Quando igitur in ea ſumus altitudine, ubi finiret atmoſphæra ſi aer ubique compreſſus eſſet ut ille in quo hic vivimus; tunc adhuc paulo plus tertia parte aeris ſupra caput habemus. Sed quæ tertia pars ad immenſam porro altitudinem extendi queat. Hydrargyrus in tubo hic 11 pollices occupabit; quia ut 100000 ad 36789 ita 30 poll. ad 11.

Data loci altitudine ſupra terræ æquabilem ſuperficiem, invenire quanta ibi gravitas ſeu portio aeris deſuper incumbat, et ad quantam proinde altitudinem hydrargyrus in tubo Toricelliano conſiſtet.

Sit altitudo data pedum 1,00000. Regula itaque eſt contraria præcedentis.

ad. { 5,00000 log 100000 altitud. datæ.
   { 0,11927 num. perp.

5,11927 log. diff.æ logarithmorum

ſ. { 1,31600 diff.a log.orum 4)
  { ex 5,00000 log.° 100000 ſemper adhibendo

3,68400 log. 4831

4) C'est-à-dire le nombre qui correspond au logarithme qu'on obtient en retranchant du nombre précédent log ABCD = 5.

Proportio igitur aeris totius ad portionem desuper incumbentem est quæ 100000 ad 4831 hoc est fere 21 ad 1.

100000 [ad] 4831 [ut] 30 pollices [ad] $1\frac{45}{100}$ altitudo pollicum hydrargyri in tubo.

Sit data altitudo pedum 33000.

ad. { 4,51851 log. 33000
0,11927 num. perp.
4,63778 log. diff.æ log.
f. { 0,43429 diff.a log.
ex 5,00000 log. 100000
4,56571 log. 36789

aer ergo totus ad aerem superextantem ut 100000 ad 36789.

Sit data alt.° pedum 380010.

a. { 5,57970 log 380010
0,11927 num. perp.
5,69897 log. diff. log.orum
f. { 5,00000 diff.a log.
5,00000 log. 100000
0,00000 log. 1.

Hic ergo aer totus ad superextantem ut 100000 ad 1.

Sit data alt. pedum 100,00000.

ad. { 7,00000 log. 100,00000
0,11927 num. perp.
7,11927 log. diff. log.orum
131,61000 diff. log.
ex. 5,00000
− 126,61000 log. $\frac{1}{40739 \text{ cum } 122 \text{ zero}}$

Hic aer totus ad ſuperextantem ut 100000 ad $\frac{1}{40739\ 122\ zero}$ dixi 122 zero, nam quia characteriſtica logar.i eſt 126 debet eius numerus conſtare characteribus 127 quorum 5 primi ſunt 40739. Præſtaret autem in tantis altitudinibus uti logarithmis 10 characterum.

Sciendum eſt inventa altitudine loci ubi $\frac{1}{10}$ aeris adhuc ſupra eſt, velut in primo exemplo Problematis prioris [1]), facile etiam inveniri altitudines ubi ſuperextet $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ vel $\frac{1}{10000}$ atque ita porro. Altitudo enim pedum 75986 illic inventa, bis ſumpta conveniet proportioni $\frac{1}{100}$ ſive 100 ad 1, ter ſumpto vero conveniet proportioni $\frac{1}{1000}$ atque ita porro. Atque hoc in quavis proportionali progreſſione locum habet [2]).

Sit data pars aeris ſurſum dimidia totius.

0,30103 log. 2
0,00000 log. 1
0,30103 diff. log.orum
ſ. { 4,47860 log. diff. log.orum
0,11927 num perp. }
4,35933 log. 22873 altit. pedum quæſ.
22873
45746 altit. quæſ. ubi $\frac{1}{4}$ aeris ſuperne incumbit.
22873
68619 altit. quæſ. ubi $\frac{1}{8}$ aeris ſupra.
22873
91492 altit. quæſ. ubi $\frac{1}{16}$ aeris ſupra et ſic deinceps.

---

[1]) Voir les p. 486 et 487.

[2]) C'est là, en effet, une conséquence immédiate de la règle, puisque, p. e. dans le cas où le rapport est $\frac{1}{1000}$, on doit remplacer dans le calcul du premier exemple (p. 487) le premier et le troisième des six nombres par 3,00000 et le quatrième par 5 + log 3 (voir la note 3 de la p. 486), de sorte que le sixième nombre est augmenté de log 3 et que, par conséquent, la hauteur résultante est triplée.

Sit data alt.° pedum 100.

a. { 2,00000 log. 100
 0,11927 num. perp.

2,11927 log. diff.æ log.orum

f. { 132 [1]) diff.a log.orum
ex 5,00000 log. 100000

4,99868 log. 99697 [2])

30

29,90910

Ergo in turri pedum 100 altitudinis, descendet hydrargyrus in tubo Torricelij $\frac{1}{10}$ unc. pedis Londinensis.

[1]) 0,00132 est le nombre qui correspond au logarithme: 2,11927—5; comparez la note 4 de la p. 487.

[2]) La quantité d'air qui se trouve au-dessus de la tour est donc à la quantité totale comme 99697 à 100000, et la hauteur de la colonne de mercure du baromètre, qui est censé être de 30 pouces au pied de la tour, devient donc au sommet: $\frac{99697}{100000} \times 30$ pouces.

APPENDICE I[1]) À LA PIÈCE N°. IV.

[1668?]

De altitudine Atmosſphæræ et preſſu aeris.

Compertum eſt Boilianis experimentis, ſpatia ab eadem quantitate aeris occupata in eodem vel duobus æqualibus tubis contrariam rationem ſervare ponderum quibus premitur[2]). Torricelliano autem experimento conſtat aerem hunc infimum premi a ſuperiore pondere tanto quantum eſt altitudinis 30 unc. pedis Londinenſis argenti vivi. Proportio autem gravitatis argenti vivi ad aquam eſt $13\frac{4}{7}$ ad 1; aquæ vero ad aerem a me reperta quæ 960 ad 1 [3]). Ad aerem ſcilicet ſicut hic circa nos compreſſus eſt. Hinc altitudo 32640 pedum aeris ita compreſſi æquiponderaret uncijs 30 argenti vivi. Sumamus autem rotundum numerum 33000 pedum. Ex his igitur iſta invenimus.

Definire ad quantam altitudinem aſcendendum ſit ut aeris pars data ſupra caput extet.

Sit data pars aeris decima [4]).

---

[1]) Voir le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 483.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 484.

[3]) Comparez sur les données qui précèdent les notes 2, 3 et 4 de la p. 483.

[4]) Ce qui suit dans le Manuscrit ne diffère pas notablement du texte de la Pièce N°. IV à commencer par le calcul qu'on trouve en haut de la p. 486 jusqu'aux mots „quorum 5 primi sunt 40739" (p. 489), excepté seulement qu'on n'y retrouve pas l'exemple où l'altitude donnée est égale à 33000 pieds. Nous croyons donc pouvoir supprimer cette partie du texte. Puis après Huygens fait suivre encore un calcul analogue au dernier calcul qu'on trouve à la p. 490, mais où la tour est supposée avoir 150 pieds de haut; calcul que nous supprimons également, puisqu'il ne présente rien de particulier.

Quum pes Londinensis sit ad pedem Parisiensem ut 100 ad 109 [1]), altitudo autem hydrargyri maxima in tubo sit 30 unc. ped. Lond. eadem erit $27\frac{1}{2}$ [2]) unc. pedis Parisini.

Numerum perpetuum vero ad hunc calculum, si pedibus Parisiensibus uti velimus, invenio 15670 [3]).

Expertus est D. Perier [4]), in montibus Arvernorum, altitudinem hydrargyri in tubo circa radicem montis fuisse $\frac{26,35}{100}$ [5]) unc. pedis Paris.i. Postquam vero ascendissent pedes 3000 circiter (nam non satis accurate captam fuisse mensuram fatetur) altitudo hydrargyri fuit $\frac{23,20}{100}$ [6]) unc. Quæ ad examen revocanda sint.

Quum ad radicem montis fuerit altit. hydrargyri $\frac{26,35}{100}$ unc. quæ in imo aere debebat esse $\frac{27,50}{100}$ [7]) unc. patet hinc imam montis radicem aliquam habuisse altitudinem, quam primo invenimus. Fuit nempe pondus aeris supra verticem ad pondus aeris totius ut 26,35 ad 27,50. Quare operatio instituenda secundum regulam priorem, hoc modo.

f.	3,43933	log. 2750
	3,42078	log. 2635
	0,01855	diff. log.
f.	3,26834	log. diff.æ log.orum
	0,15670	num. perp. ad mensuram Paris.
	3,11164	log. 1308 [8]) pedes altitudinis ad radicem montis.

[1]) En 1668, le rapport des longueurs des pieds anglais et de Paris n'était connu que très imparfaitement. Ce ne fut qu'en 1675 que Huygens fut mieux renseigné sur ce point. Leur rapport est en effet de 100 à 106,5783; voir p. 462 du T. VII.

[2]) Plutôt 28 avec le nouveau rapport.

[3]) On trouve avec le rapport corrigé: 14694.

[4]) Voir aux p. 351—358 du T. II des „Œuvres de Blaise Pascal" (citées dans la note 4 de la p. 196 du Tome présent) la „Lettre de Monsieur Perier à Monsieur Pascal le jeune, du 22 septembre 1648", qui fut publiée dans le „Récit de la Grande Experience de l'Equilibre des Liqueurs" Paris, Charles Savreux, 1648, et jointe plus tard à l'ouvrage de 1663 cité dans la note 3 de la p. 252 de notre T. VII. Comparez la note 1 de la p. 365 du T. II des „Œuvres de Blaise Pascal".

[5]) Voir la p. 355 du T. II des „Œuvres"; mais lisez plutôt $26\frac{35}{120}$, puisqu'on y trouve pour la hauteur du mercure „26 poulces trois lignes et demie" et que chez Perier le pouce vaut 12 lignes, comme cela résulte des données mêmes communiquées dans sa lettre.

[6]) Lisez: $23\frac{20}{120}$.

In altitudinem ſecundum æſtimationem obſervatoris 3000 pedum, fuit portio aeris ſupra verticem ad aerem totum pondere, ſicut 23,20 ad 27,50. Ergo

ſ. | 3,43933 log. 27,50
| 3,36549 log. 23,20
0,07384 diff. log.
ſ. | 3,86829 log. diff.
| 0,15670 num. perpet.
3,71159 log. 5148 p. altitudo vera loci ſupra æquabilem terræ ſuperficiem. Sublatis autem 1308 [8]) pedibus ſupra inventis, qui altitudinem radicis montis deſignant ab his 5148 [9]) ſuperſunt 3840 pedes, quæ fuit altitudo à radice montis ad locum obſervationis, quam ille taxavit 3000 pedibus.

In altitudine pedum 162 (27 toiſes), ſtatio hydrargyri fuit eidem obſervatori eodem loco, $\frac{26,10}{100}$ unc. [10]).

| 3,43933 log. 27,50
| 3,41664 log. 26,10
0,02269 diff. log.
ſ. | 3,35583 log. diff.
| 0,15670 num. perpet.
3,19913 log. 1582 p. altitudo ab æquabili terræ ſuperficie
1308 [8]) altit. ad radicem montis
pedes 274 [11]), qui ipſi fuere 162, quae cum tanta ſit differentia, oportet vel altitudinem hydrargyri *non ſatis bene annotatam fuiſſe*, vel aliud quid in cauſa fuiſſe [12]). hydrargyrum ipſum non fuiſſe ab aere recte repur-

7) Lisez: $27\frac{50}{120}$.

8) Lisez: 1293.

9) Après application des corrections indiquées la règle donne 1949 pieds pour l'altitude au pied du Puy de Dôme et 5867 pour celle au sommet. En verité ce sommet a 1465 mètres d'altitude, c'est-à-dire 4510 pieds de Paris. Consultez encore la note 1 de la p. 494.

10) Lisez: $26\frac{10}{120}$.

11) La règle donne après correction 2196 — 1949 = 247.

12) Entre autres l'abaissement de la température de l'air avec l'augmentation de l'altitude. Il en résulte que la diminution de la pression de l'air, qui accompagne l'accroissement de l'altitude, est plus forte que la règle de Huygens ne le fait supposer. Par suite, la règle exagère les différences d'altitude.

gatum, unde in tubi parte vacua aeris non nihil resederet, dici non potest; quia si id fuerit minorem ex eo differentiam altitudinis hydrargyri fieri necesse fuit.

Vel alia debet esse proportio gravitatis aeris ad hydrarg. et aquam quam nostra illa 1 ad 960 [1]).

Numerus perpetuus in proxime praecedentibus invenitur auferendo 0,36222, numerum perpetuum ad dimensionem hyperbolæ superius inventum [2]), à differentia inter logarithmum 100000 et logar.m numeri pedum altitudinis columnæ aeris, æquiponderantis columnæ argenti vivi, quæ est in experimento Torricelli [3]).

[1]) En vérité ce rapport est à 10° C. environ de 1 à 801. Afin d'apporter cette correction, on doit donc diminuer les altitudes dans la raison de 960 à 801. On trouve alors 4895 pieds de Paris pour l'altitude du Puy de Dôme, calculée d'apres la formule corrigée.

[2]) Voir la p. 476.

[3]) Comparez les pp. 486 et 492.

APPENDICE II[1] À LA PIÈCE N°. IV.

1673.

[Première Partie][2].

Jun. 1673.

$$\frac{314}{330}[\infty]\frac{157}{165}$$

2,21748 l. 165[3])
2,19590 l. 157
0,02158 diff. log.^{orum}

---

[1]) L'Appendice fut écrit, en 1673, sur une partie, restée primitivement vide, de la p. 101 du Manuscrit B, laquelle page suit immédiatement celles dont nous avons emprunté la Pièce N°. IV. Il contient l'application de la théorie de Huygens, exposée dans cette Pièce, à une expérience de Cassini qui avait trouvé qu'à une altitude de 1070 pieds le baromètre avait baissé de 16 lignes. Posant $27\frac{1}{2}$ pouce = 330 lignes pour la hauteur du baromètre au niveau de la mer, on en déduit que la densité de l'air avait diminué dans la raison de 330 à 314.

Ajoutons qu'on trouve à la p. 38 du Manuscrit F des renseignements sur l'expérience de Cassini. D'après la date où ce Manuscrit fut mis en usage, il est presque certain que ces renseignements plus précis ne furent reçus par Huygens que vers 1680:

de M. Cassini, Nostredame de la garde montagne a Toulon a de hauteur 1070 pieds. au haut le mercure du barometre avait 27 pouces $\frac{1}{3}$ de ligne. au bas 28 po. $4\frac{2}{3}$ de ligne. la difference est donc 1 p. $4\frac{1}{3}$ de ligne. la pente de la montagne 41 degr. l'horizon sous le niveau 32′30″.

[2]) Dans cette première partie Huygens commence par calculer, en appliquant sa théorie, la hauteur fictive de l'atmosphère si la densité était partout égale à celle au niveau de la mer, telle qu'elle résulte de l'expérience de Cassini; ensuite il en déduit quel rapport de la densité de l'air à celle de l'eau correspondrait à cette hauteur.

[3]) Comparez, pour le calcul qui suit l'algorithme de la p. 486.

3,33405 log. diff.
0,36222 log. perpet.
3,69627 log spatij.
0,66689 [1]) diff. log. inter 100000 et 21565 [2]) ped.
3,02938 l. 1070 ped. parisini.

3,02938 l. 1070 pedum quæ altitudo æris fecit Caffino 16 linearum diff.^m in hydrarg.
3,69627
0,66689 log. pedum altitudinis aeris æqualiter preffi ut hic prope terram, quæ altitudo æquiponderat $27\frac{1}{2}$ poll. hydrarg.
5,00000
4,33311 l. 21565 [2]) pedes [3]).

0,36222
0,66689
0,30467 log. perpetuus ad altitudinem atmofphæræ [4]).

$27,3\frac{1}{2}$ [5]) l. [6])
14
108
27
42
7
427

21565
12
43130
21565
258780 [7])

606 ad 1 [8]) proportio gravitatis aquæ ad aerem pofita proportione hydrargyri ad aquam quæ 14 ad 1. Et pofito item Caffini experimento ubi 1070 pedes altitudinis dabant differentiam altitudinis hydrargyri in tubo Torricelliano linearum 16.

---

[1]) Voir le calcul à côté. D'après l'algorithme mentionné dans la note précédente on doit soustraire du „log spatij" la différence entre les logarithmes de 100000 et du nombre qui indique la hauteur de l'atmosphère fictive d'égale densité, afin de trouver le logarithme de l'altitude du lieu en question. Or, pour faire concorder l'expérience de Cassini et la théorie de Huygens, il faut que le résultat soit égal au logarithme de 1070. Ce résultat peut donc servir maintenant à calculer la hauteur de l'atmosphère fictive exprimée en pieds de Paris.

[2]) Lisez: 21533.

[3]) Comme l'on voit ce nombre diffère beaucoup de celui: $\frac{100}{109} \times 33000 = 30275$ qui résulte des suppositions faites dans la partie de l'Appendice I qu'on trouve aux p. 492—494.

[4]) Comparez le „num. perp. ad mensuram Paris." de la p. 492.

[5]) Partant de la hauteur de la colonne barométrique au niveau de la mer, Huygens calcule ici la hauteur, en pouces de Paris, d'une colonne d'eau de pesanteur égale. Nous ne savons pas d'ailleurs pourquoi Huygens a remplacé les $27^1/_2$ pouces, mentionnés plus haut, par 27,35 pouces.

[6]) Le nombre $3\frac{1}{2}$ indique évidemment le nombre des lignes, supposées égales chacune à la dixième partie d'un pouce; comparez la note 5 de la p. 492.

[DEUXIÈME PARTIE] [9]).

28 toifes altitudo data.
6

2,22531 [10]) l. 168 pedes
0,30467 log. perpet.

2,52998 log. diff.æ logg.
0,00339 diff. log.
5,00000

4,99661 l. 99220
100000

100000 [ad] 99220 [ut] 330 lineæ [11]) [ad] $327\frac{57}{100}$ lin.

---

7) Hauteur de l'atmosphère fictive en pouces de Paris.

8) Ce rapport est trouvé en divisant 258780 par 427. Consultez sur sa véritable valeur la note 1 de la p. 494. En effet la théorie de Huygens devait amener une densité trop grande de l'air.

9) Dans cette Partie Huygens calcule, d'après les données obtenues dans la Partie précédente, l'abaissement du baromètre à une altitude de 28 toises. Peut-être se proposait-t-il de faire vérifier ce résultat expérimentalement.

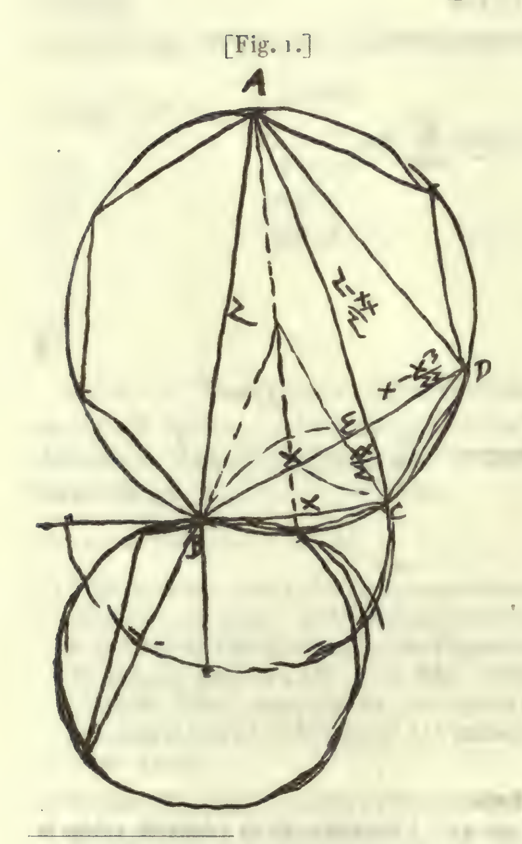
10) Comparez cet algorithme à celui au bas de la p. 487.

11) En pouces: $27\frac{1}{2}$; hauteur supposée du baromètre au niveau de la mer.

V.

[1662] [1]).

[Fig. 1.]



heptagonum circulo inſcribere.

$$[AB]z\ [ad\ BC]x\ [ut\ AE]\ z-\frac{xx}{z}$$

$$[ad\ ED]\ x-\frac{x^3}{z}\ ^{2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\ \ BE \infty BC \\ x-\dfrac{x^3}{zz}\ ED \end{array}\right\}\ a[dde]$$

$$BD\ 2x-\frac{x^3}{zz}\infty z-\frac{xx}{z}AD\infty AE$$

$$2zzx-x^3\infty z^3-zxx$$

$$0\infty z^3-2zzx-zxx+x^3$$

$$\text{ſit } x\infty 1;\ 0\infty z^3-2zz-z+1\ ^{3)}$$

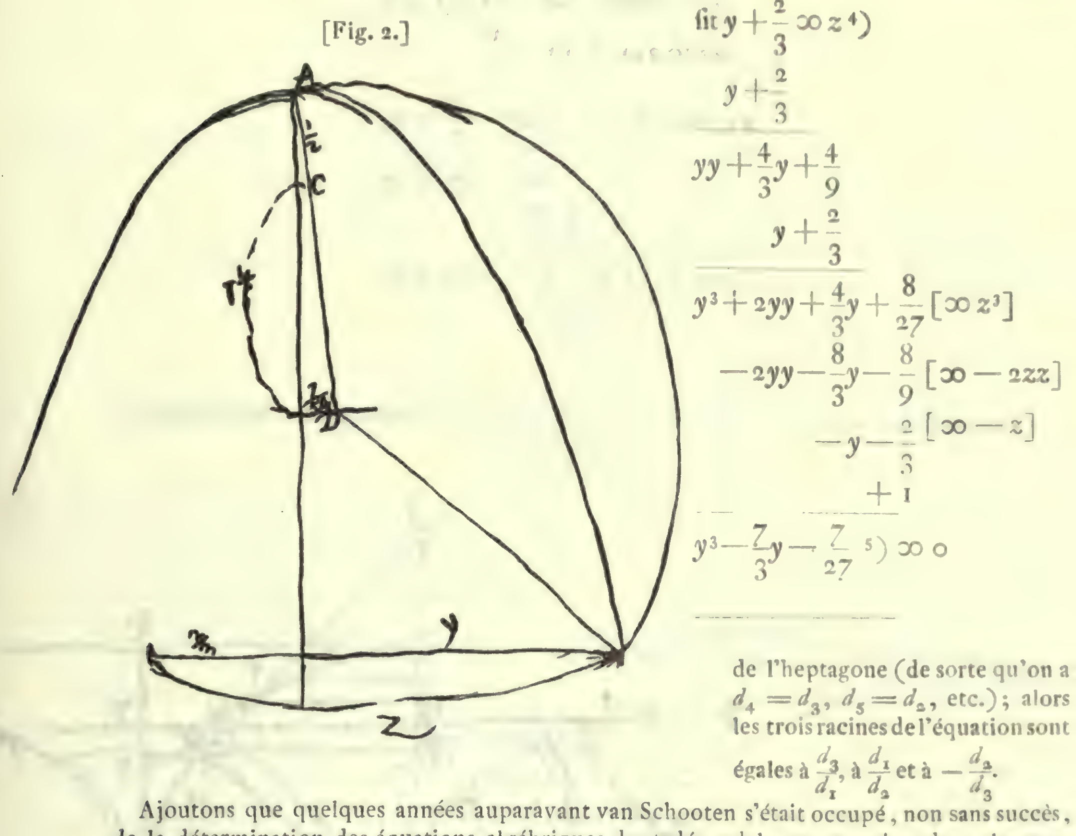
---

[1]) À cause du lieu occupé par la Pièce, p. 112 du Manuscrit B.

[2]) La proportion s'ensuit de la similitude des triangles isocèles ABC et AED; on a $AE = z-\frac{x^2}{z}$, puisque $EC = \frac{x^2}{z}$ à cause des triangles semblables BEC et ABC.

[3]) La construction de l'heptagone régulier est donc réduite à la solution d'une équation cubique, dont il faut choisir la racine positive plus grande que l'unité. Pour indiquer la signification des autres racines, soit d la longueur de la diagonale qui sous-tend p côtés

[Fig. 2.]



fit $y+\frac{2}{3} \infty z$ [4])

$$
\begin{array}{l}
y+\frac{2}{3} \\
\hline
yy+\frac{4}{3}y+\frac{4}{9} \\
y+\frac{2}{3} \\
\hline
y^3+2yy+\frac{4}{3}y+\frac{8}{27}\,[\infty z^3] \\
-2yy-\frac{8}{3}y-\frac{8}{9}\,[\infty -2zz] \\
-y-\frac{2}{3}\,[\infty -z] \\
+1 \\
\hline
y^3-\frac{7}{3}y-\frac{7}{27}\ \text{[5])}\ \infty\ 0
\end{array}
$$

de l'heptagone (de sorte qu'on a $d_4=d_3$, $d_5=d_2$, etc.); alors les trois racines de l'équation sont égales à $\frac{d_3}{d_1}$, à $\frac{d_1}{d_2}$ et à $-\frac{d_2}{d_3}$.

Ajoutons que quelques années auparavant van Schooten s'était occupé, non sans succès, de la détermination des équations algébriques dont dépend la construction des polygones réguliers. Il appliqua à cette détermination plusieurs méthodes qui, toutefois, pour l'heptagone et pour les cas plus compliqués, amènent des équations d'un trop haut degré, qu'il réussit à simplifier en écartant les facteurs inutiles. Ainsi dans le cas de l'heptagone il trouve, comme de juste, $x^6-7x^4+14x^2-7=0$ et dans celui du tétradécagone $x^3-x^2-2x+1=0$, où x représente chaque fois le rapport du côté au rayon du cercle circonscrit (voir les p. 464—475 de l'ouvrage de 1657 de van Schooten dont nous avons reproduit le titre général et celui du „Liber V" aux pp. 50 et 52 du Tome présent, ou bien les p. 433—443 de l'édition hollandaise sur laquelle on peut consulter les pp. 51 et 53 du même Tome).

D'ailleurs, puisque l'angle BAC de la Fig. 1 est égal à l'angle central que sous-tend le côté du tétradécagone, il est clair que le rapport AB : BC, cherché par Huygens, est le réciproque du rapport du côté du tétradécagone au rayon du cercle circonscrit.

On sait que ce fut Gauss qui, le premier, apprit à indiquer d'avance le degré des équations dont dépend la construction d'un polygone régulier d'un nombre donné de côtés; voir la „Sectio septima: De aequationibus circuli sectiones definientibus" de ses „Disquisitiones arithmeticæ" de 1801 (p. 412—474 du T. I, 1863, de ses œuvres complètes: „Carl Friedrich Gauss Werke. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen").

[4]) Réduction de l'équation à une équation sans second terme.

[5]) Après avoir trouvé l'équation réduite, Huygens applique dans la Fig. 2 les règles données par

$$z^3 - 2zzx - zx^2 + x^3 \text{ [1]) } \infty\ 0$$

$$zz \infty 2zx + xx - \frac{x^3}{z}$$

$$xy \infty zz \infty 2zx + xx - \frac{x^3}{z} \infty xy$$

$$\overline{2zz + zx - xx \infty zy}$$

$$xx - zz \infty yy; \quad \frac{x^3}{z} - 2zx \infty yy$$

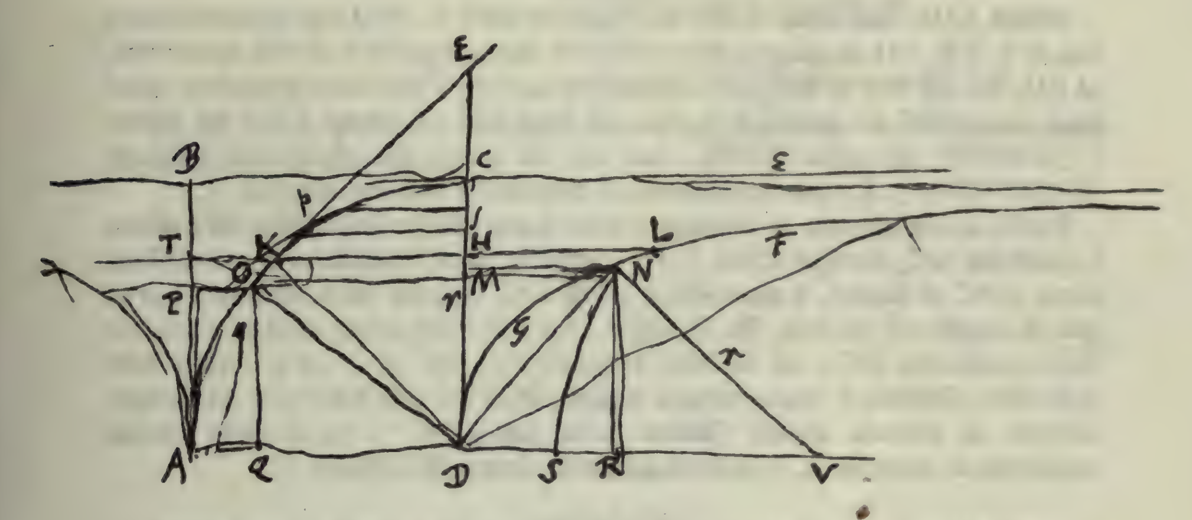
Descartes dans sa „Géométrie" (voir les p. 470—473 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour la construction des racines d'une équation cubique par les intersections d'une parabole et d'un cercle passant par son sommet.

[1]) Nous n'avons pas voulu supprimer les petits calculs qui suivent. Huygens y cherche à réduire la résolution de l'équation cubique, trouvée plus haut, à la détermination des intersections d'autres courbes, qu'on obtient en supposant connues dans les équations qui suivent, x, y ou z. Ajoutons encore que la construction au bas de la Fig. 1 nous est incompréhensible.

VI [1].

1662.

[*Quadrature de la courbe de Gutschoven et cubature d'un de ses solides de révolution.*]



DGN curva a Slusio mihi proposita[2]) ad inveniendam tangentem[3]), illi vero a Gutiscovio. proprietas ejus, ut angulo DNV recto existente sit NV semper æqualis eidem lineæ DC.

Sive posita DR ∞ x. RN ∞ y, ut sit $\frac{y^4}{dd-yy}$ ∞ xx[4]). DC est perpendic. axi DV. DCOA quadrans circuli. CE[5]) parall. DV, asymptotos curvæ DGN.

---

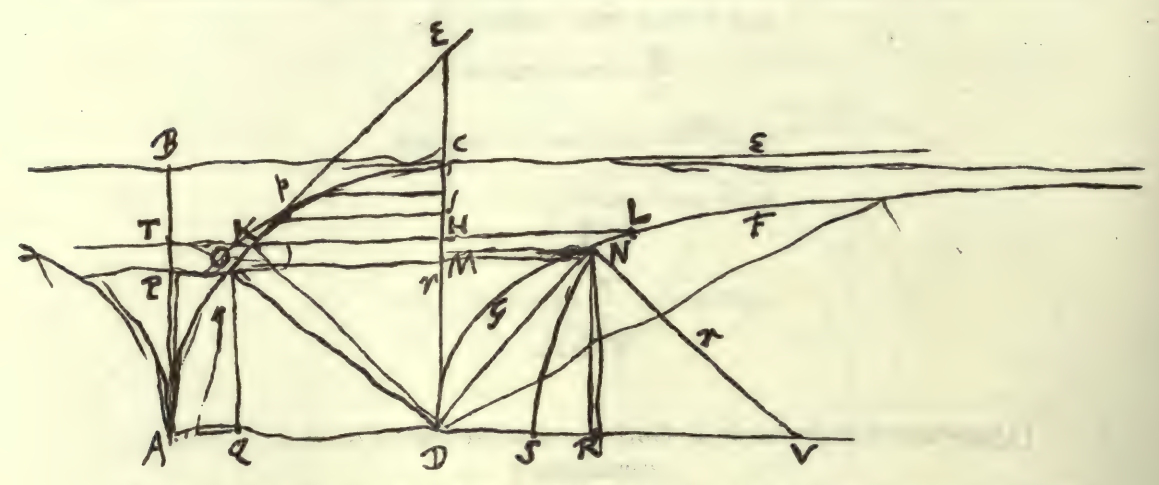
[1]) La Pièce est empruntée aux p. 125—126 du Manuscrit B.

[2]) Voir sa lettre du 18 août 1662, p. 207 du T. IV.

[3]) Voir sur la détermination de cette tangente le § 1 (p. 504—505) de la Pièce N°. VII qui suit.

[4]) On a en effet: DN² (x^2+y^2) : DR² (x^2) = NV² (d^2) : NR² (y^2), où d = NV = DC.

[5]) Remarquez le double emploi de la lettre E dans la figure.



NMO, LHK sunt rectæ. sit NO ∞ DV; et MO ∞ RV. Sicut ergo proportionales sunt RV, VN, VD ita quoque MO, OD, ON. Sicut ergo MO ad OD, hoc est ME ad EO, hoc est MH ad KO, ita OD sive MP ad ON. Unde facile ostenditur quod sicut omnes MH ad omnes KO, hoc est sicut DC ad arcum COA ita omnia ▭la MHTP ad omnia KONL, hoc est, ita quadr. AC ad figuram infinitam AOCEFNDA [1]). Ex quo fundamento est calculus in fine pag. præced. [2]).

Facile autem apparet et solidum a dicto spatio infinito sese habere ad solidum à quadrato AC, utroque circa ADV converso, sicut superficies a conversione arcus AOC ad superf. à conversione rectæ DC. quorum ratio est dupla per ea quæ demonstravit Archim. lib. de sphær. et cyl. [3]). Est autem solidum a conversione quadrantis DCA ad solidum a quadr[ato] AC ut 2 ad 3. Itaque hinc deducitur, solidum à spatio reliquo infinito DGFEC esse solidi a □ AC sesquitertium, ac proinde æquale sphæræ cujus radius DC [4]). Ita fit calix infinitæ capacitatis et extensionis, at definiti ponderis, sicut et in Cissoide [5]).

---

[1]) On a MH : KO = MP × MH : ON × MH. Or, dans le cas présent la conclusion ΣMH : ΣKO = = ΣMP × MH : ΣON × MH est permise, comme on peut le vérifier aisément, puisque le rapport du premier au troisième terme de la proportion en question est une quantité constante.

[2]) Voir les calculs qui suivent.

[3]) Voir la „Prop. XXXI, Lib. I", p. 31 de l'édition de Bâle (mentionnée dans la note 3, p. 274 du T. XI) „Cuiuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur". Elle correspond à la Prop. XXXIII, p. 137 du T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI.

[4]) Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 25 septembre 1662; voir les p. 237—239 du T. IV.

[5]) Comparez la note 17 de la p. 199 du Tome présent.

q ∞ arc. AOC; r ∞ DC.

□ ABCD [ad] ſpat. ACEFDA [ut] r [ad] q

r [ad] q [ut] rr [ad] ſ. { rq ∞ ſpat. ACEFDA
$\frac{1}{2}rq$ ∞ quadrans ACD }

$\frac{1}{2}rq$ ∞ ſpat. infin. DCEF

Ergo quadrans circuli DAC æqualis ſpatio infinito DCEF.

---

arc. OC p, CM ∞ s.

s [ad] p [ut] ▭MB (rs) [ad] ſ. { pr ſpat. OCEFNO
$\frac{1}{2}pr$ — △OMD ∞ OCM }

$\frac{1}{2}pr$ + △OMD ∞ ſpat. CEFNM.

hoc eſt ſector DOC + △ODQ ∞ ſpat. CEFNM. Ergo ſp. NGDM æquale ſegmento OQA ſive NRS [4]).

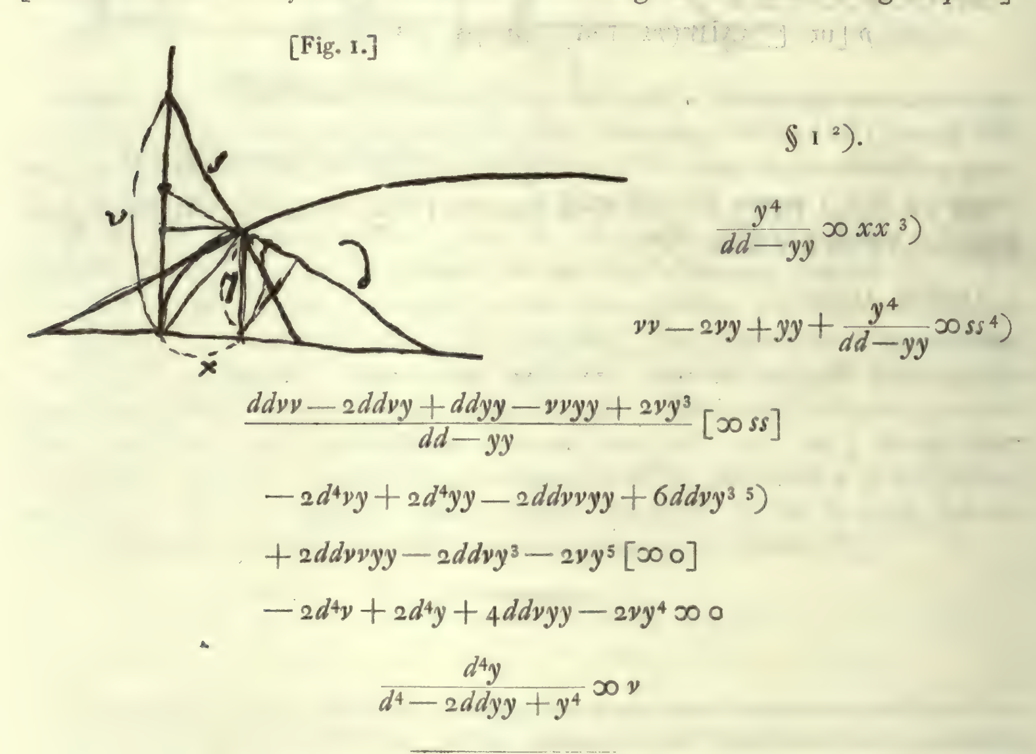
15 Sept. 1662.

VII [1]).

[1662.]

[*Recherches de* 1662 *sur la détermination des tangentes des courbes algébriques.*]

[Fig. 1.]



§ 1 [2]).

$$\frac{y^4}{dd-yy} \infty xx \ ^{3})$$

$$vv - 2vy + yy + \frac{y^4}{dd-yy} \infty ss \ ^{4})$$

$$\frac{ddvv - 2ddvy + ddyy - vvyy + 2vy^3}{dd-yy} [\infty ss]$$

$$-2d^4vy + 2d^4yy - 2ddvvyy + 6ddvy^3 \ ^{5})$$

$$+2ddvvyy - 2ddvy^3 - 2vy^5 [\infty 0]$$

$$-2d^4v + 2d^4y + 4ddvyy - 2vy^4 \infty 0$$

$$\frac{d^4y}{d^4 - 2ddyy + y^4} \infty v$$

---

[1]) La Pièce est empruntée aux pp. 125—139 du Manuscrit B; nous l'avons divisée en paragraphes. D'après le lieu qu'elle occupe au Manuscrit B, elle doit dater de 1662. Consultez encore la note 8.

[2]) Ce paragraphe contient la détermination de la tangente à la courbe de Gutschoven de deux manières différentes.

[3]) Équation de la courbe de Gutschoven; comparez le deuxième alinéa de la Pièce N°. VI. p. 501.

$yy - 2yp + pp$ [Fig. 2] [ad] $\frac{y^4}{dd - yy}$ [ut] dd [6]) [ad]

$$\frac{ddy^4}{ddyy - 2ddpy + ddpp - y^4 + 2py^3 - ppyy} \infty ss$$ [7])

[Fig. 2.]

$$0 \infty + 2ddyy - 6ddpy + 4ddpp + 2py^3 - 2ppyy$$

per $y - p$

$$0 \infty 2pyy - 4ddp + 2ddy$$

$$p \infty \frac{ddy}{2dd - yy}$$ [8])

---

[4]) s représente donc la longueur d'un segment de la normale depuis le point sur la courbe jusqu'à l'intersection avec l'axe des y. Or, si l'on fixe ce point d'intersection, dont la distance à l'origine est désignée par v et qu'on déplace l'autre extrémité du segment le long de la courbe, il faut que la longueur du segment soit stationnaire (c'est-à-dire en général maximum ou minimum) lorsque le segment reprend sa position primitive. Il s'agit donc dès ici de trouver la valeur de y qui rend maximum ou minimum l'expression pour ss. À cet effet Huygens emploie la méthode de Hudde, exposée dans son „Epistola secvnda de Maximis et Minimis" (voir la note 5 de la p. 360 du T. II), pour déterminer le maximum ou minimum d'une fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\Sigma A_p x^p}{\Sigma B_q x_q}$ par la résolution de l'équation $\Sigma\Sigma(p-q) A_p B_q x^{p+q} = 0$; équation qu'on déduit facilement de la relation (en notation moderne) $x\varphi'(x)\psi(x) - x\varphi(x)\psi'(x) = 0$.

[5]) Cette première ligne contient les termes pour lesquels $q = 0$, celle qui suit ceux qui correspondent à $q = 2$; voir la note précédente.

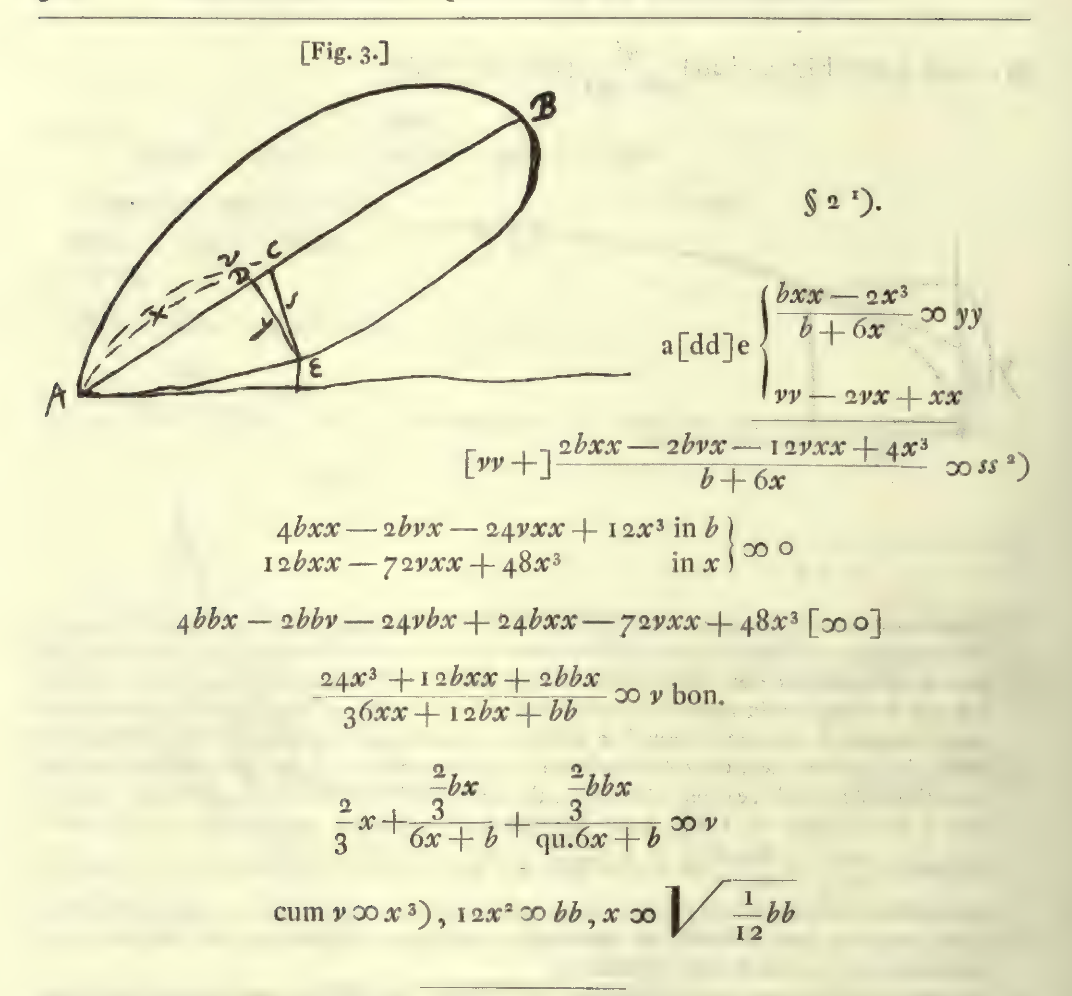
[6]) Au lieu de dd Huygens aurait pu choisir (voir la note 7 qui suit) le carré de toute autre ligne de longueur constante; il ne choisit d que parce qu'elle représente la seule ligne de cette nature qui entre dans l'équation de la courbe de Gutschoven.

[7]) s est donc proportionnel au quotient $\frac{x}{y-p}$. Or, il est évident que lorsqu'on déplace, le long de la courbe, le point où elle est touchée par la tangente, sans changer la longueur p, ce quotient sera stationnaire et dans le cas présent un minimum. Par suite, on peut appliquer la méthode de Hudde à l'expression pour ss. Divisant en même temps par ddy^4, Huygens obtient de cette manière l'équation qui suit, dont il écarte ensuite le facteur $y - p$.

[8]) C'est probablement à propos des deux méthodes de ce paragraphe que Huygens écrivit à de Sluse dans la lettre du 25 septembre 1662, mentionnée dans la note 4 de la p. 502: „Nam illius quidem curvæ Gutschovianæ quam proponis tangentem nullo negotio investigavi varijs modis calculoque brevissimo, qui vix duos hujusmodi versiculos occupet".

Ajoutons que, auparavant, Huygens avait essayé, p. 113 du Manuscrit B, une méthode analogue à la deuxième avec cette différence que pour la quantité qui doit être minimum il choisit la longueur du segment z situé sur l'axe des x entre l'origine des coordonnées et le

[Fig. 3.]



§ 2 [1]).

$$\text{a[dd]e}\begin{cases}\dfrac{bxx-2x^3}{b+6x}\infty\, yy\\[2ex] vv-2vx+xx\end{cases}$$

$$[vv+]\,\frac{2bxx-2bvx-12vxx+4x^3}{b+6x}\;\infty\, ss\ ^{2)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}4bxx-2bvx-24vxx+12x^3 & \text{in } b\\ 12bxx-72vxx+48x^3 & \text{in } x\end{array}\right\}\infty\, 0$$

$$4bbx-2bbv-24vbx+24bxx-72vxx+48x^3\ [\infty\, 0]$$

$$\frac{24x^3+12bxx+2bbx}{36xx+12bx+bb}\infty\, v \text{ bon.}$$

$$\frac{2}{3}x+\frac{\frac{2}{3}bx}{6x+b}+\frac{\frac{2}{3}bbx}{\text{qu.}6x+b}\infty\, v$$

$$\text{cum } v\infty\, x\ ^{3)},\ 12x^2\infty\, bb,\ x\infty\sqrt{\frac{1}{12}bb}$$

---

point d'intersection avec la tangente. Employant au reste les notations de la Fig. 2 (différentes de celles de la page citée du Manuscrit), on a donc

$$z:p=z+\frac{yy}{\sqrt{dd-yy}}:y,$$

d'où Huygens déduit:

$$zz=\frac{ppy^4}{ddyy-2pydd+ppdd-y^4+2py^3-p^2y^2}.$$

À cette fraction il applique ensuite la méthode de Hudde; ce qui donne l'équation quadratique en p:

[Fig. 4.]

$$zz + 2zx + xx \text{ [ad] } \frac{bxx - 2x^3}{b + 6x} \text{ [ut] } bb \text{ [ad] } \frac{b^3xx - 2bbx^3}{bzz + 2bzx + bxx + 6zzx + 12zxx + 6x^3} \infty ss \;^{4)}$$

$$\frac{\begin{matrix} 2bbzz + 2bbzx + 6bzzx - 6bx^3 \\ -6bzzx - 8bzxx - 2bx^3 - 24zzxx - 24zx^3 \end{matrix} \infty 0 \;^{5)}}{bbzz + bbzx - 4bx^3 - 4bzxx - 12zzxx - 12zx^3 \infty 0 \text{ per } x + z}$$

$$0 \infty bbz - 4bxx - 12zxx \infty 0$$

$$z \infty \frac{4bxx}{bb - 12xx} \text{ bon. } z \infty \frac{bxx}{\frac{1}{4}bb - 3xx}$$

$$ddyy - 3pddy + 2ppdd + py^3 - ppyy = 0.$$

Après avoir obtenu cette équation Huygens ne continue pas le calcul. Il semble ne pas avoir aperçu que l'équation est divisible par $y - p$. Or, après l'écartement de ce facteur on arrive à la valeur de p indiquée dans le texte.

1) Ce paragraphe contient la détermination de la tangente au folium de Descartes de trois manières différentes. En effet, l'équation $\frac{bx^2 - 2x^3}{b + 6x} = y^2$, qui suit, correspond à l'équation $x^3 + y^3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, bxy = 0$, pour laquelle les tangentes au point A sont les axes des coordonnées. Or, dans cette dernière équation on reconnaît celle du folium de Descartes. Ainsi dans sa lettre à de Sluse, déjà citée dans les notes 4 de la p. 502 et 8 de la p. 505 Huygens pouvait écrire à propos du folium: „Hujus tangentem in dato puncto ego quidem non nisi mediocriter prolixo calculo inveni (ex hac nempe æquatione, nam potest alioqui ad aliam multo commodiorem res deduci)". Ajoutons que le „calcul prolixe" était probablement celui du § 3, ou du § 4.

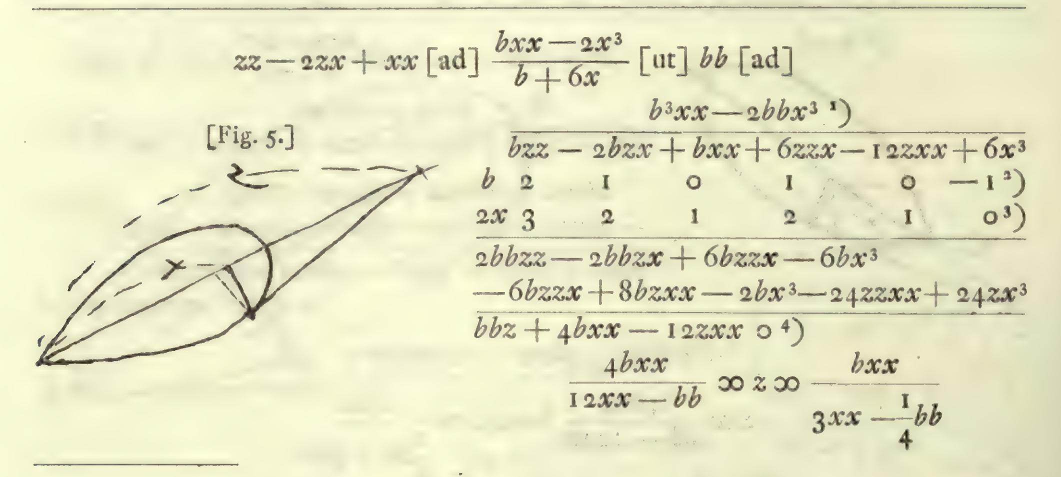
2) Cette première méthode est identique à la première du § 1, p. 504. Huygens va donc appliquer l'algorithme de Hudde (voir la note 4 de la p. 505) pour trouver le minimum ou maximum de ss. Dans ce calcul il n'a pas besoin de s'occuper du terme vv, puisque v est considéré comme une constante.

3) Détermination du lieu de largeur maximum de la boucle. Comparez les p. 301 et 302 du Tome présent.

4) s est donc proportionnel à $\frac{y}{x + z}$; sa valeur doit donc être un maximum lorsqu'on déplace le point de contact le long de la courbe en fixant la valeur de z.

5) Application de l'algorithme de Hudde accompagné de la division de tous les termes par b^2x^2. La première ligne correspond au premier terme du dénominateur, l'autre au deuxième terme.

$$zz - 2zx + xx \,[\text{ad}]\, \frac{bxx - 2x^3}{b + 6x} \,[\text{ut}]\, bb \,[\text{ad}]$$


[Fig. 5.]

$$\frac{b^3xx - 2bbx^3 \;^{1)}}{bzz - 2bzx + bxx + 6zzx - 12zxx + 6x^3}$$

b	2	1	0	1	0	-1 [2])
$2x$	3	2	1	2	1	0 [3])

$$2bbzz - 2bbzx + 6bzzx - 6bx^3$$
$$-6bzzx + 8bzxx - 2bx^3 - 24zzxx + 24zx^3$$
$$bbz + 4bxx - 12zxx \;0 \;^{4)}$$
$$\frac{4bxx}{12xx - bb} \infty z \infty \frac{bxx}{3xx - \frac{1}{4}bb}$$

---

[1]) Fraction qu'il s'agit de rendre maximum à l'aide de l'algorithme de Hudde.

[2]) Cette ligne donne les coefficients $p-q$ (voir la note 4 de la p. 505) par lesquels on doit multiplier tous les termes qui correspondent au premier terme du numérateur. D'ailleurs, puisque Huygens se propose de diviser tous les termes par $bbxx$ on doit multiplier ceux du dénominateur par $(p-q)b$ et non par $(p-q)b^3xx$ comme l'algorithme de Hudde l'exige.

[3]) On doit pour la même raison multiplier les termes correspondant à $-2bbx^3$ par $-2(p-q)x$; c'est pourquoi Huygens change les signes des termes du dénominateur en même temps qu'il les multiplie par $2(p-q)x$.

[4]) Cette équation est obtenue après division de l'expression qui précède par $2(z-x)$.

[5]) Ce paragraphe et le suivant nous montrent qu'avant de trouver, dans le cas d'une courbe algébrique quelconque, la règle exposée dans la lettre à de Witt du 25 février 1663 (voir les p. 312—317 du T. IV), Huygens s'est occupé d'autres méthodes très curieuses pour déterminer les tangentes d'une telle courbe. Afin de faire connaître la portée de ces methodes, nous croyons utile de les appliquer au cas général d'une courbe algébrique $f_\mu(x,y) = \Sigma_\alpha A_\beta x^\alpha y^\beta = 0$ du degré μ. Commençons donc par la méthode utilisée dans le présent paragraphe et remarquons d'abord que la forme du triangle ECD (Fig. 6) est définie par les rapports entre ses côtés, en posant $v:c = y:n = q:b$, où l'une des trois grandeurs c, n, b peut être choisie égale à une constante arbitraire, p. e. à la constante n de l'équation de la courbe. On a alors $x = z + \frac{bv}{c}$; $y = \frac{nv}{c}$; où $z = AE$.

Or, la substitution de ces expressions pour x et y dans l'équation de la courbe, donne:

$$(1) \qquad f_\mu\left(z + \frac{bv}{c}, \frac{nv}{c}\right) = \varphi_\mu(z, v) = \Sigma_\gamma B_\delta z^\gamma v^\delta = 0.$$

Si maintenant nous supposons un instant que les valeurs de z, c, n et b soient données et invariables, et que v soit l'inconnue de l'équation (1), les solutions de cette équation correspondront aux points d'intersection de la droite EC avec la courbe $f_\mu(x,y) = 0$; mais puisqu'il faut qu'au point C correspondent deux racines égales de l'équation en v, on aura:

$$(2) \qquad \Sigma \delta_\gamma B_\delta z^\gamma v^\delta = 0.$$

Cela explique le premier algorithme, représenté dans le texte par les nombres 0, 1, 2, 3, 3, 1, 2, qui amènent l'équation $0 \infty 3bzzvcc - nnzccv +$ etc.

Pour expliquer le deuxième algorithme, représenté par les nombres 3, 2, 1, 0, 0, 2, 1,

[Fig. 6.]

§ 3 [5]).

$$x^3 + y^3 - xyn \infty 0 \;{}^{6})$$

$$n\,[\text{ad}]\; b\,[\text{ut}]\; y\,[\text{ad}]\; \frac{by}{n}\ \text{DE}\ [\infty\ q]$$

$$n\,[\text{ad}]\; c\,[\text{ut}]\; y\,[\text{ad}]\; \frac{cy}{n}\ \text{CE} \infty v;\ y \infty \frac{nv}{c}$$

$$x - \frac{by}{n} \infty z\ \text{AE};\ x \infty z + \frac{by}{n} \infty z + \frac{bv}{c}$$

$$0 \infty z^3 + \frac{3bzzv}{c} + \frac{3bbzvv}{cc} + \frac{b^3v^3}{c^3} + \frac{n^3v^3}{c^3} - \frac{nnzv}{c} - \frac{bnnvv}{cc} \;{}^{7})$$

0	1	2	3	3	1	2
3	2	1	0	0	2	1

0 [8])

$$0 \infty 3bzzvcc - nnzccv + 6bbczvv - 2bnncvv + 3b^3v^3 + 3n^3v^3 \;{}^{9})$$

$$0 \infty (3n^3 + 3b^3)vv + (6bbcz - 2bnnc)v + 3bzzcc - nnzcc \text{ in } z$$

$$0 \infty 3z^3 + \frac{6bzzv}{c} + \frac{3bbzvv}{cc} - \frac{2nnzv}{c} - \frac{bnnvv}{cc} \;{}^{10})$$

$$0 \infty (+3bbz - bnn)vv + (6bzzc - 2nnzc)v + 3ccz^3 \text{ in } b$$

$$-bbnnvv \infty 3n^3zvv - nnzzcc \;{}^{11});\ \text{restitue } cc \infty \frac{nnvv}{yy}$$

$$-bbvv \infty 3 \qquad \frac{nnvvzz}{yy}$$

---

il suffit de remarquer que des équations (1) et (2) on déduit facilement:

(3) $\Sigma(\mu - \delta)_\gamma B_\delta z^\gamma v^\delta = 0.$

C'est cet algorithme qui conduit dans le texte à l'équation $0 \infty 3z^3 + \frac{6bzzv}{c} +$ etc.

[6]) Équation du folium de Descartes; comparez la p. 301.

[7]) C'est l'équation qui correspond à l'équation (1) de la note 5.

[8]) La signification de ce zéro nous échappe.

[9]) C'est l'équation qui correspond à l'équation (2) de la note 5; mais elle a été multipliée par c^3.

[10]) C'est l'équation qui correspond à l'équation (3) de la note 5.

[11]) On obtient cette équation en posant le deuxième membre de l'équation précédente, multiplié

[Fig. 6.]

$-bbyy \infty 3nzyy - nnzz$ restitue $z \infty x - \frac{by}{n}$

$-bbyy \infty 3nxyy - 3by^3 - nnxx + 2bnxy - bbyy$

$\frac{3nxyy - nnxx}{3y^3 - 2nxy} \infty b \infty \frac{nq}{y}$; $\frac{3xyy - nxx}{3yy - 2nx} \infty q$

ducantur in y; $\frac{3xy^3 - nyxx}{3y^3 - 2nxy} \infty q$

sed erat $y^3 \infty - x^3 + nxy$; $\frac{3xy^3 - nyxx}{nxy - 3x^3} \infty q$

div. per x; $\frac{3y^3 - nyx}{ny - 3xx}$ [1]) $\infty q \infty$ DE.

---

par b, égal au deuxième membre de l'équation qu'on trouve trois lignes plus haut, multiplié par z. Elle correspond donc à l'équation plus générale :

$$\frac{c^3 z}{v}\Sigma\,\delta_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta} = c^2 b\,\Sigma\,(\mu-\delta)_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta};$$

qu'on peut écrire, à cause des proportions $v:c = y:n = q:b$, dans la forme :

$$z\Sigma\,\delta_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta} = q\Sigma\,(\mu-\delta)_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta},$$

ou bien :

$$(z+q)\,\Sigma\,\delta_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta} - q\mu\Sigma_{\gamma}B_{\delta}\,z^{\gamma}v^{\delta} = 0,$$

ou encore :

$$xv\frac{d\varphi(z,v)}{dv} - q\mu\varphi(z,v) = xv\frac{df\left(z+\frac{bv}{c},\frac{nv}{c}\right)}{dv} - q\mu f(x,y) = \frac{xbv}{c}\frac{df(x,y)}{dx} + \\ + \frac{xnv}{c}\frac{df(x,y)}{dy} - q\mu f(x,y) = 0$$

ou enfin :

$$qx\frac{df}{dx} + xy\frac{df}{dy} - q\mu f(x,y) = 0,$$

d'où l'on déduit :

(4) $$q = \frac{xy\frac{df}{dy}}{\mu f(x,y) - x\frac{df}{dx}};$$

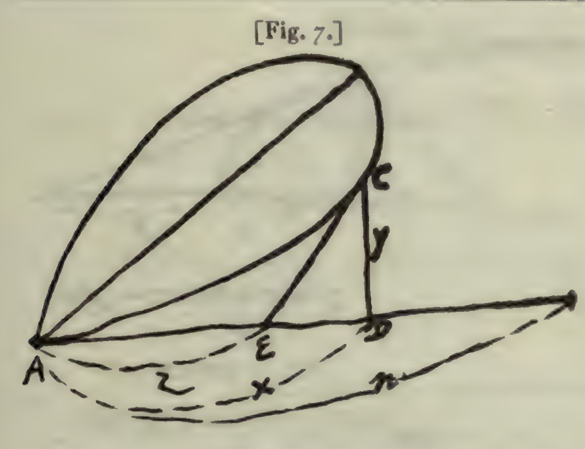
expression qui se réduit immédiatement à l'expression bien connue :

(5) $$q = -\frac{y\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}.$$

On voit donc que la première méthode de Huygens, quoiqu'inutilement compliquée, conduit à la valeur exacte de la sous-tangente; mais sous une forme (4) qui diffère de la forme usuelle (5).

[1]) Cette expression pour DE s'accorde avec la construction de la tangente indiquée par de Sluse dans sa lettre du 6 octobre 1662, p. 246 du T. IV.

[Fig. 7.]



§ 4 [2]).

$$x^3 + y^3 - xyn \infty 0$$

$$x - z \text{ [ad] } y \text{ [ut] } n \text{ [ad] } \frac{ny}{x-z} \infty$$

---

[2]) Dans ce paragraphe une méthode différente de celle du § 3 est appliquée, d'abord au folium de Descartes, ensuite à la courbe de Gutschoven. Ainsi que nous l'avons fait dans les notes 5 de la p. 508 et 11 de la p. 509 pour la méthode précédente, nous appliquerons cette nouvelle méthode à son tour au cas d'une courbe algébrique quelconque $f_\mu(x, y) = \Sigma_\alpha A_\beta x^\alpha y^\beta = 0$.

Posant ED $(x-z)$: CD $(y) = n : s$, on a ici $y = \frac{sx - sz}{n}$, et par suite:

(1) $$f_\mu\left(x, \frac{sx - sz}{n}\right) = \psi_\mu(x, z) = \Sigma_\gamma C_\delta z^\gamma x^\delta = 0.$$

Si l'on ne change pas les valeurs de z, ni de s, de sorte que la forme du triangle CED et la situation du point E ne varient pas, il est clair qu'en changeant la valeur de x, on verra le point C se déplacer le long de la tangente et que les racines de l'équation $\Sigma_\gamma C_\delta x^\gamma z^\delta = 0$ correspondront aux points d'intersection de cette tangente avec la courbe. Or, puisque le point de contact de la tangente doit correspondre à une racine double, on aura:

(2) $$\Sigma \gamma_\gamma C_\delta x^\gamma z^\delta = 0.$$

Cela explique le deuxième algorithme (p. 512), qui conduit à l'équation qui, plus bas, est multipliée par z. De même l'équation:

(3) $$\Sigma(\mu - \gamma)_\gamma C_\delta x^\gamma z^\delta = 0$$

explique le premier algorithme.

De cette façon l'équation $sxzz + 3x^3z + sx^3 = 0$ du texte est remplacée dans le cas général par:

(4) $$z\Sigma\gamma_\gamma C_\delta x^\gamma z^\delta + x\Sigma(\mu - \gamma)_\gamma C_\delta x^\gamma z^\delta = 0$$

ou bien:

$$(z-x)x \frac{df\left(x, \frac{sx - sz}{n}\right)}{dx} + \mu x f(x, y) = -qx\left(\frac{df}{dx} + \frac{s}{n}\frac{df}{dy}\right) + \mu x f(x, y) = 0,$$

d'où résulte, puisque $s = \frac{ny}{x-z} = \frac{ny}{q}$:

(5) $$q = \frac{\mu f(x, y) - y\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}};$$

relation qui est équivalente à la relation connue:

$\infty\ s$ [1]); $y \infty \frac{sx - sz}{n}$

$$\frac{s^3x^3 - 3s^3xxz + 3s^3xzz - s^3z^3}{n^3} - sxx + szx + x^3 \infty 0$$

0	1	2	3	1	2	0
3	2	1	0	2	1	3

[Fig. 7.]

$$x \text{ in } \frac{-3s^3xxz + 6s^3xzz - 3s^3z^3}{n^3} - sxx + 2sxz \infty 0 \text{ [2])}$$

$$z \text{ in } \frac{3s^3x^3 - 6s^3xxz + 3s^3xzz}{n^3} - 2sxx + sxz + 3x^3 \infty 0 \text{ [3])}$$

$$sxzz + 3x^3z - sx^3 \infty 0 \text{ [4])}$$

$$szz + 3xxz - sxx \infty 0$$

$$\frac{3zxx}{xx - zz} \infty s \infty \frac{ny}{x - z}$$

$3zxx \infty nyx + nyz$; $x - q \infty z \infty \frac{nyx}{3xx - ny}$.

$3x^3 - nyx - 3qxx + nyq \infty nyx$

$q \infty \frac{2nyx - 3x^3}{ny - 3xx}$ vel, quia $nxy \infty x^3 + y^3$

$q \infty \frac{3y^3 - nyx}{ny - 3xx}$ [6])

Si effet æquatio curvæ $x^3 + 2y^3 - xyn \infty 0$ vel quivis alius numerus ductus in y^3 eadem tamen invenitur conſtructio ad tangentem, nempe $z \infty \frac{nyx}{3xx - ny}$ [5]),

---

(6) $$q = -\frac{y\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}.$$

La deuxième méthode de Huygens conduit donc, elle aussi, à une expression pour la sous-tangente équivalente à l'expression (6), mais de forme différente.

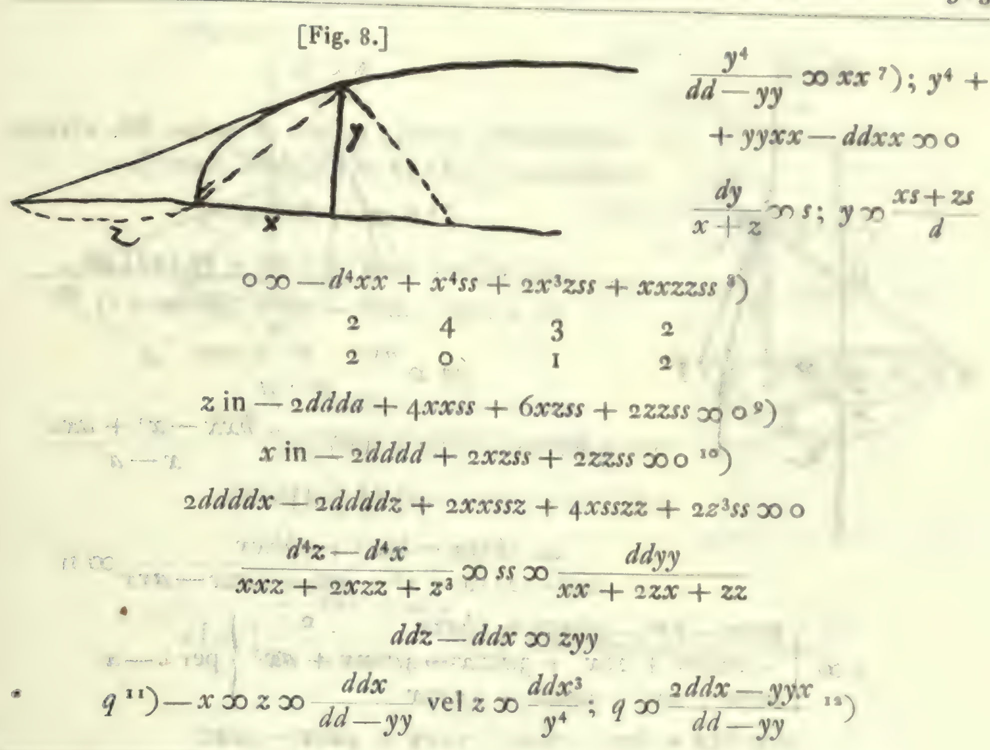
[1]) La grandeur de s détermine donc la forme du triangle ECD, puisque n est une constante donnée.

[2]) Cette équation correspond donc à l'équation (3) de la note 2 de la page précédente.

[3]) Équation qui correspond à l'équation (2) de la note mentionnée.

[4]) Équation qui correspond à l'équation (4) de la note mentionnée.

[Fig. 8.]



$\frac{y^4}{dd-yy} \infty xx$ [7]); $y^4 + yyxx - ddxx \infty 0$

$\frac{dy}{x+z} \infty s$; $y \infty \frac{xs+zs}{d}$

$$0 \infty -d^4xx + x^4ss + 2x^3zss + xxzzss \text{ [8])}$$

2 4 3 2

2 0 1 2

z in $-2ddda + 4xxss + 6xzss + 2zzss \infty 0$ [9])

x in $-2dddd + 2xzss + 2zzss \infty 0$ [10])

$$2ddddx - 2ddddz + 2xxssz + 4xsszz + 2z^3ss \infty 0$$

$$\frac{d^4z - d^4x}{xxz + 2xzz + z^3} \infty ss \infty \frac{ddyy}{xx + 2zx + zz}$$

$$ddz - ddx \infty zyy$$

q [11]) $-x \infty z \infty \frac{ddx}{dd-yy}$ vel $z \infty \frac{ddx^3}{y^4}$; $q \infty \frac{2ddx - yyx}{dd-yy}$ [12])

---

5) Plus généralement, on trouve:

$$z = x - q = \frac{x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} - \mu f(x,y)}{\frac{df}{dx}}.$$

Or, le terme ${}_0A_\mu\, y^\mu$ de l'équation de la courbe n'entre pas dans le dénominateur et il disparaît dans le numérateur après réduction.

6) Voir la note 1 de la p. 510.

7) Équation de la courbe de Gutschoven; comparez le deuxième alinéa de la Pièce N°. VI, p. 501. Voir, pour l'exposition générale de la méthode suivie, la note 2 de la p. 511. La quantité constante n est remplacée ici par d.

8) Huygens substitue $\frac{xs+zs}{d}$ pour y dans l'équation $y^4 + yyxx - ddxx = 0$, mais il omet le terme y^4, puisqu'il sait que ce terme n'a pas d'influence sur l'expression qu'il trouvera pour z; comparez la note 5.

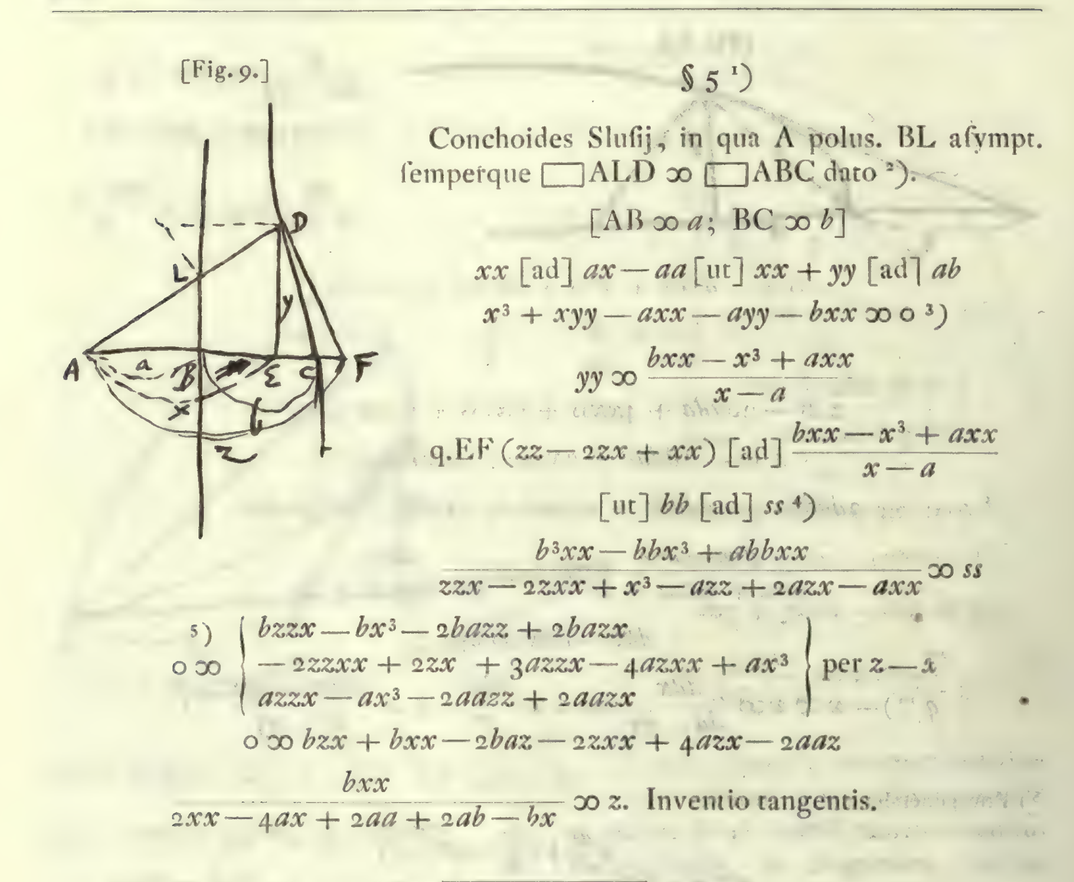
9) Comparez la note 3; mais Huygens omet partout, ici et dans l'équation qui suit, deux facteurs x.

10) Comparez la note 2.

11) $q = x + z$ est la soustangente sur l'axe des x.

12) Nous supprimons l'application de la même méthode à la détermination de la tangente à la parabole „$2ny - yy - xx - 2xy \infty 0$", qu'on trouve à la même page, parce que cette appli-

[Fig. 9.]



§ 5 [1])

Conchoides Slusij, in qua A polus. BL asympt. semperque $\square$ALD ∞ $\square$ABC dato [2]).

$$[AB \infty a;\ BC \infty b]$$

$$xx\ [ad]\ ax - aa\ [ut]\ xx + yy\ [ad]\ ab$$

$$x^3 + xyy - axx - ayy - bxx \infty 0\ ^{3})$$

$$yy \infty \frac{bxx - x^3 + axx}{x - a}$$

$$\text{q.EF}\ (zz - 2zx + xx)\ [ad]\ \frac{bxx - x^3 + axx}{x - a}$$

$$[ut]\ bb\ [ad]\ ss\ ^{4})$$

$$\frac{b^3xx - bbx^3 + abbxx}{zzx - 2zxx + x^3 - azz + 2azx - axx} \infty ss$$

$$^{5})\quad 0 \infty \left\{ \begin{array}{l} bzzx - bx^3 - 2bazz + 2bazx \\ -2zzxx + 2zx\ + 3azzx - 4azxx + ax^3 \\ azzx - ax^3 - 2aazz + 2aazx \end{array} \right\} \text{per } z - x$$

$$0 \infty bzx + bxx - 2baz - 2zxx + 4azx - 2aaz$$

$$\frac{bxx}{2xx - 4ax + 2aa + 2ab - bx} \infty z.\ \text{Inventio tangentis.}$$

---

cation ne présente rien de particulier. On rencontre la même courbe dans la lettre de de Sluse du 6 octobre 1662, p. 247 du T. IV. La construction de la tangente indiquée par lui correspond à la solution de Huygens.

[1]) Détermination de la tangente à la conchoïde de de Sluse de deux manières différentes et détermination du point d'inflexion de cette courbe.

[2]) Comparez la lettre de de Sluse du 6 octobre 1662 (p. 247 du T. IV) où il donne la définition de sa conchoïde, dont il dit avoir trouvé la construction de la tangente et du point d'inflexion.

[3]) Équation de la conchoïde de de Sluse.

[4]) Huygens applique la dernière des trois méthodes employées dans le § 2. Puisque s est proportionnelle à $\frac{y}{z-x}$, il faut que sa grandeur soit maximum ou minimum lorsque DF est tangente à la courbe et lorsque z est considérée comme une constante tandis que le point D est déplacé le long de la courbe.

[5]) Application de l'algorithme de Hudde pour déterminer la valeur maximum ou minimum d'une fraction (voir la note 4 de la p. 505), accompagnée de la division de chaque terme par b^2x^2. Chaque ligne correspond à l'un des termes du numérateur.

[6]) Huygens se sert ici de la première méthode du § 1; consultez la note 4 de la p 505.

[Fig. 10.]

$$[NE \infty]\ z - a + x$$

$$\text{qu. } z - a + x$$

$$zz - 2az + aa + 2zx - 2ax + xx +$$

$$\text{q.ED.}$$

$$+ \frac{bxx - x^3 + axx}{x - a} \infty ss$$ [6])

$$\frac{2zxx - 2azx - 2axx + 2aax + bxx}{x - a}$$ [7])

$$+1 \quad 0 \quad +1 \quad 0 \quad +1$$ [8])

$$0 \infty \left\{ \begin{array}{l} 2zxx - 2axx + bxx \\ -4azx + 2aaz + 4aax - 2a^3 - 2bax \end{array} \right.$$

$$\frac{axx - \frac{1}{2}bxx - 2aax + a^3 + bax}{xx - 2ax + aa} \infty z$$

$a\,[+]\,\dfrac{-\frac{1}{2}bxx + abx}{xx - 2ax + aa} \infty z$ Inventio tangentis aliter.

---

ad primam figuram [9]) $\dfrac{bxx}{2xx - 4ax + 2aa + 2ab - bx} \infty z$ maxima

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

$$-4ax + 4aa + 4ab - bx \infty 0$$ [10])

$$\frac{4aa + 4ab}{4a + b} \infty x \text{ vel } x \infty \frac{aa + ab}{a + \frac{1}{4}b}$$

$a + \dfrac{3ab}{4a + b} \infty x$, $\dfrac{3ab}{4a + b} \infty x - a$ determinatio puncti ubi flexus contrarius incipit.

---

7) Il s'agit de déterminer le maximum ou minimum de ss; mais puisque a est une quantité constante et que z doit être considérée comme telle, les trois premiers termes de l'expression précédente n'importent pas et peuvent être négligés dans la formation de la fraction à laquelle Huygens va appliquer l'algorithme de Hudde.

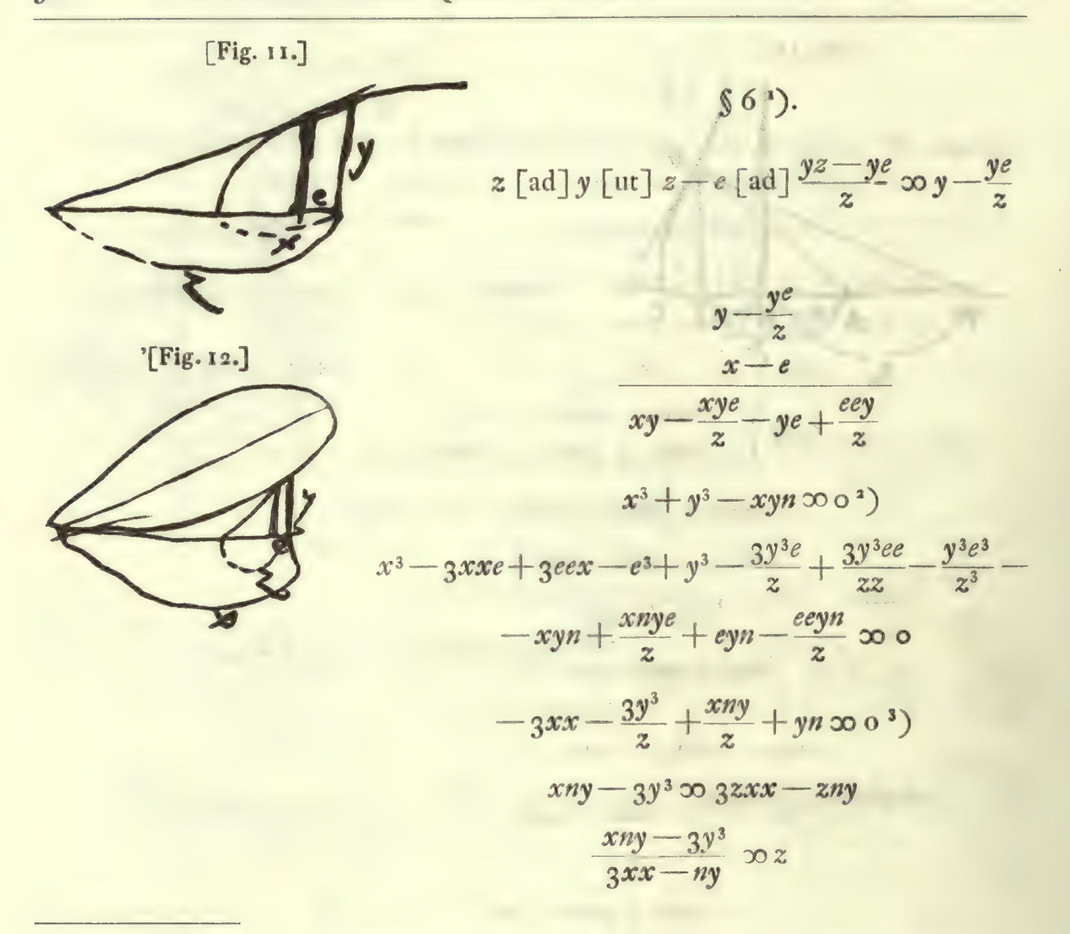
8) Ces coefficients ont servi pour former la première ligne (dépendant du premier terme x du numérateur) de l'équation qui se construit suivant l'algorithme de Hudde en divisant toutefois tous les termes par x.

9) Voir la Fig. 9.

10) Application de l'algorithme de Hudde avec division des termes par bxx.

[Fig. 11.]

[Fig. 12.]



§ 6 [1]).

$$z \text{ [ad] } y \text{ [ut] } z - e \text{ [ad] } \frac{yz - ye}{z} \infty y - \frac{ye}{z}$$

$$\begin{array}{c} y - \frac{ye}{z} \\ x - e \\ \hline xy - \frac{xye}{z} - ye + \frac{eey}{z} \end{array}$$

$$x^3 + y^3 - xyn \infty 0 \text{ [2])}$$

$$x^3 - 3xxe + 3eex - e^3 + y^3 - \frac{3y^3e}{z} + \frac{3y^3ee}{zz} - \frac{y^3e^3}{z^3} -$$

$$- xyn + \frac{xnye}{z} + eyn - \frac{eeyn}{z} \infty 0$$

$$- 3xx - \frac{3y^3}{z} + \frac{xny}{z} + yn \infty 0 \text{ [3])}$$

$$xny - 3y^3 \infty 3zxx - zny$$

$$\frac{xny - 3y^3}{3xx - ny} \infty z$$

---

[1]) Ce paragraphe nous fait connaître les calculs qui ont servi à déduire l'algorithme simple pour déterminer la sous-tangente d'une courbe algébrique donnée, que Huygens expose dans sa lettre à de Witt du 25 février 1663 (p. 312—317 du T. IV) et qui fut publié en 1693 dans les „Divers ouvrages de Mathématique et de Physique. Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences" (voir la p. 331 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 de notre T. IX). Probablement cette découverte fut mandée à de Sluse dans une lettre du 10 décembre 1662, que nous ne connaissons pas (voir la seconde note 1 de la p. 291 du T. IV), puisqu'on lit dans la réponse de de Sluse, du 12 janvier 1663 (voir la p. 292 du T. IV): „Gaudeo Te ac Clarissimum Huddenium in tangentium methodum meæ non absimilem incidisse: an vero eadem sit necne, hoc τεκμηρίῳ colliges".

[2]) Équation du folium de Descartes.

[3]) Il s'agit du coefficient de e dans l'équation qui précède.

[4]) L'algorithme employé ici pour la détermination de la sous-tangente ne diffère de celui exposé dans la lettre à de Witt, citée dans la note 1, que par le signe attaché à chaque terme du numérateur et du dénominateur.

Ajoutons qu'à la même page du manuscrit on trouve encore d'autres petits calculs dans lesquels on reconnaîtra facilement l'algorithme inventé par Hudde tel qu'il est exposé dans

$$x^3 + y^3 - xyn \infty 0$$
$$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$
$$\frac{-3y^3 + xyn}{-3xx + yn}$$ [4])

$$x^3 + xyy - axx - ayy - bxx \infty 0$$
$$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{matrix}$$
$$\frac{-2xyy + 2ayy}{-3xx - yy + 2ax + 2bx}$$ [5])

---

la note 6 de la p. 446 de notre Avertissement.

En voici le premier:

$$\begin{matrix} x^3 + y^3 - xyn \\ -3 \quad 0 \quad -2 \\ 3 \quad 0 \quad 1 \end{matrix}$$
$$\frac{-3x^3 + 2xyn}{3x^3 - xyn}$$

Or, la règle de Hudde exige qu'on multiplie la fraction obtenue par $-x$, de sorte qu'elle donne pour la sous-tangente l'expression $\frac{3x^3 - 2xyn}{3x^2 - yn}$, qui se réduit, si l'on applique la relation $x^3 + y^3 - xyn = 0$, à $\frac{-3y^3 + xyn}{3x^2 - yn}$; expression que ne diffère de celle trouvée par Huygens que par le signe qui dépend de la convention qu'on a adoptée.

Les autres petits calculs présentent les coefficients:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & \quad & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & \quad & 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

conformes à l'algorithme de Hudde avec cette différence que, dans l'une des deux lignes, les signes des coefficients sont renversés; ce qui change le signe de l'expression pour la sous-tangente.

[5]) Application de l'algorithme à la conchoïde de de Sluse; comparez le § 5 qui précède.

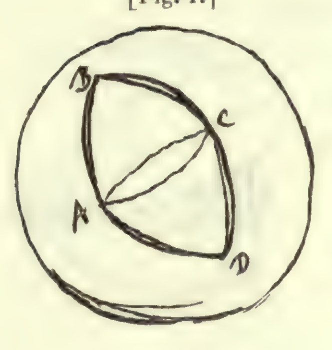
VIII [1].

[1664] [2].



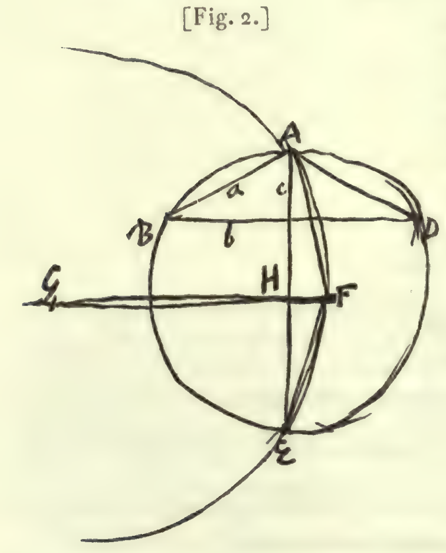
Sphæræ datæ diametrum invenire.

[Fig. 1.]



Defcribantur in fphæræ fuperficie duo triangula æquilatera ABC, ADC, fibi mutuo oppofita ita ut bafes ijfdem punctis A, C, terminentur. Diftantia punctorum BD circino capiatur et in planum tranfferatur et fuper hac bafi triangulum ifofceles conftituatur cujus crura AB, AD [Fig. 2] diftantijs punctorum BA vel AD fint æqualia. tum porro per tria puncta BAD circulus defcribatur cujus fit diameter AE [3]), fuper qua rurfus triangulum ifofceles defcribatur AFE [4]) cujus latera ipfis AB aut AD fint æqualia; et per tria puncta AFE circulus defcribatur. Hujus diameter erit diametro fphæræ æqualis.

[Fig. 2.]



$[AE \infty] \frac{aa}{c}$; $[q.HF]$ [5]) $aa - \frac{1}{4}\frac{a^4}{cc}$ $[ad\ q.AF]$

aa $[ut\ q.AF]$ aa $[ad\ q.2GF]$

$$\frac{a^4}{aa - \frac{1}{4}\frac{a^4}{cc}} [\infty] \frac{a^4cc}{aacc - \frac{1}{4}a^4}$$

$$\frac{ac}{\sqrt{cc - \frac{1}{4}aa}} \text{ diam. sphæræ.}$$

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 161 du Manuscrit B.

[2]) D'après le lieu que la Pièce occupe au Manuscrit B.

[3]) Ce cercle représente évidemment le petit cercle de la sphère qui passe par les points BAD et qui a pour pôle le point C de la sphère.

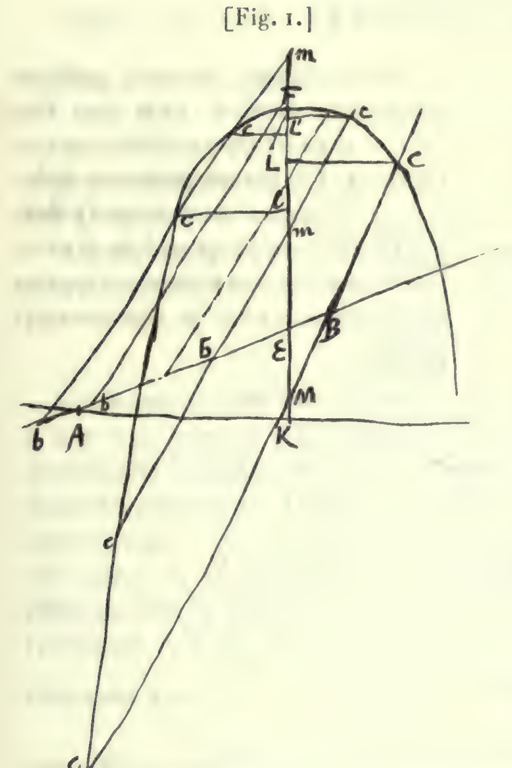
[4]) Le point F correspond au pôle C.

[5]) Nous avons ajouté à la Fig. 2 la lettre H qui manque dans la figure de Huygens.

IX [1]).

[1665] [2]).

[Fig. 1.]



AB ∞ x; BC ∞ y; EF ∞ a; KA ∞ b; AE ∞ c

prop. EB ad BM [3])

a [ad] d [ut] EB $(x - c)$ [ad] BM $\frac{dx - dc}{a}$

BC $\quad y$

MC $\frac{dx - dc + ay}{a}$

prop. MC ad CL

e [ad] a [ut] MC $\left(\frac{dx - dc + ay}{a}\right)$ [ad]

CL $\frac{dx - dc + ay}{e}$

prop. MC ad ML

f [ad] a [ut] MC $\left(\frac{dx - dc + ay}{a}\right)$ [ad]

ML $\frac{dx - dc + ay}{f}$

prop. EB ad EM $\quad$ f.

f [ad] g [ut] $x - c$ [ad] EM $\frac{gx - gc}{f}$

---

[1]) Dans cette Pièce, que nous empruntons aux pp. 8 et 29 du Manuscrit C, Huygens déduit les formules qui peuvent servir à passer d'un système de coordonnées cartésiennes (comme LF $= x'$, LC $= y'$) à un autre quelconque (AB $= x$, BC $= y$) de ce même genre. Ensuite il se propose d'appliquer ces formules à des recherches sur les cubiques.

[2]) D'après le lieu que la Pièce occupe au Manuscrit C.

[3]) La direction de l'axe EF par rapport aux axes des x et des y est déterminée ici par le rapport (proportio) de EB à BM, savoir de a à d.

$$\text{EL}\ \frac{dx - gx - dc + gc + ay}{f}$$

$$\text{ex EF}\ \ a$$

$$\text{LF}\ \frac{af - dx + gx + dc - gc - ay}{f}$$ [1])

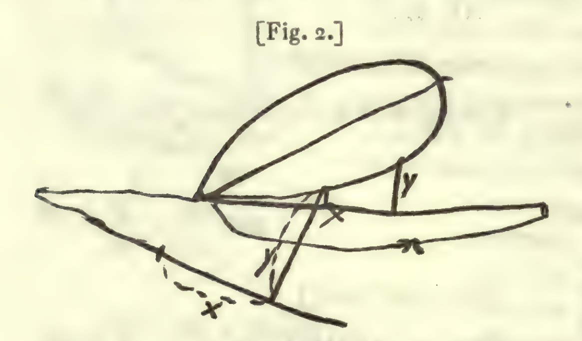
In æquatione aliqua ſi præter x^3 habeatur et y^3 non autem adſint etiam omnia hæc *xxy. yyx. xxp. yyp. xyp* non erit locus paraboloides cubica obtuſa [2]).

Neque item ſi unum horum adſit, non autem y^3.

Si vero in æquatione aliqua præter x^3 habeatur et y^3 non autem adſint etiam hæc duo *xxy* et *yyx*, non erit locus paraboloides cubica acuta [3]).

Neque item ſi alterutrum horum adfuerit non autem y^3.

[Fig. 2.]



Multæ igitur formari poſſunt æquationes cubicæ quæ non ſint loci ad alterutrum parabolarum cubicarum. Ut autem numerus cubicarum linearum inveniatur [4]) ſimpliciſſimæ lineæ proponendæ ut $x^3 + y^3 - xyn \infty 0$ et videndum quales æquationum caſus in illa inveniri poſſint.

[1]) Nous supprimons une autre déduction analogue (correspondant à une situation différente du système de coordonnées) dont le résultat ne diffère du résultat présent que par les signes de quelques termes.

[2]) Il s'agit évidemment de la cubique $y'^3 = kx'$; mais Huygens oublie le cas $c = 0$; auquel cas les termes *xxp*, *xyp* et *yyp* n'apparaissent point dans l'équation en x et y.

[3]) Il s'agit ici de la cubique $y'^3 = kx'^2$.

[4]) On connaît la manière magistrale dont le problème de la classification des cubiques fut résolu par Newton dans son „Enumeratio linearum tertii ordinis", publiée en 1704.

X [1]).

1666.

1666. Sept.

Invenire numerum qui per tres datos numeros seorsim divisus, relinquat a divisione tres alios datos numeros.

Sit inveniendus qui per 28 divisus relinquat 13. Per 19 relinquat 4, per 15 relinquat 9.

Sit 28 ∞ *a*	13 ∞ *n*
„ 19 ∞ *b*	4 ∞ *o*
„ 15 ∞ *c*	9 ∞ *p*

Sit numerus quæsitus primo $ab + ac + bc$. si jam bc per a divisus relinqueret n sive 13, patet primæ conditioni satisfacere numerum $ab + ac + bc$. Item si ac divisus per b relinqueret o sive 4, idem numerus $ab + ac + bc$ satisfaceret quoque secundæ conditioni. Item si ab divisus per c relinqueret p sive 9, satisfaceret idem numerus $ab + ac + cb$ etiam tertiæ conditioni. Itaque tantum opus esset addere $ab + ac + bc$ ad inveniendum numerum quæsitum. quod quidem contingeret si n esset 5; $o \infty 2$; $p \infty 7$. Sed cum bc per a divisus non relinquit n, videndum an relinquat 1. nam tunc bc ductus in n faciet numerum qui divisus per a necessario relinquet n ut facile est intelligere: nam si $\frac{bc}{a} \infty q$ [2]) $+ \frac{1}{a}$ fiet $bcn \infty naq + n$ qui per a divisus relinquit $\frac{n}{a}$. Quod si vero bc per a divisus non relinquit unitatem, quærendum per quem alium multiplicatus relinquat unitatem à divisione per a. faciet ex. gr. $\frac{bc}{a}$ reliquum d. Quæritur jam tantum f ita ut $\frac{df}{a}$ relinquat 1. Jam

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 102 du Manuscrit C.

[2]) Huygens ajoute en marge: „q tantum numerum aliquem integrum significat".

etiam bcf per a relinquet 1. nam $\frac{bc}{a} \infty q + \frac{d}{a}$. Ergo $\frac{bcf}{a} \infty qf + \frac{df}{a}$. Ergo $bcf \infty$ $\infty aqf + df$. Sed aqf per a facit qf; et $\frac{df}{a}$ relinquit 1. Ergo $aqf + df$ per a relinquit 1. Unde et bcf per a relinquit 1. Quod fi jam bcf ducatur in n neceffario productum $bcfn$ divifum per a relinquet n. Nam quia $\frac{bcf}{a} \infty q + \frac{1}{a}$. Erit $bcf \infty$ $\infty aq + 1$, et $bcfn \infty aqn + n$. Sed $aqn + n$ divifus per a facit $qn + \frac{n}{a}$. hoc eft, relinquit n à divifione. Ergo $bcfn$ per a relinquet n à divifione.

Simili ratione quæratur g qui ductus in ac faciat productum acg quod divifum per b relinquat 1. Nam tunc $acgo$ divifum per b relinquet o.

Similiter quoque quæratur h qui ductus in ab faciat productum abh quod divifum per c relinquat 1. Nam tunc $abhp$ divifum per c relinquet p.

Jamque numeri tres $bcfn + acgo + abhp$ una additi fatisfacient omnibus conditionibus. nam compofitus ex his divifus per a, faciet $cgo + bhp + \frac{bcfn}{a}$. Unde relinquetur n à divifione quia $bcfn$ per a relinquit à divifione n. Item divifus per b, faciet $cfn + ahp + \frac{acgo}{b}$; ubi fcimus $acgo$ per b relinquere o. Denique divifus per c faciet $bfn + ago + \frac{abhp}{c}$; ubi fcimus $abhp$ per c divifum relinquere p.

Cæterum ut minimus numerus habeatur propofito fatisfaciens oportet ab numero $bcfn + acgo + bhp$ auferre totius abc quoties poteft, five divifionem inftituere, nam quod ab ea relinquetur erit minimus numerus propofito fatisfaciens [1]).

Notandum etiam manentibus numeris a, b, c etfi tres alij n, o, p mutentur five alij dentur, facile tamen quæftioni fatisfieri per numeros femel inventos bcf, acg, abh. Patet enim illos tantum ducendos effe fingulos in n, o, p. productaque addenda et per abc dividenda [1]).

Ita ad inveniendum annum Periodi Julianæ Scaligeri [2]), ex datis Cyclo Solis, Cyclo Lunæ five aureo numero, et Indictione. quia Cyclus folis Integer eft 28, Cyclus lunæ integer 19, Indictio 15. fiunt numeri perpetui

$$bcf \infty 4845;\ acg \infty 4200;\ abh \infty 6916.$$

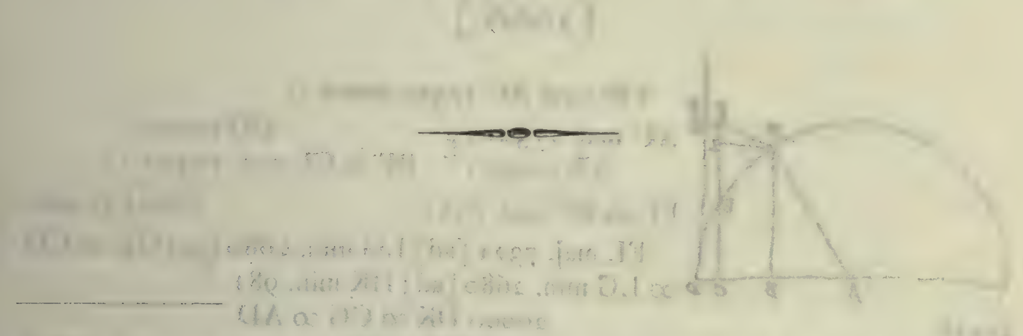
---

[1]) On doit plutôt diviser par le plus petit commun multiple des nombres a, b, c, comme il est indiqué dans l'ouvrage cité dans la note 5 qui suit. Alors, en effet, le reste de la division est le nombre le plus petit qui satisfait à la proposition. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que la différence entre deux nombres qui satisfont à la question doit être divisible par a, par b et par c et, par suite, aussi par leur plus petit commun multiple.

[2]) Voir sur Joseph Justus Scaliger, l'inventeur du Cycle Julien, la note 2 de la p. 538 du T. I et la note 4 de la p. 476 du T. V.

Si jam anni alicujus cyclus ſolis ſit 13. Lunæ 4, Indictio 9. Oportet tantum ducere 4845 in 13 ſit 62985. Item 4200 in 4 ſit 16800. Item 6916 in 9 ſit 62244, qui ſimul additi faciunt 142029 qui diviſus per 7980 ſive *abc*, numerum Periodi Scaligerianæ, relinquit 6369, annum Periodi ejus quibus data conveniunt.

P. Billy [3]) Regulam hanc tanquam a ſe inventam dederat [4]), ſed potuit hauſiſſe ex Exercitationibus mathem.is Schotenij [5]), qui D.° Perſijn Harlemenſi [6]) eam acceptum fert [7]). Nos quo pacto inventa eſſe potuerit hic explicuimus.



[3]) Voir sur le père Jacques de Billy la note 12 de la p. 374 du T. VI.

[4]) Il s'agit de l'„Extrait d'une Lettre du P. de Billy de la Comp. de Jesus, du 22 Aoust à Dijon", qui parut dans le „Journal des Sçavans du Lundy 6 Sept. 1666", p. 670 de l'édition d'Amsterdam de 1684. Billy y donne „Pour trouver l'année de la Periode Juliene par une methode nouvelle & très-facile" la règle suivante: „multipliez le Cycle du Soleil par 4845, celuy de la Lune par 4200, & celuy de l'Indiction par 6916. Ensuite divisez la somme des produits par 7980, qui est la periode Juliene: Ce qui restera de la division, sans avoir égard au quotient, sera l'année qu'on cherche". Il applique cette règle à un autre exemple que celui du texte et l'auteur du Journal ajoute: „Quelques sçavans Mathematiciens de Paris à qui le P. Billy a proposé ce Probleme, en ont trouvé la demonstration".

Une traduction de l'article fut insérée dans les „Philosophical Transactions" du 22 octobre 1666 (p. 324) sous le titre „A problem For finding the Year of the Julian Period by a new and very easy Method".

[5]) Voir la p. 408—410 du „Liber V" de l'ouvrage mentionné, duquel „Liber" nous avons reproduit le titre à la p. 52 du Tome présent. On y retrouve, en effet, la méthode exposée par Huygens avec la correction que nous avons indiquée dans la note 1. Elle y est appliquée à deux exemples. Dans le premier les diviseurs sont 2, 3, 5 et 7 et les restes respectivement 1, 1, 1 et 0; dans le deuxième 7, 11 et 13 avec les restes 2, 1 et 9; on n'y trouve aucune allusion au problème de trouver l'année de la Période Julienne.

[6]) Nicolaas Huybertsz. van Persijn, né probablement à Haarlem, ami de Ludolf van Ceulen, fut arpenteur à Naarden. Il avait déjà été mentionné par van Schooten à la p. 404 des „Exercitationes mathematicæ" et le fut encore aux pp. 435 et 436 de cet ouvrage, comme aussi à la p. 275 de l'édition de 1649 de la „Geometria" (p. 319 de l'édition de 1659), où van Schooten l'appelle „arithmeticus subtillissimus".

[7]) En effet, on lit à la p. 408 des „Exercitationes mathematicæ": „Cæterùm cum ad hujusmodi quæstiones solvendas modum ingeniosissimum excogitarit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Persijn, placuit eum, qualem ab ipso accepi, paucis hic subjicere".

XI [1].

[1666.]

FB[2]) vel AC 17320 minor [3])

AC maj. 17321 } f.
AB 10000 }

FL ∞ BC maj. 7321

CG 20000
BF ∞ CL maj. 17320 [4])
2680 LG min.

FL maj. 7321 [ad] LG min. 2680 [ut] GK ∞ CD ∞ LG min. 2680 [ad] HK min. 981

31416
62832 semicirconf. major vera

20000 DK ∞ CG ∞ AD
981 HK min.
20981 DH min.
3
62943 semicircumf. minor vera
secundum Oudardum [5]).

---

[1]) La Pièce, où Huygens examine une construction approchée de la circonférence du cercle, se trouve à la p. 104 du Manuscrit C, qui suit aux pages dont nous avons emprunté la Pièce précédente. Elle doit dater de 1666.

[2]) Pour expliquer la construction qui va suivre il suffira de remarquer que l'angle FAB est égal à 60°, qu'on y prend AC = FB et CG = AD. Alors DH représente approximativement la troisième partie de la demi-circonférence du cercle dont AD est le rayon.

[3]) Huygens suppose AF = 20000.

[4]) Lisez 17321. Par conséquent, on doit remplacer partout 2680 par 2679. Cela donne $980 < HK$, $20980 < DH$, $62940 < 3DH$. Ainsi la quantité 3DH est plus grande que la demi-circonférence du cercle, tandis que Oudart semble avoir prétendu qu'elle est plus petite.

[5]) Probablement Nicolaas Oudart, homme d'état hollandais, né à Malines, qui s'établit plus tard à Londres, où il mourut en 1681. Il fut e.a. secrétaire de la Princesse Royale Mary Stuart, veuve du Stadhouder Willem II. On le trouve mentionné aux pp. 173 et 217 du T. III.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Dans cette lifte on a rangé les noms fans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres.
Les chiffres gras défignent les pages où l'on trouve des renfeignements biographiques.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve une deſcription de l'ouvrage.
Les chiffres ordinaires donnent les pages où il eſt queſtion de l'ouvrage.

Oud-Holland, Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederl. Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz., 1913, 412.
Philosophical Transactions, 1666, 523; 1673, 442, 443; 1711, 9.
Proceedings of the Royal Society of London, 1887, 465.
Registre des procès-verbaux de l'Académie des Sciences, 1666, **431**.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1896, 10.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières ſcientifiques traitées dans ce Volume XIV ont été groupées ſous divers articles généraux, ſavoir :

Algèbre.	frères Huygens.	Philoſophie.
Arithmétique.	Géographie.	Philologie.
Aſtronomie.	Géométrie.	Phyſique.
Chronologie.	Mécanique.	Poids et meſures.
Chronométrie.	Muſique.	Probabilités.
Cours des études des	Œuvres.	Statiſtique.

Pour connaître tous les endroits où quelque ſujet eſt traité on cherchera dans la Table l'article général auquel il appartient. On y trouvera, ſoit du ſujet même, ſoit d'un ſous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un aſtériſque les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* ſe rapporte aux écrits de Huygens, ſoit publiés ici ou ailleurs, ſoit ſeulement ébauchés.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page					Au lieu de	lisez
3	ligne	3	d'en bas		Louis	Lodewijk
5	note	12.	*Ajoutez à cette note*: Remarquons encore que l'édition hollandaise parut aussi, dans la même année 1660 et par les soins du même libraire, comme ouvrage séparé sous le titre: Van Rekeningh in Spelen van Geluk, door Chr. Huygens toegevoegd aan het „Vijfde Bouck der Mathematische Oeffeninghen, begrijpende Dertich afdeelingen van gemengde stoffe, door Franciscus van Schooten, Professor Matheseos in de Universiteyt tot Leyden. — t Amsterdam Bij Gerrit van Goedesbergh, Boeckverkooper op 't Water, in de Delftsche Bijbel, tegenover de Nieuwe Brugh. Anno 1660".			
16	„	6	ligne	1	13 février 1679, p. 43	13 février 1679 (p. 50 de l'édition d'Amsterdam de 1714)
„	„	„	„	4	Justiani	Justiniani
27	„	7	„	2	en lieu propre	aux p. 451—457 qui suivent; mais consultez encore sur la cause qui a incité Huygens à s'occuper du calcul des logarithmes le dernier alinéa de la p. 433.
113	„	9	„	1	joueurs	joueur
165	„	3	„	2	d'Amsterdam	d'Amsterdam de 1714
168	„	1.	*Ajoutez après le deuxième alinéa de cette note*: Remarquons encore que, dans quelques mots qui servent d'introduction à l'article de Sauveur, la rédaction du „Journal des Sçavans" mentionne (p. 41) les calculs de Huygens de la manière suivante: „Il y a lieu de croire qu'il" (c'est-à-dire Sauveur) „ne s'est pas trompé dans la supputation des Table			

Page	*Au lieu de*	*lifez*
	qu'il donne, puifque les trois premieres fe rapportent à trois de ces regles, que Monfr. Hugens a pris la peine de calculer, & dont il a donné le fondement auffi bien que des autres qui regardent les jeux de hazard, dans le Traité qu'il a publié autrefois fur cette matière."	
192 *note* 14 *de la page précédente ligne* 4 *d'en bas*	intérrreffant	intéreffant
197 *ligne* 5	conoide	conoïde
„ „ 1 *d'en bas*	verifier	vérifier
231 „ 2	[1657]	1657
299 *note* 7 *ligne* 2 *d'en bas*	lestermes	les termes
333 „ 10 „ 3	[Fig. 15]ᵗ fon	[Fig. 15] font
„ „ 10 *même ligne*	divifé	divifée
363 „ 5 *ligne* 6	are	arc
382 „ 1 „ 10	élements	éléments
448 „ 3 „ 2	Tàngentes	Tangentes

SOMMAIRE.

